平成 19 年 4 月 28 日

勝つまでやるのは得か

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

ゲームなどで熱中すると、つい意地になって次に勝つまでやろうと決めてしまったりまたはやめにくいときに、次に負けたらやめよう、などと考えてしまうことがある。しかし、果たしてこれらは得なのだろうか。

これを次のような単純な問題で考えてみることにする:

> 何回でも行うことのできるくじがあり、そのあたりの確率は常に p $(0 < p < 1)$ であるとする。あたりがでると賞金は A 円もらえ、はずれの場合は B 円払わなければならない。このとき、次のいずれが得か。
>
> 1. あたるまでひたすらやり続け、あたったらそこでやめる。
> 2. あたるまで、または N 回になるまでやり続け、あたったらそこでやめ、N 回やったらあたってなくてもそこでやめる。
> 3. あたってもはずれても N 回やる。

もちろん、p, A, B, N によってどれが優位かは変わってくるだろうが、その様子を調べてみることにする。

なお、ここでは期待値を用いて比較することにする。

2 あたるまでひたすらやり続ける場合

今、はずれる確率を q $(= 1 - p)$ とすると、このくじを 1 回行ったときの期待値 E_0 は、

$$E_0 = pA + q(-B) = pA - qB \tag{1}$$

である。

まずは、1. の、あたるまでひたすらやり続ける場合を考える。

1 回目であたる確率は p で、そのときは A 円もらえる。1 回目ではずれて、2 回目であたる確率は $q \times p$ で、そのときは $(-B+A)$ 円もらえる。同様にして、1 回目から n 回目まではずれて、$(n+1)$ 回目であたる確率は $q^n p$, そのときは $(-nB+A)$ 円もらえる。

よって、この場合の期待値 E_1 は、

$$E_1 = pA + qp(-B+A) + \cdots + q^n p(-nB+A) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n p(A-nB) \tag{2}$$

となる。これは、容易にわかるように、$q < 1$ (すなわち $p > 0$) ならば収束する無限級数である。

今、

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} q^n (A-nB) = A + q(A-B) + q^2(A-2B) + q^3(A-3B) + \cdots \tag{3}$$

とすると $E_1 = pS_1$ であり、(3) の両辺を q 倍すると、

$$qS_1 = qA + q^2(A-B) + q^3(A-2B) + \cdots \tag{4}$$

となるので、(3) から (4) を引き算すれば、

$$(1-q)S_1 = A - qB - q^2B - q^3B - \cdots = A - \frac{qB}{1-q}$$

を得る $(0 < q < 1)$。ここで、$1-q = p$ であるから、

$$pS_1 = A - \frac{qB}{p} = \frac{pA - qB}{p} = \frac{E_0}{p}$$

となり、よって

$$E_1 = pS_1 = \frac{E_0}{p} \tag{5}$$

となる。

3 あたるか N 回までやり続ける場合

次は、2. の、あたるか N 回までやり続ける場合を考える。

この場合の期待値 E_2 は、(2) に代わり N 回目までの有限和となるが、N 回目がはずれた場合の項も追加される。よって E_2 は、

$$\begin{aligned} E_2 &= pA + qp(A-B) + q^2p(A-2B) + \cdots + q^{N-1}p\{A-(N-1)B\} \\ &\quad + q^N(-NB) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q^n p(A-nB) - Nq^N B \end{aligned} \tag{6}$$

となる。今、

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} q^n (A-nB) \\ &= A + q(A-B) + q^2(A-2B) + \cdots + q^{N-1}\{A-(N-1)B\} \end{aligned} \tag{7}$$

とすると、

$$E_2 = pS_2 - Nq^N B \tag{8}$$

であり、(7) の両辺を q 倍すると、

$$qS_2 = qA + q^2(A-B) + q^3(A-2B) + \cdots + q^N\{A-(N-1)B\} \tag{9}$$

となるので、(7), (9) の差を取れば、

$$\begin{aligned} (1-q)S_2 &= A - qB - q^2B - \cdots - q^{N-1}B - q^N\{A-(N-1)B\} \\ &= A - qB - q^2B - \cdots - q^{N-1}B - q^NB - q^NA + Nq^NB \\ &= A - qB\frac{1-q^N}{1-q} - q^NA + Nq^NB \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} pS_2 &= (1-q^N)A - (1-q^N)\frac{qB}{p} + Nq^NB \\ &= (1-q^N)\left(A - \frac{qB}{p}\right) + Nq^NB \end{aligned}$$

となるので、(8) より

$$E_2 = (1-q^N)\left(A - \frac{qB}{p}\right) = \frac{1-q^N}{p}E_0 \tag{10}$$

が得られる。

4 とりあえず N 回やる場合

次は、3. の、あたってもはずれてもとりあえず N 回までやり続ける場合を考える。

毎回のくじは独立であるから、この場合の期待値は明らかに

$$E_3 = NE_0 \tag{11}$$

であるが、ここでは別の計算方法を紹介する。

N 回のうち、k 回があたり、$(N-k)$ 回がはずれとなる組み合わせは ${}_NC_k$ 通りあり、それぞれが $p^k q^{N-k}$ の確率で起こり、そしてこのとき $\{kA-(N-k)B\}$ 円もらえるので、これを k に関して 0 から N まで加えると、

$$E_3 = \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k p^k q^{N-k}\{kA-(N-k)B\} \tag{12}$$

となる。このような和を計算するのに必要となる計算式を紹介する。

一つは二項展開定理:

$$(1+x)^N = \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k x^k \tag{13}$$

であり、もうひとつはこの (13) を x で微分して

$$N(1+x)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k k x^{k-1}$$

さらに x 倍して得られる次の式である:

$$Nx(1+x)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k k x^k \tag{14}$$

(12) を、これらが使える形に変形する。

$$\begin{aligned} E_3 &= q^N \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k \left(\frac{p}{q}\right)^k \{k(A+B) - NB\} \\ &= q^N(A+B) \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k k \left(\frac{p}{q}\right)^k - Nq^N B \sum_{k=0}^{N} {}_NC_k \left(\frac{p}{q}\right)^k \end{aligned}$$

となるので、(13), (14) より、

$$\begin{aligned} E_3 &= q^N(A+B)N\frac{p}{q}\left(1+\frac{p}{q}\right)^{N-1} - Nq^N B\left(1+\frac{p}{q}\right)^N \\ &= Np(p+q)^{N-1}(A+B) - NB(p+q)^N \end{aligned}$$

となるが、$p+q=1$ なので、

$$E_3 = Np(A+B) - NB = NpA - N(1-p)B = N(pA - qB) = NE_0$$

となり、(11) に一致する。

5 はずれるまでやる場合

ついでに、はずれるまでやる場合も計算してみる。つまり、1 回でもはずれたらそこでやめるとする。無限に続ける場合の期待値 E_4 は 2 節と同様に考えれば、

$$\begin{aligned} E_4 &= q(-B) + pq(A-B) + p^2q(2A-B) + \cdots + p^n q(nA-B) + \cdots \\ &= q\sum_{n=0}^{\infty} p^n(nA-B) = (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p^n(nA-B) \\ &= \{-B + p(A-B) + p^2(2A-B) + \cdots\} \\ &\quad - \{-pB + p^2(A-B) + p^3(2A-B) + \cdots\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -B + pA + p^2A + p^3A + \cdots = -B + \frac{pA}{1-p} = \frac{pA}{q} - B \\
&= \frac{E_0}{q}
\end{aligned}
$$

N 回でやめる場合の期待値 E_5 は、

$$
\begin{aligned}
E_5 &= q(-B) + pq(A-B) + p^2q(2A-B) + \cdots + p^{N-1}q\{(N-1)A-B\} \\
&\quad + Np^NA \\
&= (1-p)[-B + p(A-B) + \cdots + p^{N-1}\{(N-1)A-B\}] + Np^NA \\
&= [-B + p(A-B) + \cdots + p^{N-1}\{(N-1)A-B\}] \\
&\quad - [-pB + p^2(A-B) + \cdots + p^N\{(N-1)A-B\}] + Np^NA \\
&= -B + pA + p^2A + \cdots + p^{N-1}A - p^N\{(N-1)A-B\} + Np^NA \\
&= -B + pA + p^2A + \cdots + p^{N-1}A + p^NA + p^NB \\
&= -B + pA\frac{1-p^N}{1-p} + p^NB \\
&= -(1-p^N)B + \frac{pA}{q}(1-p^N) = \left(\frac{pA}{q} - B\right)(1-p^N) \\
&= \frac{1-p^N}{q}E_0
\end{aligned}
$$

となる。

6 大小の考察

以上により、$E_1 \sim E_5$ はすべて $E_0 = pA - qB$ によって、

$$
E_1 = \frac{1}{p}E_0,\ \ E_2 = \frac{1-q^N}{p}E_0,\ \ E_3 = NE_0,\ \ E_4 = \frac{1}{q}E_0,\ \ E_5 = \frac{1-p^N}{q}E_0
$$

と表されることがわかった。よって、$E_0 = 0$ の場合は $E_1 \sim E_5$ はすべて 0 となることになる。

さて、通常のくじでは、あたりの確率 p はかなり小さく ($p \ll 1$)、代わりにあたりの賞金 $(A-B)$ が参加料 B に比べて大きい ($A - B \gg B$)。そして、くじの主催者が損

をしないように $E_0 < 0$ と設定されているだろう。この条件の元で $E_1 \sim E_5$ の大小を考えてみることにする。

そのために、各 E_j の E_0 の係数を t_j とし、その t_j を比較することにする ($E_j = t_j E_0$)。

$0 < p < 1, 0 < q < 1$ より明らかに

$$t_1 = \frac{1}{p} > \frac{1-q^N}{p} = t_2, \quad t_4 = \frac{1}{q} > \frac{1-p^N}{q} = t_5$$

であり、また $p \ll 1$ より $q = 1 - p \approx 1$ であるので、

$$t_1 > t_4$$

となる。また、

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1-q^N}{p} = \frac{1-q^N}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} < N = t_3 \\ t_5 &= \frac{1-p^N}{q} = \frac{1-p^N}{1-p} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{N-1} < N = t_3 \end{aligned}$$

も言える。

次に t_2 と t_4 を比較してみる。

$$\begin{aligned} t_4 - t_2 &= \frac{1}{q} - \frac{1-q^N}{p} = \frac{p - q(1-q^N)}{pq} = \frac{1 - q - q(1-q^N)}{pq} \\ &= \frac{q^{N+1} - 2q + 1}{pq} \end{aligned}$$

となるので、

$$f_1(x) = x^{N+1} - 2x + 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

として、この $f_1(x)$ の符号を考える。

$N = 1$ ならば、$f_1(x) = (x-1)^2 \geq 0$ となる。

$N > 1$ のときは、$f_1'(x) = (N+1)x^N - 2$ より、$\alpha_N = (2/(N+1))^{1/N}$ (< 1) で $f_1'(\alpha_N) = 0$ となり、

$$x < \alpha_N \text{ ならば } f_1'(x) < 0, \quad x > \alpha_N \text{ ならば } f_1'(x) > 0$$

なので、$f_1(0) = 1$, $f_1(1) = 0$ より、$f_1(x)$ のグラフは図 1 のようになる。よって、$f_1(x)$

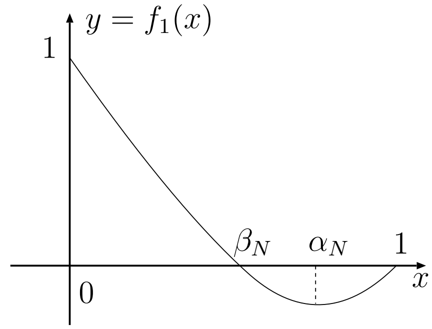

図 1: $f_1(x)$ のグラフ

は零点 β_N で符号が分かれ、

$$0 < x < \beta_N \text{ ならば } f_1(x) > 0, \quad \beta_N < x < 1 \text{ ならば } f_1(x) < 0$$

となる。

次に、この $f_1(x)$ の零点である β_N の大きさについて考えてみる。

$$f_1(\beta_N) = \beta_N^{N+1} - 2\beta_N + 1 = 0$$

より、

$$\beta_N^{N+1} = 2\beta_N - 1 > 0$$

なので、まず $\beta_N > 1/2$ であることがわかる。

$$(N+1)\log\beta_N = \log(2\beta_N - 1)$$

より、

$$N+1=\frac{\log(2\beta_N-1)}{\log\beta_N}$$

となるので、次に関数

$$f_2(x)=\frac{\log(2x-1)}{\log x}\qquad\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$$

を調べてみる。ロピタルの定理より、

$$\lim_{x\to 1}f_2(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(\log(2x-1))'}{(\log x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2}{2x-1}}{\dfrac{1}{x}}=2$$

であり、

$$\lim_{x\to 1/2+0}f_2(x)=\frac{1}{-\log 2}\lim_{x\to 1/2+0}\log(2x-1)=+\infty$$

となっている。導関数は、

$$f_2'(x)=\frac{\dfrac{2}{2x-1}\log x-\dfrac{1}{x}\log(2x-1)}{(\log x)^2}=\frac{2x\log x-(2x-1)\log(2x-1)}{x(2x-1)(\log x)^2}$$

となるが、この分母は $x>1/2$ で正なので、分子を $f_3(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 2(x\log x)'-\{(2x-1)\log(2x-1)\}' \\ &= 2(\log x+1)-\{2\log(2x-1)+2\}=2\log x-2\log(2x-1)>0 \\ & \quad (x<1 \text{ より } x>2x-1) \end{aligned}$$

であり、$f_3(1)=0$ なので、$1/2<x<1$ で $f_3(x)<0$ となる。

よって、$1/2<x<1$ で $f_2'(x)<0$ であり、$f_2(x)$ のグラフは図 2 のようになる。

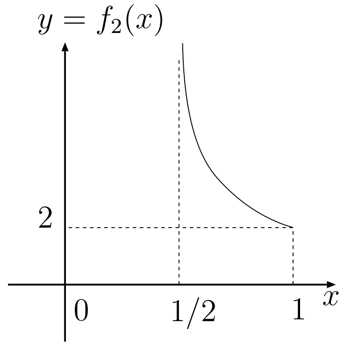

図 2: $f_2(x)$ のグラフ

$N+1 = f_2(\beta_N)$ であるから、よって β_N は N に関して単調に減少し、

$$\lim_{N\to\infty} \beta_N = \frac{1}{2}$$

となること、そして $\{\beta_N\}_{N>1}$ で一番大きいのは β_2 であることもわかる。次に、この β_2 を求めてみる。

$$\beta_2^3 - 2\beta_2 + 1 = 0, \quad (\beta_2 - 1)(\beta_2^2 + \beta_2 - 1) = 0, \quad \beta_2 = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

なので、$1/2 < \beta_2 < 1$ より

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

となる。よって $q > \beta_2 \approx 0.618$ であれば、すべての $N > 1$ に対して $q > \beta_N$ となるので $f_1(q) < 0$ であり、$t_4 < t_2$ となる。

結局、$N > 1$ のときは、$q > \beta_2$ であれば、

$$t_1 > t_2 > t_4 > t_5, \quad t_3 > t_2$$

となる。ここで、$t_1 = 1/p$ と $t_3 = N$ は独立な値なので、N を変えることでその大小は変わりうる。

また、$N = 1$ のときは、$t_2 = t_3 = t_5 = 1$ なので、

$$t_1 > t_4 > t_2 = t_3 = t_5 (= 1)$$

となる。

結局、今回の仮定の元 ($p \ll 1$, $E_0 < 0$) では、

- $N = 1$ のとき、

$$E_1 < E_4 < E_2 = E_3 = E_5 (= E_0) < 0$$

- $N > 1$ のとき、

$$E_1 < E_2 < E_4 < E_5 < 0, \quad E_3 < E_2$$

であることになり、これらの中で一番損をしないのは E_5、すなわち「はずれるまでやり、N 回でやめる」であることがわかる。そして、$E_5 = E_0(1 - p^N)/q$ は N に関して単調減少であるから、$N = 1$ のときが最も大きい、すなわち 1 回だけやってやめる ($E_5 = E_2 = E_3 = E_0$) のが最も損をしない、ということになる。

7 最後に

正確には、$N \geq 0$ で考えれば、最も損をしないのは $N = 0$ なので、つまり、賭け事はしないに越したことはない、ということになる。