2020 年 12 月 24 日

$\sin^n x/x^m$ の広義積分 その 2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で、整数の n, m に対する広義積分

$$I_{n,m} = \int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m}\,dx \quad (m \geq 1,\ n \geq 1) \tag{1}$$

の収束性とその値について考察した。そしてその最後に、m を実数にした場合もいずれ考えると書いたが、今回はそれ、すなわち、

$$I_{n,p} = \int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^p}\,dx \quad (n \text{ は整数、} p \text{ は実数、} n \geq 1, p > 0) \tag{2}$$

の収束性とその値について考える。

2 広義積分

まずはその収束性に関して考える。

[1] では、(1) は $n \geq m \geq 2$, または $m = 1$ かつ n が奇数のときに収束し、それ以外は発散することを示したが、(2) の p が実数の場合は、まず $x \to +0$ では $\sin^n x/x^p = O(x^{n-p})$ なので、$x = 0$ の近くでリーマン広義積分が収束するためには、

$$n - p > -1 \tag{3}$$

が必要十分となる。また、$x \to \infty$ では、$p > 1$ ならば (2) は絶対可積分 (ルベーグ可積分) であるからリーマン広義積分としても収束し、$p = 1$ では n が奇数のときのみリーマン広義積分は収束していたが、$0 < p < 1$ のときはさらに積分可能性 (収束性) が落ちることが予想されるが、実は $0 < p < 1$ でもやはり n が奇数であればリーマン広義積分可能であることが言える。その元になるのは次の補題である。

補題 1

$0 < q < 1$ に対し、広義積分

$$J_q = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x^q}\,dx$$

は収束し、その値は

$$J_q = \Gamma(1-q)e^{i\pi(1-q)/2} \tag{4}$$

となる。ここで、$\Gamma(x)$ はガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x > 0)$$

を意味する。

この補題は、

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^q}\,dx \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^q}\,dx \quad (0 < q < 1) \tag{5}$$

の両方の収束性を保証することになるが、[1] で見たように $q = 1$ のときは

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

は収束したものの

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx \tag{6}$$

は収束しなかったが、それは (6) が $x = 0$ の近くで収束しなかったからであり、$0 < q < 1$ では (5) の前者は $x = 0$ の近くでも積分が収束するためにその有限性の可能性もあることに注意する。

証明

複素積分を利用する。

$\mathrm{Arg}(z)$ を $(-\pi, \pi]$ での偏角の主値 $(-\pi < \mathrm{Arg}(z) \le \pi)$ とし、$\mathrm{Log}\, z$ をそれに対する複素対数 $\log z$ の主値

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

とすれば、$\mathrm{Log}\, z$ は複素数平面から実軸の負の部分を除いた領域で一価でかつ正則で、これに対し、z^{-q} もその主値を取って、

$$z^{-q} = e^{-q\,\mathrm{Log}\, z} = e^{-q\log|z| - iq\,\mathrm{Arg}(z)} \tag{7}$$

とすれば、これも同じ領域で 1 価の正則関数となる。

今、$0 < \varepsilon < R$ に対し、図 1 のように領域 D とその境界である積分路 $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ を取る。

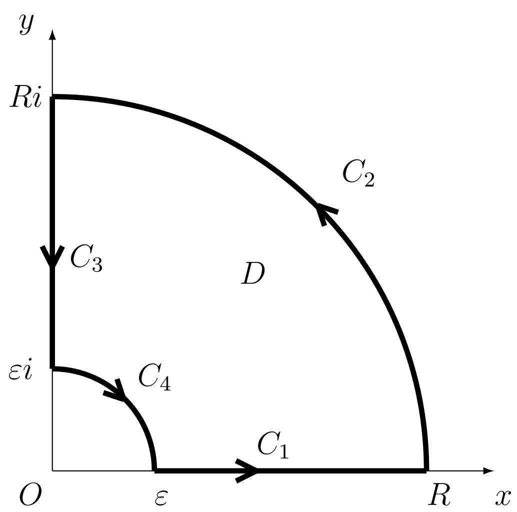

図 1: 領域 D と積分路

$f(z) = z^{-q}e^{iz}$ とすると、$f(z)$ は D の内部で正則なので、コーシーの積分定理により、

$$0 = \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz \tag{8}$$

となる。C_1 上の積分は、

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R x^{-q}e^{ix}dx \tag{9}$$

となり、これは $\varepsilon \to +0,\ R \to \infty$ のときに J_q になる。

C_3 上の積分は、$-C_3$ (C_3 の逆向き) が $z = iy$ ($\varepsilon \le y \le R$) で表されるので、

$$\int_{C_3} f(z)dz = -\int_{\varepsilon}^{R} (iy)^{-q} e^{-y} i dy$$

となるが、(7) より、

$$(iy)^{-q} = e^{-q\log y - iq\pi/2} = y^{-q} e^{-iq\pi/2}$$

となるから、

$$\int_{C_3} f(z)dz = -e^{-iq\pi/2}\, i \int_{\varepsilon}^{R} y^{-q} e^{-y} dy$$

となるので、これは $0 < q < 1$ であれば $\varepsilon \to +0,\ R \to \infty$ に対して収束し、

$$\int_{C_3} f(z)dz \to -e^{-iq\pi/2}\, i \int_0^{\infty} y^{-q} e^{-y} dy = -e^{i(1-q)\pi/2} \Gamma(1-q) \tag{10}$$

となることがわかる。

C_4 では、$-C_4$ を $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ とすると、$dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$ より

$$\int_{C_4} f(z)dz = -\int_0^{\pi/2} (\varepsilon e^{i\theta})^{-q} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \tag{11}$$

となるが、(7) より、

$$|(\varepsilon e^{i\theta})^{-q}| = e^{-q\log|\varepsilon e^{i\theta}|} = \varepsilon^{-q}, \quad |e^{i\varepsilon e^{i\theta}}| = e^{-\varepsilon\sin\theta}$$

なので、(11) より、

$$\left|\int_{C_4} f(z)dz\right| \le \varepsilon^{1-q} \int_0^{\pi/2} e^{-\varepsilon\sin\theta} d\theta \le \frac{\pi}{2}\varepsilon^{1-q} \tag{12}$$

となる。よって、$0 < q < 1$ より $\varepsilon \to +0$ のときに

$$\int_{C_4} f(z)dz \to 0 \tag{13}$$

となることがわかる。

最後に C_2 では $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ とすれば、

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^{\pi/2} (Re^{i\theta})^{-q} e^{iRe^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta$$

となるので、(12) と同様にして

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \leq \int_0^{\pi/2} R^{1-q} e^{-R\sin\theta} d\theta \tag{14}$$

となる。この右辺が

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} R^{1-q} e^{-R\sin\theta} d\theta = 0 \tag{15}$$

となることが言えれば、(8), (9), (10), (13), (14) から J_q が収束して、(4) が成り立つことがわかる。よってあとは (15) を示せばよい。

$$R^{1-q}e^{-R\sin\theta}d\theta = (R\sin\theta)^{1-q}e^{-R\sin\theta}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1-q}\theta^{q-1}$$

と分け、

$$h_1(t) = t^{1-q}e^{-t} \quad (t > 0), \quad h_2(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta} \quad (0 < \theta \leq \pi/2)$$

とすると、$0 < \theta \leq \pi/2$ に対し、

$$R^{1-q}e^{-R\sin\theta}d\theta = h_1(R\sin\theta)h_2(\theta)^{1-q}\theta^{q-1}$$

と書ける。ここで、$h_1(t)$ は、

$$h_1'(t) = t^{-q}(1-q-t)e^{-t}$$

より $0 < t < 1-q$ で $h_1'(t) > 0$, $t > 1-q$ で $h_1'(t) < 0$, $h_1(+0) = h_1(\infty) = 0$ なので $t > 0$ の最大値は $t = 1-q$ で取り、よって、

$$0 < h_1(t) \leq h_1(1-q) < \infty \quad (t > 0)$$

となる。一方、$h_2(\theta)$ は

$$h_2'(\theta) = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\tan\theta - \theta}{\sin^2\theta}\cos\theta > 0 \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

で、$h_2(+0) = 1, h_2(\pi/2) = \pi/2$ より、

$$1 < h_2(\theta) \leq \pi/2 \quad (0 < \theta \leq \pi/2)$$

となるので、結局

$$R^{1-q}e^{-R\sin\theta}d\theta \leq h_1(1-q)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-q}\theta^{q-1} \quad (0 < \theta \leq \pi/2)$$

となり、この右辺は R には無関係で、その積分は

$$\int_0^{\pi/2}\theta^{q-1}d\theta = \frac{1}{q}\left(\frac{\pi}{2}\right)^q < \infty$$

により収束する。各 $0 < \theta \leq \pi/2$ に対し、

$$\lim_{R\to\infty} R^{1-q}e^{-R\sin\theta}d\theta = 0$$

であるから、よってルベーグ収束定理により (15) が成立する。■

3 部分積分

$p > 1$ に対する $I_{n,p}$ は、[1] の p が整数の場合と同様、部分積分によって $0 < p < 1$ の場合に帰着する。まずはその公式を見ておく。

p は非整数であるとし、$[p] = m \geq 0$ ([ ] はガウス記号)、$\delta = p - m$ $(0 < \delta < 1)$ とすると、

$$\begin{aligned} (x^{-\delta})^{(m)} &= -\delta(-\delta-1)\cdots(-\delta-m+1)x^{-\delta-m} \\ &= (-1)^m(p-1)(p-2)\cdots(p-m)x^{-p} \end{aligned}$$

であり、定数の積の部分は、

$$(p-1)(p-2)\cdots(p-m) = \binom{p-1}{m}m! \tag{16}$$

と書くこともできるが、ここではガンマ関数で表しておく。ガンマ関数 $\Gamma(x)$ では、

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (x>1)$$

が成り立つので、(16) は、

$$(p-1)(p-2)\cdots(p-m) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-m)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(\delta)}$$

と書くことができる。これにより、

$$x^{-p} = (-1)^m \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)} (x^{-\delta})^{(m)}$$

となるので、m 回部分積分の公式

$$\int f^{(m)} g dx = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} f^{(m-k)} g^{(k-1)} + (-1)^m \int f g^{(m)} dx$$

より、

$$\begin{aligned}\int x^{-p} \sin^n x dx &= (-1)^m \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} (x^{-\delta})^{(m-k)} (\sin^n x)^{(k-1)} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)} \int x^{-\delta} (\sin^n x)^{(m)} dx \end{aligned} \tag{17}$$

となるが、$x \to +0$ では

$$(x^{-\delta})^{(m-k)} (\sin^n x)^{(k-1)} = O(x^{-\delta-m+k+n-k+1}) = O(x^{n-m+1-\delta}) = O(x^{n-p+1})$$

なので、条件 (3) より、(17) の和の部分は $x \to +0$ でも $x \to \infty$ でも 0 に収束する。よって、

$$I_{n,p} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{(\sin^n x)^{(m)}}{x^\delta} dx \tag{18}$$

となり、左辺と右辺の収束性も一致することがわかる。なお、これは、$m=0$、すなわち $0<p<1$ のときにも成立する。

4 サインの巾乗の微分

(18) の被積分関数の分子の $(\sin^n x)^{(m)}$ は、[1] で見たように、以下のような形になる。

- $n+m$ が奇数の場合は $\sin jx$ の線形結合で表される (n と j の偶・奇は一致する)
- $n+m$ が偶数の場合は $\cos jx$ と 1 の線形結合で表される (n と j の偶・奇は一致する) が、$m \geq 1$ ならば 1 の線形結合は含まれない

補題 1 により、$a > 0$ に対して、

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^\delta}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{(ax)^\delta}\,d(ax)\frac{a^\delta}{a} = a^{\delta-1}\Gamma(1-\delta)\sin\frac{\pi(1-\delta)}{2}, \tag{19}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^\delta}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(ax)^\delta}\,d(ax)\frac{a^\delta}{a} = a^{\delta-1}\Gamma(1-\delta)\cos\frac{\pi(1-\delta)}{2} \tag{20}$$

となるので、(18), (19), (20) と上を組み合わせれば、$n+m$ が奇数の場合は $I_{n,p}$ は収束し、(19) でその値も計算でき、$n+m$ が偶数の場合は $m \geq 1$ ならば収束して (20) で計算できるが、$m = 0$ の場合、すなわち $0 < p < 1$ で n が偶数の場合は、

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\delta} = \infty$$

により $I_{n,p}$ は発散することがわかる。これで $I_{n,p}$ の収束性もわかったことになる。すなわち、$p(>0)$ が非整数の場合、(3) の元、$p > 1$ ($m = [p] \geq 1$) のときは $I_{n,p}$ は収束、$0 < p < 1$ ($m = 0$) のときは、n が奇数ならば収束するが、偶数ならば発散する。

あとは、[1] と同様に $I_{n,p}$ の値を計算する式を作ることにする。[1] の計算により、以下がわかる ($\nu = [(n+1)/2]$, $\mu = [(m+1)/2]$、詳細は [1] を参照)。

- n, m がいずれも奇数の場合は、

$$\begin{aligned}(\sin^n x)^{(m)} &= (\sin^{2\nu-1} x)^{(2\mu-1)}\\ &= \frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j-1)^m\cos(2j-1)x\end{aligned} \tag{21}$$

- n, m がいずれも偶数で $m \geq 2$ の場合は、

$$\begin{aligned}(\sin^n x)^{(m)} &= (\sin^{2\nu} x)^{(2\mu)} \\ &= \frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ \nu - j \end{pmatrix} (2j)^m \cos 2jx \end{aligned} \tag{22}$$

- n が奇数、m が偶数の場合は、

$$\begin{aligned}(\sin^n x)^{(m)} &= (\sin^{2\nu-1} x)^{(2\mu)} \\ &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ \nu - j \end{pmatrix} (2j-1)^m \sin(2j-1)x \end{aligned} \tag{23}$$

- n が偶数、m が奇数の場合は、

$$\begin{aligned}(\sin^n x)^{(m)} &= (\sin^{2\nu} x)^{(2\mu-1)} \\ &= \frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ \nu - j \end{pmatrix} (2j)^m \sin 2jx \end{aligned} \tag{24}$$

これを使うと、例えば n, m がともに奇数の場合は、(18), (20), (21) より、

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)} \frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ \nu - j \end{pmatrix} (2j-1)^m (2j-1)^{\delta-1} \\ &\quad \times \Gamma(1-\delta) \cos \frac{\pi}{2}(1-\delta) \\ &= \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(p)} \cos \frac{\pi}{2}(1-\delta) \frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ \nu - j \end{pmatrix} (2j-1)^{p-1} \end{aligned}$$

となるが、ガンマ関数に対する有名な公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1) \tag{25}$$

と、$\cos \pi(1-\delta)/2 = \sin(\pi\delta/2)$ を用いると、

$$\Gamma(\delta)\Gamma(1-\delta) \cos \frac{\pi}{2}(1-\delta) = \frac{\pi}{\sin \pi\delta} \sin \frac{\pi\delta}{2} = \frac{\pi}{2\cos(\pi\delta/2)}$$

となる。よって、

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^\mu \pi}{\Gamma(p)\cos(\pi\delta/2)} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ \nu - j \end{pmatrix} (2j-1)^{p-1} \tag{26}$$

となる。ここで、$\nu = (n+1)/2 = [(n+1)/2]$ であり、$m = [p]$ $(m < p < m+1)$ は奇数なので、

$$\mu = \frac{m+1}{2} < \frac{p+1}{2} < \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}$$

より $\mu = [(p+1)/2]$ と書ける。

また、すべての自然数 n と実数 q に対して $\gamma_n(q)$ を、$\nu = [(n+1)/2]$ として

$$\gamma_n(q) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}\alpha_{n,j}^q, \quad \alpha_{n,j} = \begin{cases} 2j & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 2j-1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定義すると、(26) は、

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^\mu\pi}{\mathit{\Gamma}(p)\cos(\pi\delta/2)}\gamma_n(p-1)$$

と書くこともできる。さらに、今の場合 $m = 2\mu - 1$ なので、

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi\delta}{2} &= \cos\frac{\pi(p-m)}{2} = \cos\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi m}{2} + \sin\frac{\pi p}{2}\sin\frac{\pi m}{2} \\ &= \sin\frac{\pi p}{2}\sin\left(\pi\mu - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\mu-1}\sin\frac{\pi p}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$I_{n,p} = -\frac{\pi}{\mathit{\Gamma}(p)}\gamma_n(p-1)\,\mathrm{cosec}\,\frac{\pi p}{2} \tag{27}$$

と、ν, μ, δ, m を用いない形に表すこともできる。

以下、他の場合も同様に変形を行う。$n = 2\nu$, $m = 2\mu$ の場合は、(18), (20), (22) より、

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{\mathit{\Gamma}(\delta)}{\mathit{\Gamma}(p)}\frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j)^m(2j)^{\delta-1}\mathit{\Gamma}(1-\delta)\cos\frac{\pi}{2}(1-\delta) \\ &= \frac{\mathit{\Gamma}(\delta)\mathit{\Gamma}(1-\delta)}{\mathit{\Gamma}(p)}\cos\frac{\pi}{2}(1-\delta)\frac{(-1)^\mu}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j)^{p-1} \\ &= \frac{(-1)^\pi\mu}{\mathit{\Gamma}(p)\cos(\pi\delta/2)}\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j)^{p-1} \\ &= \frac{(-1)^\pi\mu}{\mathit{\Gamma}(p)\cos(\pi\delta/2)}\gamma_n(p-1) \qquad (\nu = n/2 = [(n+1)/2]) \end{aligned}$$

となるが、$m=2\mu$ より、

$$\cos\frac{\pi\delta}{2}=\cos\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi m}{2}+\sin\frac{\pi p}{2}\sin\frac{\pi m}{2}=\cos\frac{\pi p}{2}\cos\pi\mu=(-1)^{\mu}\cos\frac{\pi p}{2}$$

なので、

$$I_{n,p}=\frac{\pi}{\Gamma(p)}\gamma_n(p-1)\sec\frac{\pi p}{2} \tag{28}$$

となる。

$n=2\nu-1,\ m=2\mu$ の場合は、(18), (19), (23) より、

$$\begin{aligned}
I_{n,p} &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)}\frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j-1)^m(2j-1)^{\delta-1} \\
&\quad \times\Gamma(1-\delta)\sin\frac{\pi}{2}(1-\delta) \\
&= \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(p)}\sin\frac{\pi}{2}(1-\delta)\frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j-1)^{p-1} \\
&= \frac{(-1)^{\mu-1}\pi}{\Gamma(p)\sin(\pi\delta/2)}\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j-1)^{p-1} \\
&= \frac{(-1)^{\mu-1}\pi}{\Gamma(p)\sin(\pi\delta/2)}\gamma_n(p-1) \qquad (\nu=(n+1)/2=[(n+1)/2])
\end{aligned}$$

となるが、$m=2\mu$ より、

$$\sin\frac{\pi\delta}{2}=\sin\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi m}{2}-\cos\frac{\pi p}{2}\sin\frac{\pi m}{2}=\sin\frac{\pi p}{2}\cos\pi\mu=(-1)^{\mu}\sin\frac{\pi p}{2}$$

なので、

$$I_{n,p}=-\frac{\pi}{\Gamma(p)}\gamma_n(p-1)\operatorname{cosec}\frac{\pi p}{2} \tag{29}$$

となる。

最後に $n=2\nu,\ m=2\mu-1$ の場合は、(18), (19), (24) より、

$$I_{n,p} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(p)}\frac{(-1)^{\mu}}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j)^m(2j)^{\delta-1}\Gamma(1-\delta)\sin\frac{\pi}{2}(1-\delta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathit{\Gamma}(\delta)\mathit{\Gamma}(1-\delta)}{\mathit{\Gamma}(p)}\sin\frac{\pi}{2}(1-\delta)\,\frac{(-1)^{\mu}}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\begin{pmatrix} n \\ \nu-j\end{pmatrix}(2j)^{p-1} \\
&= \frac{(-1)^{\pi}\mu}{\mathit{\Gamma}(p)\sin(\pi\delta/2)}\,\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\begin{pmatrix} n \\ \nu-j\end{pmatrix}(2j)^{p-1} \\
&= \frac{(-1)^{\pi}\mu}{\mathit{\Gamma}(p)\sin(\pi\delta/2)}\gamma_n(p-1) \qquad (\nu = n/2 = [(n+1)/2])
\end{aligned}
$$

となるが、$m = 2\mu - 1$ より、

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi\delta}{2} &= \sin\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi m}{2} - \cos\frac{\pi p}{2}\sin\frac{\pi m}{2} = -\cos\frac{\pi p}{2}\sin\left(\pi\mu - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= (-1)^{\mu}\cos\frac{\pi p}{2}
\end{aligned}
$$

なので、

$$
I_{n,p} = \frac{\pi}{\mathit{\Gamma}(p)}\gamma_n(p-1)\sec\frac{\pi p}{2} \tag{30}
$$

となる。結局、(27), (28), (29), (30) より、

$$
I_{n,p} = \frac{\pi}{\mathit{\Gamma}(p)}\gamma_n(p-1) \times \begin{cases} \sec\dfrac{\pi p}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -\operatorname{cosec}\dfrac{\pi p}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \tag{31}
$$

となり、$m = [p]$ の偶・奇に関わらない形に書けることになる。

5 整数への極限

最後に、$p \to m - 0$ への極限について考察しておく。

最終的な形 (31) には、ガンマ関数は含まれるものの、あとは π と三角関数と有理数と整数の $p-1$ 乗だけなので、[1] の $p = m$ の場合の対数が現れる式とはかなり違うように見える。実際に $p \to m - 0$ としたときに、$I_{n,p}$ の極限が [1] で得られたものになるのかどうかをここで見ておく。

まず、(31) には $\sec(\pi p/2)$ や $\operatorname{cosec}(\pi p/2)$ が含まれているので、m の偶・奇によって極限の特異性がそこに現れる。すなわち、m が奇数なら $\cos(\pi m/2) = 0$ だから n が偶数であれば sec の部分が発散し、m が偶数なら、$\sin(\pi m/2) = 0$ だから n が奇数であれば cosec の部分が発散する。逆に特異性が現れないのは、

$n+m$ が偶数のときということになる。$\mu = [(m+1)/2]$ とすると、m が奇数の場合は、

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi m}{2} = \operatorname{cosec}\left(\pi\mu - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\mu-1}$$

m が偶数の場合は、

$$\sec\frac{\pi m}{2} = \sec\pi\mu = (-1)^{\mu}$$

なので、$n+m$ が偶数 $(m \geq 1)$ の場合はいずれも (31) より、

$$\lim_{p\to m-0} I_{n,p} = \frac{(-1)^{\pi}\mu}{\Gamma(m)}\gamma_n(m-1) = \frac{(-1)^{\pi}\mu}{(m-1)!}\gamma_n(m-1)$$

となり、[1] の (19), (23) の $I_{n,m}$ の式に一致することがわかる。

問題は、$n+m$ が奇数の場合であるが、この場合は、[1] の (26), (32) により $\gamma_n(m-1)=0$ であることがわかる。それにより $I_{n,p}$ の sec, cosec の特異性が解消されることになる。n が奇数で m が偶数 $(m \geq 2)$ の場合は、(31)、およびロピタルの定理により、

$$\begin{aligned} \lim_{p\to m-0} I_{n,p} &= -\frac{\pi}{\Gamma(m)}\lim_{p\to m-0}\frac{\gamma_n(p-1)}{\sin(\pi p/2)} = -\frac{\pi}{(m-1)!}\frac{\gamma_n'(m-1)}{\cos(\pi m/2)}\frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{\mu+1}}{(m-1)!}\gamma_n'(m-1) \end{aligned} \tag{32}$$

となる。ここで、$\gamma_n'(m-1)$ は、

$$\begin{aligned} \gamma_n'(m-1) &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}\{(2j-1)^{p-1}\}'\Big|_{p=m} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j-1)^{m-1}\log(2j-1) \end{aligned} \tag{33}$$

となるので、(32), (33) から [1] の (34) の $I_{n,m}$ の式が得られることがわかる。すなわちこの log は、$(2j-1)^{p-1}$ の p に関する導関数の計算からでてくることになるし、π が消える理由も分母の $\sin(\pi p/2)$ の微分によることがわかる。

同様に、n が偶数で m が奇数の場合も、(31)、およびロピタルの定理により、

$$\begin{aligned} \lim_{p\to m-0} I_{n,p} &= \frac{\pi}{\Gamma(m)}\lim_{p\to m-0}\frac{\gamma_n(p-1)}{\cos(\pi p/2)} = -\frac{\pi}{(m-1)!}\frac{\gamma_n'(m-1)}{\sin(\pi m/2)}\frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{\mu}}{(m-1)!}\gamma_n'(m-1) \end{aligned} \tag{34}$$

となり、$\gamma_n'(m-1)$ は、

$$\begin{aligned}
\gamma_n'(m-1) &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\begin{pmatrix} n \\ \nu-j \end{pmatrix}\{(2j)^{p-1}\}'\Bigg|_{p=m} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\begin{pmatrix} n \\ \nu-j \end{pmatrix}(2j)^{m-1}\log(2j) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\begin{pmatrix} n \\ \nu-j \end{pmatrix}(2j)^{m-1}\log j \qquad (35)
\end{aligned}$$

となるので、(34), (35) から [1] の (29) の式が得られる。

6 最後に

本稿では、[1] の分母を実数乗に拡張したものを取り上げたが、公式集の [4] の §2.5.3 にはそれが書かれている。本稿の理解には、複素関数論の知識が多少必要となるが、具体的な広義積分の計算ではそういう場合が多い。本稿がそのような計算例の一つとして、参考になればと思う。

なお、$I_{n,p}$ の最終形 (31) は、p が整数の場合よりも実数の場合の方がむしろシンプルな形になったが、そういったことは数学ではそれほど珍しいことではなく、p が整数の場合には丁度特異性が現れ実数の場合よりも特殊な形になっているわけである。そのような場合には、整数の場合だけを考えるよりも実数に一般化した方がむしろ見通しが良くなる。

また、本稿で紹介したガンマ関数に関する公式 (25) (相補公式、相反公式などとも呼ばれる) も、補題 1 と同様の複素積分で証明ができるが、その前に広義 2 重積分や変数変換なども必要とするので少し大掛かりである。ただ、この相補公式の証明も色々あるようで、例えば、[2], [3] には、第 IV 章 §15 定理 15.5 のガンマ関数の 1/2 公式などを用いる方法、第 IX 章 §9 例 4 の複素積分による方法、例 9 のメリン変換の計算を行う方法、§10 定理 10.8 の無限積展開を利用する方法などの証明が紹介されている。[5] にも第 5 章 §5.12 例 5 の複素積分と §5.20 に証明が紹介されているし、ネット上にもいくつか証明が紹介されているようである。左辺を $x^{p-1}/(1+x)$ の広義積分に帰着させ、$z^{p-1}/(1+z)$ の複素積分を使う方法がシンプルであるが、z^{p-1} の分岐に注意する必要がある。これも合わせて調べてみると勉強になると思う。

参考文献

[1] 竹野茂治、「$\sin^n x/x^m$ の広義積分」(2020)
https://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html

[2] 杉浦光夫、「解析入門 I」、東京大学出版会 (1980)

[3] 杉浦光夫、「解析入門 II」、東京大学出版会 (1985)

[4] 大槻義彦監修、室谷義昭訳、「新数学公式集 I 初等関数」、丸善 (1991)

[5] 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論 (増訂版)」、岩波書店 (1983)