2025 年 09 月 08 日

複数人ジャンケンで優勝が決まるまでの回数

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

先日テレビ番組で、「10 人のジャンケンはなかなか終わらない」という話を耳にした。実際に n 人のジャンケンが平均何回位で終わるか、すなわち n 人から始めて 1 人だけの勝者が決まるまでに行わなければいけないジャンケンの回数の期待値 M_n に関する考察は、ネットで検索するとかなり出てくるし (例えば [1], [2], [3], [4], [5]), その漸近オーダーが $O((2/3)^n)$ であることも知られているらしい ([6])。

これらの多くは平均回数に関する漸化式を使って考察しているが、私が確率論に関しては素人なせいか、確率論らしい確率空間や確率変数などの定式化は省かれていて、漸化式が成り立つことの説明もなんとなく行われているものが多いように感じる。

本稿では、そのあたりを多少明確にした話をしたいと思うが、もしかしたらこの問題のちゃんとした定式化については、「確率過程」などの理論で説明すべき話なのかもしれないが、それについては私も不勉強なので、基本的な確率論の中で考える。

2 3 人の場合

まずは、3 人の場合の M_3 を考える。3 人で 1 回ジャンケンをすると、

- (a) あいこになる (3 人とも同じ、あるいは 3 人とも異なる)
- (b) 2 人が勝ち残る (グー, グー, チョキ等)
- (c) 1 人だけ勝ち残る (グー, チョキ, チョキ等)

の 3 通りがあり、(c) の場合は 1 回で終わる。(b) の場合は、残った 2 人でまたジャンケンをして 1 人の勝ち残りを決めることになる。(a) の場合は、また 3 人でジャンケンをすることになる。

つまり、1 回目のジャンケンの結果により、次の試行の状態がだいぶ変わってしまうため、ジャンケンの単純な確率空間の設定、すなわち、3 人の手の組み合わせを各事象とし、それら全体の集合とその確率

$$\begin{cases} \Omega_0 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \,|\, \omega_j = \text{グー, チョキ, パーのいずれか}\} \\ P_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \dfrac{1}{27} \end{cases} \tag{1}$$

のような設定の元では考察しづらいことがわかる。

ちなみに、(a) になる確率は、(1) の 3^3 の組のうち、手が全部同じ 3 通りと手が 3 人とも違う $3! = 6$ 通りなので、$p = p_a = 9/3^3 = 1/3$、(b) になる確率は、

$$p = p_b = \frac{(\text{勝つ 2 人の選び方})\times(\text{手の種類})}{3^3} = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

で、(c) になる確率も同様に

$$p = p_c = \frac{(\text{勝つ 1 人の選び方})\times(\text{手の種類})}{3^3} = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

となる。(a) の場合は, また 3 人で始めからやるのと同じだから、回数はあと M_3 回かかることになり、(b) の場合は、2 人で始めるのであと M_2 回かかり、(c) の場合はこれで終わりだから、

$$M_3 = p_a(M_3 + 1) + p_b(M_2 + 1) + p_c \times 1 = \frac{M_3 + M_2}{3} + 1$$

より

$$M_3 = \frac{M_2}{2} + \frac{3}{2} \tag{2}$$

という漸化式が得られる。

M_2 の場合も同様にして、あいこの確率が 1/3、それ以外は 1 人勝ちになるので、

$$M_2 = \frac{1}{3}(M_2 + 1) + \frac{2}{3} \times 1$$

より

$$M_2 = \frac{3}{2} \tag{3}$$

となる。よって M_3 は (2) より

$$M_3 = \frac{9}{4} \tag{4}$$

となる。

前述のネット上にある説明はだいたいこのような説明であり、これを一般化した形で n 人の場合の M_n の漸化式を考察する、という方向が多いようである。

3 確率空間の設定

前節で見たように、場合によってあいこが続いたり、途中で人数が減り残った人数でやり直す、などのことがあるので、ジャンケンの手を事象と考えると、それぞれの場合により事象の集合が違ってしまうことになってうまく確率空間や確率変数の設定ができない (私が知らないだけかもしれない)。

ここではそのような方向はあきらめて、勝ち残りの人数を確率空間のベースと考えることにする。元々は n 人から始め、1 回目のジャンケンにより n_1 人が勝ち残り、2 回目のジャンケンにより n_2 人が勝ち残り、ということを繰り返し、この勝ち残りの人数の組を確率空間の事象と考える。あいこが続けば無限にジャンケンの試行が続く可能性もあるので、この事象の集合は、n 以下で非増加の無限自然数列全体

$$\Omega_n = \{\omega = (n_1, n_2, \ldots) \,|\, 1 \leq n_j \leq n_{j-1} \leq n \ (j \geq 1)\}$$

となる。なお $n_0 = n$ とし、n_j が j 回目のジャンケン後の勝ち残り人数、最初に $n_j = 1$ となるまでの回数 j が求める終了回数となり、その後はジャンケンは終わっているがずっと 1 が続く事象と考える。

さて、$\omega = (n_1, n_2, \ldots)$ に対する確率であるが、m 人の 1 回のジャンケンで k 人 $(1 \leq k \leq m-1)$ が勝ち残る確率 $p_k^{(m)}$ は、前節の考察と同様にして、

$$p_k^{(m)} = \frac{{}_m\mathrm{C}_k \times {}_3\mathrm{C}_1}{3^m} = \frac{{}_m\mathrm{C}_k}{3^{m-1}} \quad (1 \leq k < m)$$

となり、あいこ、すなわち勝ち残りが m 人である確率 $p_m^{(m)}$ は、その余事象なので、

$$p_m^{(m)} = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} p_k^{(m)} = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{{}_m\mathrm{C}_k}{3^{m-1}} = 1 - \frac{2^m - 2}{3^{m-1}} \tag{5}$$

となる。なお、2 項定理により、

$$\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k = 2^m$$

であることに注意する。さらに、

$$p_1^{(1)} = 1 \tag{6}$$

と定義しておく。

これらにより、$\omega = (n_1, n_2, \ldots) \in \Omega_n$ に対する確率 P_n の値は、n_0 から n_1 人になる確率、n_1 から n_2 人になる確率等々のすべての積となるので、

$$P_n(\omega) = P_n((n_1, n_2, \ldots)) = \prod_{j=0}^{\infty} p_{n_{j+1}}^{(n_j)} \tag{7}$$

となる。あるところで $n_j = 1$ となれば (6) によりその先はすべて 1 となって (7) は実質的には有限積となる。

そうでない場合は、ある 1 より大きい m $(1 < m \leq n)$ が無限に続くことになるが、この場合は (7) の式で (5) の $p_m^{(m)}$ $(0 < p_m^{(m)} < 1)$ が無限にかけられることになり、その確率は 0 となる。なお、これは m 人のあいこが無限に続くことに対応する。例えば、

$$P_5((4, 2, 2, 2, \ldots)) = p_4^{(5)} p_2^{(4)} \times \prod_{k=1}^{\infty} p_2^{(2)} = 0$$

といった具合である。よって (7) の値は 0 以上 1 以下の値を取ることがわかる。

次に、すべての $\omega \in \Omega_n$ に対する確率 $P_n(\omega)$ の値の和 $(= I_n)$ が 1 となることを帰納法で示そう。

$n = 1$ のときは、

$$\Omega_1 = \{(1, 1, \ldots)\}$$

のみなので、

$$I_1 = P_1((1, 1, \ldots)) = \prod_{j=1}^{\infty} p_1^{(1)} = 1$$

により成立する。

次に $n > 1$ とし、$I_1 = I_2 = \cdots = I_{n-1} = 1$ が成り立つと仮定し、$I_n = 1$ となることを示す。

今、$\omega = (n_1, n_2, n_3, \ldots) \in \Omega_n$ の n_2 以降を $\omega' = (n_2, n_3, \ldots) \in \Omega_{n_1}$ としたとき, $\omega = (n_1, \omega')$ のように書くことにすると、ω の最初の数値は 1 から n までありえて、よって

$$I_n = \sum_{\omega \in \Omega_n} P_n(\omega) = \sum_{n_1=1}^{n} \sum_{\omega' \in \Omega_{n_1}} P_n((n_1, \omega')) \tag{8}$$

と書けることがわかる。ここで、(7) より、

$$P_n((n_1, \omega')) = \prod_{j=0}^{\infty} p_{n_{j+1}}^{(n_j)} = p_{n_1}^{(n)} \prod_{j=1}^{\infty} p_{n_{j+1}}^{(n_j)} = p_{n_1}^{(n)} P_{n_1}(\omega')$$

となるから、(8) は

$$I_n = \sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} \sum_{\omega' \in \Omega_{n_1}} P_{n_1}(\omega') \tag{9}$$

となる。ここで、$n_1 < n$ に対しては帰納法の仮定により

$$\sum_{\omega' \in \Omega_{n_1}} P_{n_1}(\omega') = I_{n_1} = 1$$

となるので、(9) の和のうち $n_1 < n$ の部分の和については、(5) より

$$\sum_{n_1=1}^{n-1} p_{n_1}^{(n)} \sum_{\omega' \in \Omega_{n_1}} P_{n_1}(\omega') = \sum_{n_1=1}^{n-1} p_{n_1}^{(n)} = 1 - p_n^{(n)} \tag{10}$$

に等しくなり、$n_1 = n$ の部分は $p_n^{(n)} I_n$ に等しくなる。よって (9) は

$$I_n = 1 - p_n^{(n)} + p_n^{(n)} I_n \tag{11}$$

となって、ここから

$$(1 - p_n^{(n)}) I_n = 1 - p_n^{(n)} \tag{12}$$

となり、それにより $I_n = 1$ が示される、となりそうである。しかし (11) から (12) への変形は I_n が有限値であることが保証されている場合にのみ成立するが、今の段階では $I_n = \infty$ でないとは言えないので、この論法は使えない。すなわち、(11) は $I_n = \infty$ の場合も含め成立するが、$I_n = \infty$ の場合は移項した式 (12) は成立しない。

よって、(9) の右辺の $n_1 = n$ の部分をもう少し細かく見ることにする。(11) の右辺の I_n を元の形に戻し、さらに一つ外に出した $p_n^{(n)}$ も元に戻して、

$$I_n = 1 - p_n^{(n)} + \sum_{\omega' \in \Omega_n} P_n((n, \omega')) \tag{13}$$

とする。

さて、(13) の $n_1 = n$ に関する和の部分は、先頭から n が何個続くかで分類し、k 個続くもの全体の集合を

$$U_k^{(n)} = \{(n_1, n_2, \ldots) \mid n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n > n_{k+1}\} \subset \Omega_n \quad (k \geq 1)$$

とする。すると Ω_n の $n_1 = n$ となる事象 $\omega = (n, \omega')$ は、$U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots$ のいずれかか、

$$U_\infty^{(n)} = \{(n, n, n, \ldots)\}$$

に含まれることになる。しかし $U_\infty^{(n)}$ の事象は一つだけで、しかもその確率は 0 だから考える必要はない。

今、$U_k^{(n)}$ に属する事象の確率の和を $J_k^{(n)}$ とし、ω の n_{k+1} 以降を $\omega' = (n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots)$ と書くことにすれば、

$$J_k^{(n)} = \sum_{\omega \in U_k^{(n)}} P_n(\omega) = (p_n^{(n)})^k \sum_{n_{k+1}<n} P_n((n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots)$$

となるが、この最後の和の部分は、$n_{k+1} < n$ に対する和だから、丁度 I_n の $n_1 < n$ に対する和 (10) に等しい。よって

$$J_k^{(n)} = (p_n^{(n)})^k (1 - p_n^{(n)})$$

となる。これの $k \geq 1$ に対する和が (13) のシグマの部分に等しいので、(13) は

$$\begin{aligned} I_n &= 1 - p_n^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} J_k^{(n)} \;=\; 1 - p_n^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} (p_n^{(n)})^k (1 - p_n^{(n)}) \\ &= 1 - p_n^{(n)} + \frac{p_n^{(n)}}{1 - p_n^{(n)}} \times (1 - p_n^{(n)}) \;=\; 1 - p_n^{(n)} + p_n^{(n)} \;=\; 1 \end{aligned}$$

となって、これで帰納法により $I_n = 1$ が示されたことになり、(Ω_n, P_n) が確かに確率空間をなすことが確認できた。

4 回数の確率変数と平均値

現代流の確率論では、「確率変数」は確率空間 Ω_n 上の関数であり、今回の問題の 1 人勝ちまでのジャンケンの回数を確率変数 $X_n = X_n(\omega)$ とすると、$X_n(\omega) = X_n((n_1, n_2, \ldots))$ の値は、

- $n = 1$ のときは最初から 1 人なので $X_1(w) = X_1((1, 1, \ldots)) = 0$
- $n > 1$ のときは、$\omega = (n_1, n_2, \ldots)$ が $n_k > n_{k+1} = 1$ となる場合は $X_n(\omega) = k + 1$
- $n > 1$ で、すべての n_k が 1 より大きい場合 (ある 1 より大きい値が無限に続く場合) は $X_n(\omega) = \infty$

となる。

なお、上の $n = 1$ の場合と、$n > 1$ に対する $X_n((1,1,\ldots))$ は異なることに注意する。後者は、最初は n 人で、1 回目のジャンケンで $n_1 = 1$ になった状態だから、$X_n((1,1,\ldots)) = 1$ となる。

さて、この X_n の平均値 $M_n = E[X_n]$ を考えてみよう。$n = 1$ の場合は、$X_1 = 0$ なので、当然 $M_1 = 0$ である。

$n = 2$ の場合は、

$$M_2 = E[X_2] = \sum_{\omega\in\Omega_2} X_2(\omega)P_2(\omega) \tag{14}$$

となる。ここで、Ω_2 の事象は、2 が k 回続く ω_k と、無限に続く ω_∞ のみ:

$$\omega_k = (2,2,\ldots,2,1,1,\ldots)\ (k\geq 0),\quad \omega_\infty = (2,2,\ldots)$$

であり、その確率は

$$P_2(\omega_k) = (p_2^{(2)})^k \times p_1^{(2)} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^k \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{k+1}},\quad P_2(\omega_\infty) = 0$$

となる。$k\geq 0$ に対して $X_2(\omega_k) = k+1$ なので、(14) は、

$$\begin{aligned} M_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} X_2(\omega_k)P_2(\omega_k) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{2}{3^k}-\frac{2}{3^{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k} = 1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となって (3) に一致する。

$n = 2$ 位だと直接 M_n をこのように計算することもできるが、n が大きくなると Ω_n の事象の種類が増え、それらを直接 (14) のような式で計算するのは難しい。

5 平均値の漸化式

次は、M_n に関する漸化式を考えてみよう。

$n\geq 2$ の場合、3 節の I_n の計算と同様に $\omega=(n_1,\omega')$ のように分けて考えると、

$$M_n=E[X_n]=\sum_{\omega\in\Omega_n}X_n(\omega)P_n(\omega)=\sum_{n_1=1}^{n}\sum_{\omega'\in\Omega_{n_1}}X_n((n_1,\omega'))P_n((n_1,\omega'))$$

となるが、$n_1=1$ の場合も含めて $X_n((n_1,\omega'))=X_{n_1}(\omega')+1$ で、$P_n((n_1,\omega'))=p_{n_1}^{(n)}P_{n_1}(\omega')$ なので、

$$\begin{aligned}M_n &= \sum_{n_1=1}^{n}p_{n_1}^{(n)}\sum_{\omega'\in\Omega_{n_1}}\{X_{n_1}(\omega')P_{n_1}(\omega')+P_{n_1}(\omega')\} = \sum_{n_1=1}^{n}p_{n_1}^{(n)}(M_{n_1}+I_{n_1})\\ &= \sum_{n_1=1}^{n}p_{n_1}^{(n)}M_{n_1}+\sum_{n_1=1}^{n}p_{n_1}^{(n)} = \sum_{n_1=1}^{n}p_{n_1}^{(n)}M_{n_1}+1\end{aligned} \tag{15}$$

となる。よって、$n_1=n$ の項を左辺に移項すると、

$$(1-p_n^{(n)})M_n=\sum_{n_1=1}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}M_{n_1}+1$$

より、$n\geq 2$ に対する漸化式

$$M_n=\frac{1}{1-p_n^{(n)}}\left(\sum_{n_1=1}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}M_{n_1}+1\right)=\frac{1}{2^n-2}\left(\sum_{n_1=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n_1}M_{n_1}+3^{n-1}\right) \tag{16}$$

が得られる。なお、$M_1=0$ なので、この和は $n_1\geq 2$ に書き換えてもよい。また、(16) の導出の前に $p_n^{(n)}M_n$ を移項したが、そこで M_n が有限であることを仮定したことになる。その M_n の有限性の保証については、後で別に示すことにする。

(16) で $n=2$ とすると、

$$M_2=\frac{{}_2\mathrm{C}_1M_1+3}{4-2}=\frac{3}{2}$$

となり、(3) に一致する。

$n=3$ とすると、

$$M_3=\frac{{}_3\mathrm{C}_2M_2+3^2}{2^3-2}=\frac{M_2+3}{2}=\frac{9}{4}$$

となり (4) に一致するし、(2) と同じ漸化式が得られていることもわかる。同様に、

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \frac{{}_4\mathrm{C}_2 M_2 + {}_4\mathrm{C}_3 M_3 + 3^3}{2^4-2} = \frac{6M_2+4M_3+27}{14} = \frac{1}{14}(9+9+27) \\
&= \frac{45}{14} = 3.214, \\
M_5 &= \frac{{}_5\mathrm{C}_2 M_2 + {}_5\mathrm{C}_3 M_3 + {}_5\mathrm{C}_4 M_4 + 3^4}{2^5-2} = \frac{10M_2+10M_3+5M_4+81}{30} \\
&= \frac{1}{30}\left(15+\frac{45}{2}+\frac{225}{14}+81\right) = \frac{157}{35} = 4.486, \\
M_6 &= \frac{{}_6\mathrm{C}_2 M_2 + \cdots + {}_6\mathrm{C}_5 M_5 + 3^5}{2^6-2} = \frac{15M_2+20M_3+15M_4+6M_5+243}{62} \\
&= \frac{1}{62}\left(\frac{45}{2}+45+\frac{675}{14}+\frac{942}{35}+243\right) = \frac{13497}{2170} = 6.220, \\
M_7 &= \frac{{}_7\mathrm{C}_2 M_2 + \cdots + {}_7\mathrm{C}_6 M_6 + 3^6}{2^7-2} \\
&= \frac{21M_2+35M_3+35M_4+21M_5+7M_6+729}{126} \\
&= \frac{1}{126}\left(\frac{63}{2}+\frac{315}{4}+\frac{225}{2}+\frac{471}{5}+\frac{13497}{310}+729\right) = \frac{225161}{26040} = 8.647, \\
M_8 &= \frac{{}_8\mathrm{C}_2 M_2 + \cdots + {}_8\mathrm{C}_7 M_7 + 3^7}{2^8-2} \\
&= \frac{28M_2+56M_3+70M_4+56M_5+28M_6+8M_7+2187}{254} \\
&= \frac{1}{254}\left(42+126+225+\frac{1256}{5}+\frac{26994}{155}+\frac{225161}{3255}+2187\right) \\
&= \frac{10007591}{826770} = 12.104, \\
M_9 &= \frac{{}_9\mathrm{C}_2 M_2 + \cdots + {}_9\mathrm{C}_8 M_8 + 3^8}{2^9-2} \\
&= \frac{36M_2+84M_3+126M_4+126M_5+84M_6+36M_7+9M_8+6561}{510} \\
&= \frac{1}{510}\left(54+189+405+\frac{2826}{5}+\frac{80982}{155}+\frac{675483}{2170}+\frac{30022773}{275590}\right. \\
&\left.+6561\right) = \frac{200190574}{11712575} = 17.092, \\
M_{10} &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2 M_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_9 M_9 + 3^9}{2^{10}-2} \\
&= \frac{1}{1022}(45M_2+120M_3+210M_4+252M_5+210M_6+120M_7+45M_8 \\
&+10M_9+19683)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1022}\left(\frac{135}{2}+270+675+\frac{5652}{5}+\frac{40491}{31}+\frac{225161}{217}+\frac{30022773}{55118}\right.\\
&\left.\quad+\frac{400381148}{2342515}+19683\right) = \frac{8327737507}{342007190} = 24.350
\end{aligned}
$$

のようになる。なお、分数計算は、途中から手計算はあきらめて Maxima に手伝ってもらった。

これだと 10 人のジャンケンで 1 人の勝者を決めるには、平均 24 回のジャンケンが必要で、確かになかなか終わらないことがわかる。

6 分散

本稿では、確率空間と確率変数をちゃんと設定しているので、それに基づいて、平均だけでなく分散なども計算できる。分散 $\sigma_n^2 = V[X_n]$ は、

$$
\sigma_n^2 = V[X_n] = E[(X_n - M_n)^2] = E[X_n^2] - E[X_n]^2
$$

で計算ができるので、とりあえず 2 乗の平均 $S_n = E[X_n^2]$ を考えてみる。前節と同じように変形すると、

$$
\begin{aligned}
S_n &= E[X_n^2] = \sum_{\omega\in\Omega_n} X_n(\omega)^2 P_n(\omega) = \sum_{n_1=1}^{n}\sum_{\omega'\in\Omega_{n_1}} X_n((n_1,\omega'))^2 P_n((n_1,\omega'))\\
&= \sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} \sum_{\omega'\in\Omega_{n_1}} \{X_{n_1}(\omega')+1\}^2 P_{n_1}(\omega')\\
&= \sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} \sum_{\omega'\in\Omega_{n_1}} \{X_{n_1}(\omega')^2+2X_{n_1}(\omega')+1\} P_{n_1}(\omega')\\
&= \sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} (S_{n_1}+2M_{n_1}+I_{n_1}) \;=\; \sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} S_{n_1} + 2\sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} M_{n_1} + 1
\end{aligned}
$$

となるが、M_{n_1} に関する和の項は (15) により $2(M_n-1)$ に等しいので、

$$
S_n = \sum_{n_1=1}^{n} p_{n_1}^{(n)} S_{n_1} + 2M_n - 1
$$

となり、よって、S_n に関する漸化式

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-p_n^{(n)}}\left(\sum_{n_1=1}^{n-1} p_{n_1}^{(n)} S_{n_1} + 2M_n - 1\right) \\ &= \frac{1}{2^n-2}\left(\sum_{n_1=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_{n_1} S_{n_1} + 3^{n-1}(2M_n-1)\right) \end{aligned}$$

が成り立ち、さらに $\sigma_m^2 = S_m - M_m^2$ により、σ_n^2 に関する漸化式

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{2^n-2}\left\{\sum_{n_1=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_{n_1}(\sigma_{n_1}^2 + M_{n_1}^2) + 3^{n-1}(2M_n-1)\right\} - M_n^2$$

が得られる。例えば、

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= E[X_1]^2 - E[X_1]^2 = 0, \\ \sigma_2^2 &= \frac{1}{4-2}\{0+3(2M_2-1)\} - M_2^2 \;=\; 3 - \frac{9}{4} \;=\; \frac{3}{4}, \\ \sigma_3^2 &= \frac{1}{2^3-2}\{{}_3\mathrm{C}_2(\sigma_2^2+M_2^2) + 9(2M_3-1)\} - M_3^2 \\ &= \frac{1}{6}\left\{3\Big(\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\Big) + 9\Big(\frac{9}{2}-1\Big)\right\} - \frac{81}{16} \;=\; \frac{27}{16} \end{aligned}$$

といった具合である。

7 回数毎の確率

5 節で、X_n の平均を計算したが、実際にその平均付近の確率が高いのかどうかはそれだけではわからない。よって、本節では、各回数毎の確率、すなわち $X_n = k$ となる確率 $Q_k^{(n)}$ を考える。

$n = 1$ では $X_1 = 0$ なので、$Q_0^{(1)} = 1$ となる。よって以後は $n \geq 2$ とする。なお、$Q_k^{(n)}$ の k は、1 以上のすべての整数を取ることに注意する。

まず、$k = 1$ については、$n \geq 2$ に対して

$$Q_1^{(n)} = \mathrm{Prob}\{X_n = 1\} = P_n((1,1,\ldots)) = p_1^{(n)} = \frac{{}_n\mathrm{C}_1}{3^{n-1}} = \frac{n}{3^{n-1}} \tag{17}$$

となる。次に $k\geq 2$ に対しては、

$$Q_k^{(n)}=\mathrm{Prob}\{X_n=k\}=\sum_{n_{k-1}>1}P_n((n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},1,1,\ldots))$$

であり、これを前のように n_1 で分けて考える。$n_1>1$ に注意すると

$$Q_k^{(n)}=\sum_{n_1=2}^{n}p_{n_1}^{(n)}\sum_{n_{k-1}>1}P_{n_1}((n_2,\ldots,n_{k-1},1,1,\ldots))=\sum_{n_1=2}^{n}p_{n_1}^{(n)}Q_{k-1}^{(n_1)}$$

より、

$$Q_k^{(n)}-p_n^{(n)}Q_{k-1}^{(n)}=\sum_{n_1=2}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}Q_{k-1}^{(n_1)}\quad(n\geq 2,\ k\geq 2)\tag{18}$$

という漸化式が得られる。この漸化式は、左辺が $Q_k^{(n)}$ の k に関する 2 項漸化式になっていて、よって右辺の $2\leq n_1<n$ の $Q_k^{(n_1)}$ を表す k の式があれば、この式から $Q_k^{(n)}$ の k の式が得られる、という形になっている。

例えば、$n=2$ とすると、(18) は

$$Q_k^{(2)}-p_2^{(2)}Q_{k-1}^{(2)}=0$$

となるので、$Q_k^{(2)}$ は公比 $p_2^{(2)}=1-(4-2)/3=1/3$ の等比数列で、(17) より初項は $Q_1^{(2)}=2/3$、よって

$$Q_k^{(2)}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{2}{3^k}\tag{19}$$

となる。

$n=3$ とすると、(18) は

$$Q_k^{(3)}-p_3^{(3)}Q_{k-1}^{(3)}=p_2^{(3)}Q_{k-1}^{(2)},\quad Q_k^{(3)}-\frac{3^2-2^3+2}{3^2}p_3^{(3)}Q_{k-1}^{(3)}=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{3^2}\cdot\frac{2}{3^{k-1}}$$

より、

$$Q_k^{(3)}-\frac{1}{3}Q_{k-1}^{(3)}=\frac{2}{3^k}$$

という漸化式が得られる。両辺 3^k 倍すると、

$$3^k Q_k^{(3)} - 3^{k-1} Q_{k-1}^{(3)} = 2$$

となるので、$3^k Q_k^{(3)}$ は公差 2 の等差数列で、初項は (17) より $3Q_1^{(3)} = 3^2/3^2 = 1$、よって

$$3^k Q_k^{(3)} = 1 + 2(k-1) = 2k-1$$

より

$$Q_k^{(3)} = \frac{2k-1}{3^k} \tag{20}$$

となる。

このような作業を続けていくことができるが、結果として、大まかには次のような式になることを示すことができる。

$$Q_k^{(n)} = \sum_{j=4}^{n} \alpha_j^{(n)} (p_j^{(j)})^k + \frac{\beta^{(n)} k + \gamma^{(n)}}{3^k} \quad (n \geq 2,\ k \geq 1) \tag{21}$$

なお、右辺の最初のシグマの部分は $n < 4$ に対しては 0 とみなす。

実際、(19), (20) より $n = 2$ に対しては $\beta^{(2)} = 0, \gamma^{(2)} = 2$ で、$n = 3$ に対しては $\beta^{(3)} = 2, \gamma^{(3)} = -1$ となっている。

$n \geq 4$ に対しても (21) の形が成立することを帰納法で示そう。まず、$n = 2, 3$ では成立しているので、$2, 3, \ldots, n-1$ までは (21) が成立するとして、n の場合に成立することを示す ($n \geq 4$)。

(18) の右辺の $Q_{k-1}^{(n_1)}$ に対しては帰納法の仮定により (21) の形になるので、それらを代入すれば、

$$Q_k^{(n)} - \rho_n Q_{k-1}^{(n)} = \sum_{j=4}^{n-1} s_j \rho_j^k + \frac{tk+u}{3^k} \tag{22}$$

の形になる。ただし、右辺のシグマの部分は $n=4$ の場合には 0 と見なし、また、簡単のため $p_j^{(j)}=\rho_j$ とした。(22) の両辺を ρ_n^k で割ると

$$\frac{Q_k^{(n)}}{\rho_n^k}-\frac{Q_{k-1}^{(n)}}{\rho_n^{k-1}}=\sum_{j=4}^{n-1}s_j\left(\frac{\rho_j}{\rho_n}\right)^k+\frac{tk+u}{(3\rho_n)^k} \tag{23}$$

となる。ここで、$m\geq 2$ に対して

$$\begin{aligned}\rho_{m+1}-\rho_m &= p_m^{(m+1)}-p_{m+1}^{(m)} = \left(1-\frac{2^{m+1}-2}{3^m}\right)-\left(1-\frac{2^m-2}{3^{m-1}}\right)\\ &= \frac{-2\cdot 2^m+2+3\cdot 2^m-6}{3^m} = \frac{2^m-4}{3^m}\end{aligned}$$

なので、この差は $m=2$ のときのみ 0 であとは正となるから、$1/3=\rho_2=\rho_3<\rho_4<\rho_5<\cdots\to 1$ となる。よって、(23) の右辺の k 乗の項の底は $(1/(3\rho_n)$ も含め) いずれも 1 より小さく、(23) の式を $k=1$ から $k=m$ まで和を取れば、右辺は最後の項を除いては等比数列の和で、最後の項の和も $1/(3\rho_n)^m$ の 1 次式倍と定数との和になるから、

$$\frac{Q_m^{(n)}}{\rho_n^m}-\frac{Q_1^{(n)}}{\rho_n}=\sum_{j=4}^{n-1}s'_j\left(\frac{\rho_j}{\rho_n}\right)^m+\frac{t'm+u'}{(3\rho_n)^m}+v$$

の形となる。よって、この式を ρ_n^m 倍すれば

$$Q_m^{(n)}=\sum_{j=4}^{n-1}s'_j\rho_j^m+\frac{t'm+u'}{3^m}+v'\rho_n^m$$

が得られ、これで (21) が n に対しても成り立つことが示された。

さて、X_n の平均 $M_n=E[X_n]$ は、本節の $Q_k^{(n)}$ を用いて、

$$M_n=E[X_n]=\sum_{k=1}^{\infty}k\mathrm{Prob}\{X_n=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}kQ_k^{(n)}$$

と書くこともできる。そして、$Q_k^{(n)}$ は (21) のように k に関しては 1 より小さい公比のいくつかの等比数列、および $k/3^k$ という数列の定数倍の和の形になっている。よっ

て、その k 倍の k に関する和は、無限大にはならず有限値に収束することが容易に示される。これが、5 節の (16) の式の導出で保留した M_n の有限性の証明になる。

(21) の式の係数 $\alpha_j^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}$ を決定すれば $Q_k^{(n)}$ を式で表現できることになる。それはもちろん容易ではないが、それらに成り立つ漸化式なら作ることができる。それは、上の説明の文字の置き換えを丁寧にたどって作ることもできなくはないが、むしろ (21) を漸化式 (18) に代入して、各等比数列の係数を比較する方が楽だろう。

漸化式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{j=4}^{n}\alpha_j^{(n)}(\rho_j-\rho_n)\rho_j^{k-1}+\frac{\beta^{(n)}k+\gamma^{(n)}-3\rho_n(\beta^{(n)}(k-1)+\gamma^{(n)})}{3^k}\\
&= \sum_{j=4}^{n-1}\alpha_j^{(n)}(\rho_j-\rho_n)\rho_j^{k-1}+\frac{(1-3\rho_n)\beta^{(n)}(k-1)+\beta^{(n)}+(1-3\rho_n)\gamma^{(n)}}{3^k},\\
\text{右辺} &= \sum_{n_1=4}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}\sum_{j=4}^{n_1}\alpha_j^{(n_1)}\rho_j^{k-1}+\sum_{n_1=2}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}\frac{\beta^{(n_1)}(k-1)+\gamma^{(n_1)}}{3^{k-1}}\\
&= \sum_{j=4}^{n-1}\rho_j^{k-1}\sum_{n_1=j}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}\alpha_j^{(n_1)}+\sum_{n_1=2}^{n-1}3p_{n_1}^{(n)}\frac{\beta^{(n_1)}(k-1)+\gamma^{(n_1)}}{3^k}
\end{aligned}$$

となり、$j \geq 4$ の ρ_j、および 1/3 はいずれも異なるから、それらの k 乗は数列として線形独立になり、よって両辺の係数を比較して、

$$\alpha_j^{(n)} = \frac{1}{\rho_j-\rho_n}\sum_{n_1=j}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}\alpha_j^{(n_1)} \quad (4 \leq j \leq n-1) \tag{24}$$

$$\beta^{(n)} = \frac{3}{1-3\rho_n}\sum_{n_1=2}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}\beta^{(n_1)} \quad (n \geq 4) \tag{25}$$

$$\gamma^{(n)} = \frac{1}{1-3\rho_n}\left(3\sum_{n_1=2}^{n-1}p_{n_1}^{(n)}\gamma^{(n_1)}-\beta^{(n)}\right) \quad (n \geq 4) \tag{26}$$

が得られ、そして代入で消えてしまった $\alpha_n^{(n)}$ は、(21) の $k=1$ の式と (17) により、

$$Q_1^{(n)}=\sum_{j=4}^{n}\alpha_j^{(n)}\rho_j+\frac{\beta^{(n)}+\gamma^{(n)}}{3}=\frac{n}{3^{n-1}}$$

となるので、(24), (25), (26) によって $\alpha_j^{(n)}$ $(j<n)$, $\beta^{(n)}$, $\gamma^{(n)}$ が求まった後で

$$\alpha_n^{(n)}=\frac{n}{3^{n-1}\rho_n}-\sum_{j=4}^{n-1}\alpha_j^{(n)}\frac{\rho_j}{\rho_n}-\frac{\beta^{(n)}+\gamma^{(n)}}{3\rho_n} \tag{27}$$

によって求まることになる。

なお、$\{\beta^{(n)}\}_n$ は (25) により単独で計算できるが、$\{\gamma^{(n)}\}_n$ の (26) による計算には $\{\beta^{(n)}\}_n$ が必要で、$\{\alpha_j^{(n)}\}_{j,n}$ は、(26) は前の n に対する $\alpha_j^{(n)}$ があれば求まる形ではあるが、(27) の $\alpha_n^{(n)}$ にすべての $\alpha_j^{(n)}$ $(4\leq j\leq n-1)$ と $\beta^{(n)}$, $\gamma^{(n)}$ が必要となる。

いくつかの n $(n\geq 4)$ の計算をしてみる。ρ_n は、

$$\begin{aligned}\rho_2=\rho_3=\frac{1}{3}, &\qquad \rho_4=1-\frac{16-2}{27}=\frac{13}{27},\\ \rho_5=1-\frac{32-2}{81}=\frac{17}{27}, &\quad \rho_6=1-\frac{64-2}{243}=\frac{181}{243}\end{aligned}$$

等なので、$\beta^{(2)}=0,\beta^{(3)}=2$ より、$\beta^{(n)}$ は

$$\begin{aligned}\beta^{(4)} &= \frac{3}{1-3\rho_4}p_3^{(4)}\beta^{(3)} \;=\; -\frac{27}{4}\cdot\frac{4}{27}\cdot 2 \;=\; -2,\\ \beta^{(5)} &= \frac{3}{1-3\rho_5}(p_3^{(5)}\beta^{(3)}+p_4^{(5)}\beta^{(4)}) \;=\; -\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{81}\{{}_5\mathrm{C}_3\cdot 2+{}_5\mathrm{C}_4(-2)\}\\ &= -\frac{20-10}{24}=-\frac{5}{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{(6)} &= \frac{3}{1-3\rho_6}(p_3^{(6)}\beta^{(3)}+p_4^{(6)}\beta^{(4)}+p_5^{(6)}\beta^{(5)})\\ &= -\frac{243}{100}\cdot\frac{1}{243}\left\{{}_6\mathrm{C}_3\cdot 2+{}_6\mathrm{C}_4(-2)+{}_6\mathrm{C}_5\Bigl(-\frac{5}{12}\Bigr)\right\}\\ &= -\frac{1}{100}\Bigl(40-30-\frac{5}{2}\Bigr) \;=\; -\frac{3}{40}\end{aligned}$$

等。$\gamma^{(n)}$ は $\gamma^{(2)}=2,\gamma^{(3)}=-1$ より、

$$\begin{aligned}\gamma^{(4)} &= \frac{1}{1-3\rho_4}(3p_2^{(4)}\gamma^{(2)}+3p_3^{(4)}\gamma^{(3)}-\beta^{(4)})\\ &= -\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{9}\{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 2+{}_4\mathrm{C}_3(-1)+2\cdot 9\} \;=\; -\frac{12-4+18}{4} \;=\; -\frac{13}{2},\\ \gamma^{(5)} &= \frac{1}{1-3\rho_5}(3p_2^{(5)}\gamma^{(2)}+3p_3^{(5)}\gamma^{(3)}+3p_3^{(6)}\gamma^{(4)}-\beta^{(5)})\\ &= -\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{27}\left\{{}_5\mathrm{C}_2\cdot 2+{}_5\mathrm{C}_3(-1)+{}_5\mathrm{C}_4\Bigl(-\frac{13}{2}\Bigr)+\frac{5}{12}\cdot 27\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{24}\Big(20-10-\frac{65}{2}+\frac{45}{4}\Big) \;=\; \frac{15}{32},\\
\gamma^{(6)} &= \frac{1}{1-3\rho_6}(3p_2^{(6)}\gamma^{(2)}+\cdots+3p_5^{(6)}\gamma^{(5)}-\beta^{(6)})\\
&= -\frac{81}{100}\cdot\frac{1}{81}\left\{{}_6\mathrm{C}_2\cdot 2+{}_6\mathrm{C}_3(-1)+{}_6\mathrm{C}_4\Big(-\frac{13}{2}\Big)+{}_6\mathrm{C}_5\cdot\frac{15}{32}+\frac{3}{40}\cdot 81\right\}\\
&= -\frac{1}{100}\Big(30-20-\frac{195}{2}+\frac{45}{16}+\frac{243}{40}\Big) \;=\; \frac{6289}{8000}
\end{aligned}$$

最後に $\alpha_j^{(n)}$ を求める。$n=4$ の場合、(27) より、

$$\alpha_4^{(4)}=\frac{4}{3^3\rho_4}-\frac{\beta^{(4)}+\gamma^{(4)}}{3\rho_4}=\frac{4}{13}-\frac{9}{13}\Big(-2-\frac{13}{2}\Big)=\frac{4}{13}+\frac{9}{13}\cdot\frac{17}{2}=\frac{161}{26}$$

$n=5$ の場合は、

$$\begin{aligned}
\alpha_4^{(5)} &= \frac{1}{\rho_4-\rho_5}p_4^{(5)}\alpha_4^{(4)} \;=\; -\frac{27}{4}\cdot\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{81}\cdot\frac{161}{26} \;=\; -\frac{5\cdot 161}{3\cdot 4\cdot 26} \;=\; -\frac{805}{312},\\
\alpha_5^{(5)} &= \frac{5}{3^4\rho_5}-\alpha_4^{(5)}\frac{\rho_4}{\rho_5}-\frac{\beta^{(5)}+\gamma^{(5)}}{3\rho_5} \;=\; \frac{5}{51}+\frac{805}{312}\cdot\frac{13}{17}-\Big(-\frac{5}{12}+\frac{15}{32}\Big)\frac{9}{17}\\
&= \frac{3335}{1632}
\end{aligned}$$

$n=6$ の場合は、途中の計算を省略すると、

$$\begin{aligned}
\alpha_4^{(6)} &= \frac{p_4^{(6)}\alpha_4^{(4)}+p_5^{(6)}\alpha_4^{(5)}}{\rho_4-\rho_6} \;=\; -\frac{243}{64}\cdot\frac{1}{3^5}({}_6\mathrm{C}_4\alpha_4^{(4)}+{}_6\mathrm{C}_5\alpha_4^{(5)}) \;=\; -\frac{5^2\cdot 161}{2^8\cdot 13}\\
&= -\frac{4025}{3328},\\
\alpha_5^{(6)} &= \frac{p_5^{(6)}\alpha_5^{(5)}}{\rho_5-\rho_6} \;=\; -\frac{243}{28}\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_5}{3^5}\cdot\alpha_5^{(5)} \;=\; -\frac{5\cdot 667}{2^6\cdot 7\cdot 17} \;=\; -\frac{3335}{7616},\\
\alpha_6^{(6)} &= \frac{6}{3^5\rho_6}-\Big(\alpha_4^{(6)}\frac{\rho_4}{\rho_6}+\alpha_5^{(6)}\frac{\rho_5}{\rho_6}\Big)-\frac{\beta^{(6)}+\gamma^{(6)}}{3\rho_6} \;=\; \frac{35145723}{40544000}
\end{aligned}$$

これも、$n=6$ の $\alpha_j^{(6)}$ の計算と、それぞれの検算には Maxima を利用した。ただし、途中の計算 (私の手計算部分) が間違えている可能性はある。

最後に、$n=10$ のときの $Q_k^{(10)}$、すなわち $X_{10}=k$ となる確率を数値計算してグラフ化したものを図 1 に示す。これを見ると、M_{10} の線が 5 節で求めた平均値 (24.350) で

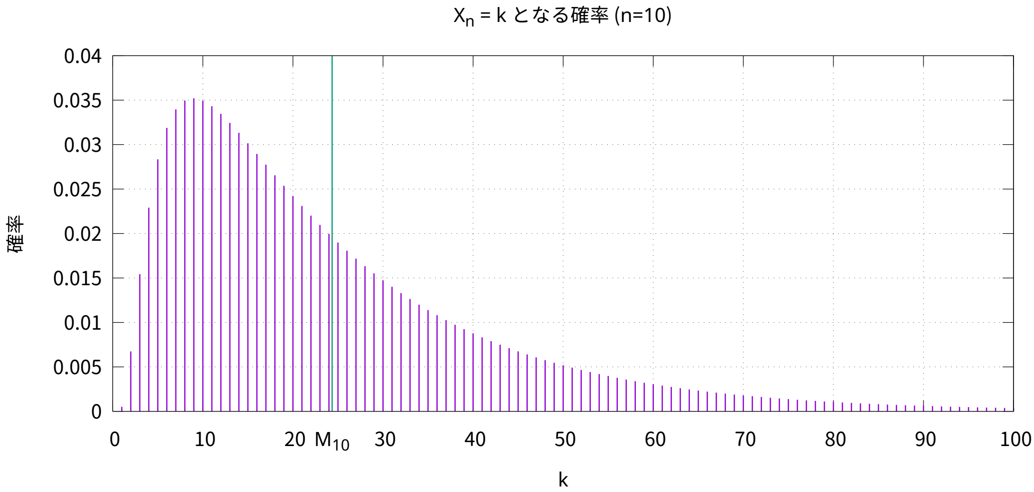

図 1: $Q_k^{(10)}$ のグラフ $(1 \le k \le 100)$

あるが、その辺りに確率値のピークがある形ではなく、実際には確率が一番大きいのは $k=9$ のとき $(Q_9^{(10)} = 0.035212)$ であることがわかる。

つまり、回数の期待値は 24.35 なのだが、最も起こりやすい回数は 9 回で、その付近の確率が一番大きくなっている、ということになる。

8 最後に

本稿では、n 人から 1 人勝ちになるまのでのジャンケンの回数について、確率モデルをちゃんと設定した上で考察し、平均値の漸化式、分散の漸化式、および各回数の確率の式とその漸化式を求め、最後に数値計算も行った。

「10 人から 1 人になるのに平均 24.350 回だが、実際にはその辺りが一番起こりやすいわけではなく、9 回位が最も起こりやすい」というのは少し紛らわしく感じるかもしれないが、確率ではよくある話である。

約 24 回と思うと確かになかなか終わらない、という気がするが、9 回というと案外そうでもない、と感じられる気がする。

なお、5 節の $M_{10} = 24.350,\ M_8 = 12.104$ から、10 人から 1 人が 24.350 回、8 人から 1 人が 12.104 回、ということになるが、ここから「10 人から 8 人以下になるには

24.350-12.104 = 12.246 回」ということが言えるだろうか、なども考えてみると面白いかもしれない。

参考文献

[1] nekorl app, 「多人数 n 人から一人の勝者を決めるじゃんけんの平均回数」
https://tma.main.jp/science/janken2.php

[2] 古城克也, 「コラム: 1人を選ぶのに何回じゃんけんしたらよいの？」
https://www.sci.niihama-nct.ac.jp/~kojo/column5.html

[3] しょとう, 「唯物是真 @Scaled_Wurm: じゃんけんが終わるまでの平均回数を求める」(2015–01–25)
https://sucrose.hatenablog.com/entry/2015/01/25/232628

[4] shochandas, 「ジャンケンの確率」
http://shochandas.xsrv.jp/probability/toss.htm

[5] shiroppu, 「じゃんけんの期待回数について」
https://mathlog.info/articles/TSzjdK7xzIWh3LcSsKY2

[6] 伊藤暁, 井上克司, 王躍, 岡崎世雄, 「ジャンケンの計算量」数理解析研究所講究録 1205 (2001) p47–52
https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1205-9.pdf