2020 年 12 月 17 日

$\sin^n x/x^m$ の広義積分

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

何かの折に、インターネット上に

$$J_n = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \tag{1}$$

の計算がいくつか紹介されていることに気がついた ([1],[2],[3],[4],[5] 等)。これは広義積分で、特に $n = 1$ のものは、ルベーグ積分では積分できないが、リーマン広義積分が存在する例として有名なもので、ディリクレ積分とも呼ばれ、その値は $\pi/2$ になることが知られている。

$\sin x/x$ は、信号処理分野などでよく用いられるものらしく、sinc 関数などという名前でも呼ばれている。そのためか、意外に多くのサイトで (1) の計算が紹介されているのに少し驚いた。

本稿では、それを少し拡張した広義積分

$$I_{n,m} = \int_0^\infty \frac{\sin^n x}{x^m} dx \tag{2}$$

について考察する。この値に関する一般的な公式は [6] にも紹介されているが、ここでは、ディリクレ積分値と部分積分、三角関数の公式などを用いて (2) を計算する過程を紹介する。

2 広義積分

(2) の $I_{n,m}$ は、2 つの意味で広義積分となっていて、ひとつは $x \to +0$ に関してであり、もうひとつは $x \to \infty$ に関してである。

n, m が整数の場合、$\sin^n x/x^m$ の $x \to +0$ のオーダーは $O(x^{n-m})$ であるから、$x = 0$ の近くでリーマン広義積分の意味で積分できるためには、$n \geq m$ が必要かつ十分である。

一方、$x \to \infty$ の方は、$m \geq 2$ であれば

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$$

よりリーマン広義積分の意味で積分可能となるが、$m = 1$ のときは少し面倒である。

$m = 1$ の場合、$n = 1$ のときは前に述べたようにリーマン広義積分が存在して、$I_{1,1} = \pi/2$ となることが知られているが、その証明は易しくはない。例えば、[7] IV 章 §11 の章末問題にあるリーマン・ルベーグの定理を使う方法、[7] IV 章 §14 の例 3 の 2 変数関数の微分と積分の順序交換を利用する方法、[8] IX 章 §2 の例 5 の複素積分の留数の定理を利用する方法などがある。

さらに、$m = 1$ で n が奇数の場合も $I_{n,1}$ のリーマン広義積分は有限値となるが、$m = 1$ で n が偶数の場合はリーマン広義積分は無限大に発散する。ここでは、

$$I_{2n,1} = \infty \tag{3}$$

を先に示しておく。

整数 k に対して、$\pi/4 + k\pi \leq x \leq 3\pi/4 + k\pi$ では $|\sin x| \geq 1/\sqrt{2}$ なので、

$$\begin{aligned} I_{2n,1} &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/4+k\pi}^{3\pi/4+k\pi} \frac{\sin^{2n} x}{x} dx \geq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/4+k\pi}^{3\pi/4+k\pi} \frac{dx}{x} \\ &\geq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/4+k\pi}^{3\pi/4+k\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+\pi/2}\right) dx = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{\pi/4}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty \end{aligned}$$

となる。なお、(3) は他にも部分積分で示すこともできる。

結局、広義積分 $I_{n,m}$ が有限値となるのは、

- $n \geq m \geq 2$ のとき
- n が奇数で $m = 1$ のとき

であることになるが、後者が有限であることは、後で実際に計算で示す。

3 計算の方針

この節では、$I_{n,m}$ の計算の方針について考える。

$I_{n,m}$ は部分積分により、$m=1$ の場合に帰着する方向で計算することができる。

部分積分を繰り返すと一般に、

$$\int f^{(n)}gdx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(n-k)}g^{(k-1)}+(-1)^n\int fg^{(n)}dx \tag{4}$$

となるが、

$$\frac{1}{x^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(x^{-1})^{(m-1)}$$

なので、(4) より、

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^n x}{x^m}\,dx &= \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}(x^{-1})^{(m-1-k)}(\sin^n x)^{(k-1)}\\ &\quad+\frac{1}{(m-1)!}\int\frac{(\sin^n x)^{(m-1)}}{x}\,dx\end{aligned} \tag{5}$$

となるが、

$$(x^{-1})^{(m-1-k)}=(-1)^{m-1-k}\frac{(m-1-k)!}{x^{m-k}}$$

であり、$(\sin^n x)^{(k-1)}$ は $x\to+0$ でのオーダーは $O(x^{n-k+1})$ なので、

$$(x^{-1})^{(m-1-k)}(\sin^n x)^{(k-1)}=O(x^{n+1-m})$$

となるから、$n\geq m$ であれば、(5) の和の部分は $x\to+0$ と $x\to\infty$ の両方で 0 になる。よって、$n\geq m\geq 2$ に対して

$$I_{n,m}=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty\frac{(\sin^n x)^{(m-1)}}{x}\,dx \tag{6}$$

が成り立つことになる。$n\geq m\geq 2$ では $I_{n,m}$ の収束性は保証されていたので、その場合は (6) の右辺も収束することになる。なお、(6) 自体は $m=1$ でも成立するが、$m=1$ で n が奇数の場合の有限性はまだ保証はされない。

この (6) の右辺であるが、被積分関数の分子は $\sin jx$, $\cos jx$ などで表すことができ、それによってこの積分をディリクレ積分などに帰着させることができる。おおまかにはこのような方針で $I_{n,m}$ が計算できることになる。

$\sin^n x$ の導関数を $\sin jx, \cos jx$ などに変形するのは、微分を計算したあとで変形する方法と、先に $\sin^n x$ を変形してから微分する方法があるが、もちろん後者の方が易しい。例えば、$(\sin^5 x)''$ の場合、先に微分すると、

$$(\sin^5 x)'' = (5\sin^4 x\cos x)' = 20\sin^3 x\cos^2 x - 5\sin^5 x = 20\sin^3 x - 25\sin^5 x$$

となるが、3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ より、

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

であり、$\sin^5 x$ は、積・和の公式を用いれば、

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &= \sin^3 x\sin^2 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\frac{1-\cos 2x}{2} \\
&= \frac{1}{8}(3\sin x - \sin 3x) + \frac{1}{8}(\sin 3x\cos 2x - 3\sin x\cos 2x) \\
&= \frac{1}{8}(3\sin x - \sin 3x) + \frac{1}{16}(\sin 5x + \sin x) - \frac{3}{16}(\sin 3x - \sin x) \\
&= \frac{1}{16}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x) \qquad (7)
\end{aligned}$$

が得られ、よって

$$\begin{aligned}
(\sin^5 x)'' &= 5(3\sin x - \sin 3x) - \frac{25}{16}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x) \\
&= \frac{1}{16}(-10\sin x + 45\sin 3x - 25\sin 5x) \qquad (8)
\end{aligned}$$

となる。

一方、$\sin^5 x$ を先に (7) の形にしておけば、

$$\begin{aligned}
(\sin^5 x)'' &= \frac{1}{16}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x)'' \\
&= \frac{1}{16}(-10\sin x + 45\sin 3x - 25\sin 5x)
\end{aligned}$$

を得るのは易しく、(7) の変形自体も複素数を利用すれば上よりも易しく、そして容易に一般化できる。

そして、$a > 0$ に対し、

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{ax}\,d(ax) = I_{1,1} = \frac{\pi}{2} \qquad (9)$$

なので、$I_{5,3}$ は (6), (8), (9) より

$$\begin{aligned}
I_{5,3} &= \frac{1}{2!}\int_0^\infty \frac{(\sin^5 x)''}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{32}\left(-10\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + 45\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{x}\,dx - 25\int_0^\infty \frac{\sin 5x}{x}\,dx\right) \\
&= \frac{-10+45-25}{32}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}
\end{aligned}$$

と得られる。

4 $\cos jx$ が現れる場合

(6) の被積分関数の分子の $(\sin^n x)^{(m-1)}$ が $\sin jx$ で表せる場合は、前節の $I_{5,3}$ と同様にディリクレ積分に帰着して値が求まるが、$\cos jx$ が現れる場合はそうはいかない。

一般に $\sin^n x$ は、n が奇数であれば $\sin jx$ の線形結合で、n が偶数であれば $\cos jx$ と 1 の線形結合で表わされる。よって、$I_{n,1}$ で n が奇数の場合は (9) によりディリクレ積分に帰着し、よってそれが有限値となることがわかるし、また、$m \geq 2$ の場合 $(\sin^n x)^{(m-1)}$ は、

- n が奇数、m が奇数であれば $\sin jx$ の線形結合
- n が奇数、m が偶数であれば $\cos jx$ の線形結合
- n が偶数、m が奇数であれば $\cos jx$ の線形結合
- n が偶数、m が偶数であれば $\sin jx$ の線形結合

で表されることになる。よって、$n+m$ が偶数の場合はディリクレ積分に帰着し、$n+m$ が奇数の場合は $\cos jx$ が残ることになる。

ここで、

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

は、$x=0$ の近くで積分は収束せず、また $x \to +0$ で有界となるように

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$$

としても、

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = -\int_0^\infty \frac{2\sin^2(x/2)}{x}\,dx = -2\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = -2I_{2,1} = -\infty$$

となってやはり収束しない。つまり、分子に $\cos jx$ が残る場合の積分には注意が必要である。

補題 1

1. $a>0,\ b>0$ に対し、

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \log\frac{b}{a} = \log b - \log a \tag{10}$$

2. $a_j > 0\ (j=1,2,3,\ldots n),\ \sum_{j=1}^n p_j = 0$ に対し、

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\sum_{j=1}^n p_j \cos a_j x\right)dx = -\sum_{j=1}^n p_j \log a_j \tag{11}$$

証明

1. $M>0$ に対して

$$I_M = \int_0^M \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$$

とし、これを $x=0$ で特異性を持たないように変形すると

$$\begin{aligned} I_M &= \int_0^M \frac{1-\cos bx}{x}\,dx - \int_0^M \frac{1-\cos ax}{x}\,dx \\ &= \int_0^{bM} \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int_0^{aM} \frac{1-\cos x}{x}\,dx \ = \int_{aM}^{bM} \frac{1-\cos x}{x}\,dx \end{aligned}$$

となって正の範囲での積分となり、さらに

$$\begin{aligned} I_M &= \int_a^b \frac{1-\cos Mx}{x}\,dx \ = \int_a^b \frac{dx}{x} - \int_a^b \left(\frac{\sin Mx}{M}\right)' \frac{1}{x}\,dx \\ &= \log\frac{b}{a} - \left[\frac{\sin Mx}{Mx}\right]_a^b - \frac{1}{M}\int_a^b \frac{\sin Mx}{x^2}\,dx \end{aligned}$$

となるが、この後ろの 2 項はいずれも $M \to \infty$ で $O(1/M)$ なので、$I_M \to \log(b/a)$ となる。

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j = 0$ より $p_n = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} p_j$ なので、

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \cos a_j x = \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cos a_j x - \left(\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right) \cos a_n x = \sum_{j=1}^{n-1} p_j (\cos a_j x - \cos a_n x)$$

となるから、1. により、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cos a_j x\right) dx &= \sum_{j=1}^{n-1} p_j \int_0^\infty \frac{\cos a_j x - \cos a_n x}{x}\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p_j (\log a_n - \log a_j) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} p_j\right) \log a_n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j \log a_j \\
&= -p_n \log a_n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j \log a_j = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log a_j
\end{aligned}$$

が得られる。■

この補題により、$\cos jx$ が残る場合は、その係数の和が 0 であれば計算できることになる。

以上により、$I_{n,m}$ は、$n+m$ が偶数の場合は $\pi/2$ の有理数倍、$n+m$ が奇数の場合は $\log j$ の有理数倍の和の形となることが期待される。

5 三角関数の巾乗と微分に関する補題

本節では、$\sin^n x$ を $\sin jx, \cos jx$ で表す公式、およびその微分に関する公式を紹介する。

補題 2

$n \geq 1$ に対し、

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{n-j} \cos 2jx \tag{12}$$

$$\sin^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{2n-1}{n-j} \sin(2j-1)x \tag{13}$$

証明

いずれも複素数と二項定理から得られる。

$$\begin{aligned}
\sin^{2n} x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2n} = \frac{1}{(2i)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i(2n-k)x} (-1)^k e^{-ikx} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)x} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k + (-1)^n \binom{2n}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} A_k \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (A_{n-j} + A_{n+j}) \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{n-j} (e^{2ijx} + e^{-2ijx}) \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n}{n-j} \cos 2jx
\end{aligned}$$

により (12) が得られる。

$$\begin{aligned}
\sin^{2n-1} x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2n-1} = \frac{1}{(2i)^{2n-1}} \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} e^{i(2n-1-k)x} (-1)^k e^{-ikx} \\
&= \frac{(-1)^n i}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} e^{i(2n-1-2k)x} \\
&= \frac{(-1)^n i}{2^{2n-1}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k + \sum_{k=n}^{2n-1} B_k \right) = \frac{(-1)^n i}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^{n} (B_{n-j} + B_{n+j-1}) \\
&= \frac{i}{2^{2n-1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n-1}{n-j} (e^{i(2j-1)x} - e^{-i(2j-1)x}) \\
&= \frac{-1}{2^{2n-2}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{2n-1}{n-j} \sin(2j-1)x
\end{aligned}$$

により (13) が得られる。■

次の補題は明らか。

補題 3

$n \geq 1$ に対し、

$$(\sin ax)^{(2n)} = (-1)^n a^{2n} \sin ax, \quad (\sin ax)^{(2n-1)} = (-1)^{n-1} a^{2n-1} \cos ax \tag{14}$$
$$(\cos ax)^{(2n)} = (-1)^n a^{2n} \cos ax, \quad (\cos ax)^{(2n-1)} = (-1)^n a^{2n-1} \sin ax \tag{15}$$

6 偶奇の場合分けによる計算

本節で、$I_{n,m}$ の一般式を n, m の偶奇による場合分けにより計算する。

6.1 n,m がともに奇数の場合

まずは、n,m がともに奇数の場合を考える。$n = 2\nu - 1,\ m = 2\mu - 1$ とすると、(5) より、

$$I_{2\nu-1,2\mu-1} = \frac{1}{(2\mu-2)!} \int_0^\infty \frac{(\sin^{2\nu-1} x)^{(2\mu-2)}}{x}\, dx \quad (\nu \geq \mu \geq 1) \tag{16}$$

となる。なお、これは $\mu = 1$ に対しても成り立つことに注意する。補題 2, 3 より、

$$\begin{aligned}(\sin^{2\nu-1} x)^{(2\mu-2)} &= \left\{ \frac{1}{2^{2\nu-2}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{j-1} \binom{2\nu-1}{\nu-j} \sin(2j-1)x \right\}^{(2\mu-2)} \\ &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{2\nu-2}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{j-1} \binom{2\nu-1}{\nu-j} (2j-1)^{2\mu-2} \sin(2j-1)x \end{aligned} \tag{17}$$

となる。よって、(9), (16) より、

$$I_{2\nu-1,2\mu-1} = \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu-2)!\, 2^{2\nu-2}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^{j} \binom{2\nu-1}{\nu-j} (2j-1)^{2\mu-2}\, \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

が得られる。なお、これは $\nu \geq \mu \geq 1$ に対して成り立つので、$m = 1$ で n が奇数の場合もこれに含まれる。元の n, m で表すと (18) は、

$$
\begin{aligned}
I_{n,m} &= \frac{(-1)^{\mu}}{(m-1)!\,2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \binom{n}{\nu - j} (2j-1)^{m-1} \frac{\pi}{2} \\
&\quad (\mu = (m+1)/2,\ \nu = (n+1)/2)
\end{aligned} \tag{19}
$$

となる。

6.2 n,m がともに偶数の場合

次に、n,m がともに偶数の場合を考える。$n = 2\nu$, $m = 2\mu$ とすると、(5) より、

$$
I_{2\nu,2\mu} = \frac{1}{(2\mu-1)!} \int_0^{\infty} \frac{(\sin^{2\nu} x)^{(2\mu-1)}}{x} dx \quad (\nu \geq \mu \geq 1) \tag{20}
$$

となる。補題 2, 3 より、

$$
\begin{aligned}
(\sin^{2\nu} x)^{(2\mu-1)} &= \left\{ \frac{1}{2^{2\nu-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \binom{2\nu}{\nu - j} \cos 2jx \right\}^{(2\mu-1)} \\
&= \frac{(-1)^{\mu}}{2^{2\nu-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \binom{2\nu}{\nu - j} (2j)^{2\mu-1} \sin 2jx
\end{aligned} \tag{21}
$$

となる。よって、(9), (20) より、

$$
I_{2\nu,2\mu} = \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu-1)!\,2^{2\nu-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \binom{2\nu}{\nu - j} (2j)^{2\mu-1} \frac{\pi}{2} \tag{22}
$$

が得られる。元の n, m で表すと、

$$
\begin{aligned}
I_{n,m} &= \frac{(-1)^{\mu}}{(m-1)!\,2^{n-1}} \sum_{j=1}^{\nu} (-1)^j \binom{n}{\nu - j} (2j)^{m-1} \frac{\pi}{2} \\
&\quad (\mu = m/2,\ \nu = n/2)
\end{aligned} \tag{23}
$$

となる。

6.3 n が偶数、m が奇数の場合

次は、n が偶数で、m が奇数の場合を考える。$n=2\nu$, $m=2\mu-1$ とすると、$2\nu\geq 2\mu-1$ より $\nu\geq\mu$ であり、$\mu=1$ のときは (3) より無限大となるから、ここでは $\nu\geq\mu\geq 2$ であるとする。

(5) より、

$$I_{2\nu,2\mu-1}=\frac{1}{(2\mu-2)!}\int_0^\infty\frac{(\sin^{2\nu}x)^{(2\mu-2)}}{x}\,dx\quad(\nu\geq\mu\geq 2)\tag{24}$$

であり、補題 2, 3 より、

$$\begin{aligned}(\sin^{2\nu}x)^{(2\mu-2)} &= \left\{\frac{1}{2^{2\nu-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{2\nu}{\nu-j}\cos 2jx\right\}^{(2\mu-2)}\\ &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{2\nu-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{2\nu}{\nu-j}(2j)^{2\mu-2}\cos 2jx\end{aligned}\tag{25}$$

となる。ここで、$x\to+0$ に対し、

$$(\sin^{2\nu}x)^{(2\mu-2)}=O(x^{2\nu-2\mu+2})$$

なので、$\nu\geq\mu$ より (25) で $x=0$ とすると、

$$0=\frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{2\nu-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{2\nu}{\nu-j}(2j)^{2\mu-2}\tag{26}$$

となることがわかる。すなわち、(25) の $\cos 2jx$ の係数の和が 0 となるので、補題 1 と (24), (25) より

$$\begin{aligned}I_{2\nu,2\mu-1} &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{(2\mu-2)!}\frac{1}{2^{2\nu-1}}\int_0^\infty\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{2\nu}{\nu-j}(2j)^{2\mu-2}\frac{\cos 2jx}{x}\,dx\\ &= \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu-2)!\,2^{2\nu-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{2\nu}{\nu-j}(2j)^{2\mu-2}\log(2j)\end{aligned}\tag{27}$$

が得られる。さらに、(26) により、最後の $\log(2j)$ の部分は、

$$I_{2\nu,2\mu-1}=\frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu-2)!\,2^{2\nu-1}}\sum_{j=2}^{\nu}(-1)^j\binom{2\nu}{\nu-j}(2j)^{2\mu-2}\log j\tag{28}$$

とすることもできる ($j=1$ の項は $\log 1=0$ により消える)。元の n, m で表すと、

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^{\mu}}{(m-1)!\,2^{n-1}}\sum_{j=2}^{\nu}(-1)^{j}\binom{n}{\nu-j}(2j)^{m-1}\log j \qquad (29)$$
$$(\mu=(m+1)/2,\ \nu=n/2)$$

となる。

6.4 n が奇数、m が偶数の場合

最後に、n が奇数で、m が偶数の場合を考える。$n=2\nu-1$, $m=2\mu$ とすると、$2\nu-1\geq 2\mu$ より $\nu-1\geq\mu\geq 1$ となる。

(5) より、

$$I_{2\nu-1,2\mu} = \frac{1}{(2\mu-1)!}\int_0^{\infty}\frac{(\sin^{2\nu-1}x)^{(2\mu-1)}}{x}\,dx \quad (\nu-1\geq\mu\geq 1) \qquad (30)$$

であり、補題 2, 3 より、

$$\begin{aligned}(\sin^{2\nu-1}x)^{(2\mu-1)} &= \left\{\frac{1}{2^{2\nu-2}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{j-1}\binom{2\nu-1}{\nu-j}\sin(2j-1)x\right\}^{(2\mu-1)} \\ &= \frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{2\nu-2}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{j-1}\binom{2\nu-1}{\nu-j}(2j-1)^{2\mu-1}\cos(2j-1)x \qquad (31)\end{aligned}$$

となるが、$x\to +0$ で

$$(\sin^{2\nu-1}x)^{(2\mu-1)} = O(x^{2\nu-2\mu})$$

なので、$\nu-1\geq\mu$ より (31) で $x=0$ とすると、

$$0 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{2\nu-2}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{j-1}\binom{2\nu-1}{\nu-j}(2j-1)^{2\mu-1} \qquad (32)$$

となり、(31) の $\cos(2j-1)x$ の係数の和が 0 となる。よって補題 1 と (30), (31) より

$$I_{2\nu-1,2\mu} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(2\mu-1)!\,2^{2\nu-2}}\sum_{j=2}^{\nu}(-1)^{j}\binom{2\nu-1}{\nu-j}(2j-1)^{2\mu-1}\log(2j-1) \qquad (33)$$

となる ($j=1$ は $\log 1 = 0$ により消える)。元の n, m で表すと、(33) は、

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(m-1)!\,2^{n-1}}\sum_{j=2}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(2j-1)^{m-1}\log(2j-1) \quad (\mu=m/2,\ \nu=(n+1)/2) \tag{34}$$

となる。

以上の 4 つの式 (19), (23), (29), (34) には共通部分もあるので、以下のようにまとめることもできる。

$$I_{n,m} = \frac{(-1)^{\mu}}{(m-1)!\,2^{n-1}}\sum_{j=1}^{\nu}(-1)^j\binom{n}{\nu-j}(\alpha_{n,j})^{m-1}\beta_{n,m,j} \tag{35}$$

ここで、μ, ν は $\mu=[(m+1)/2], \nu=[(n+1)/2]$ ([ ] はガウス記号)、$\alpha_{n,j}, \beta_{n,m,j}$ は以下の通り。

$$\alpha_{n,j} = \begin{cases} 2j & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 2j-1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$$\beta_{n,m,j} = \begin{cases} \pi/2 & (n+m \text{ が偶数のとき}) \\ \log j & (n \text{ が偶数}, m \text{ が奇数のとき}) \\ -\log(2j-1) & (n \text{ が奇数}, m \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

6.5 例

小さな n, m に対する $I_{n,m}$ の値をいくつか紹介しておく。

$n \diagdown m$	1	2	3	4	5	6	7
1	$\pi/2$	×	×	×	×	×	×
2	∞	$\pi/2$	∞	∞	∞	∞	∞
3	$\pi/4$	$(3\log 3)/4$	$3\pi/8$	×	×	×	×
4	∞	$\pi/4$	$\log 2$	$\pi/3$	∞	∞	∞
5	$3\pi/16$	$I_{5,2}$	$5\pi/32$	$I_{5,4}$	$115\pi/384$	×	×
6	∞	$3\pi/16$	$I_{6,3}$	$\pi/8$	$I_{6,5}$	$11\pi/40$	∞
7	$5\pi/32$	$I_{7,2}$	$7\pi/64$	$I_{7,4}$	$77\pi/768$	$I_{7,6}$	$5887\pi/23040$

$n+m$ が奇数の項は、複数の対数が出てくるために長い式になる。その上に記載されてない値は以下の通りである。

$$I_{5,2} = \frac{5}{16}(3\log 3 - \log 5), \quad I_{5,4} = \frac{5}{96}(25\log 5 - 27\log 3),$$

$$
\begin{aligned}
I_{6,3} &= \frac{3}{16}(8\log 2 - 3\log 3), \quad I_{6,5} = \frac{1}{16}(27\log 3 - 32\log 2),\\
I_{7,2} &= \frac{7}{2^6}(9\log 3 - 5\log 5 + \log 7),\\
I_{7,4} &= \frac{7}{3!\cdot 2^6}(-3^4\log 3 + 5^3\log 5 - 7^2\log 7),\\
I_{7,6} &= \frac{7}{5!\cdot 2^6}(3^6\log 3 - 5^5\log 5 + 7^4\log 7)
\end{aligned}
$$

なお、$I_{7,2\mu}$ が比較的綺麗な形になっているように見えるが、これは

$$\binom{7}{2} = 21 = 7\cdot 3$$

である $n=7$ の場合だけにたまたま起こることで、より大きい n に対してはこのような形にはならない。

7 最後に

本稿では、sinc 関数の n 乗の広義積分をまねて、それを一般化したものを紹介したが、比較的簡単そうに見える式でもあるし、広義積分の初等的な計算例としてそれなりに意味はあるのではないかと思う。$n+m$ が偶数か奇数かで最後の形が大きく変わる点も、興味を持ってもらえるかもしれない。

なお、この手の広義積分の値は、公式集を見ればだいたい載っていると思う。[6] も紹介したが、他にも手近なところでは、[9] の §2.5.3 には (2) の m 乗を、一般の α 乗にしたものが書かれているし、[10] の §56 には $I_{2n+1,1}$, $I_{n,n}$ の値、および m を α にしたもの $(n=1)$ が書かれている。

気が向いたら、m を α にしたものも本稿の続きとして書いてみようと思う。

参考文献

[1] 「Sinc 関数の広義積分について」(日曜数学者 Kuma)
`https://www.slideshare.net/kuma20xx/sinc-56872766`

[2] 「シンク関数の数学的諸性質」
`http://ikuro-kotaro.sakura.ne.jp/koramu/sinc.htm`

[3] 「sinc 関数の 2 乗の積分」
`https://github-nakasho.github.io/website/math/sinc2.html`

[4] 「sinc 関数の 2,3,4 乗の $[0, \infty)$ の広義積分を部分積分を使って計算する。」(panda 大学学習帳)
`https://pandanote.info/?p=4400`

[5] 「sinc 関数の n 乗広義積分」(野村数学研究所)
`https://www.nomuramath.com/d6vmjrm9/`

[6] "Sinc Function" (Wolfram Math World)
`https://mathworld.wolfram.com/SincFunction.html`

[7] 杉浦光夫、「解析入門 I」、東京大学出版会 (1980)

[8] 杉浦光夫、「解析入門 II」、東京大学出版会 (1985)

[9] 大槻義彦監修、室谷義昭訳、「新数学公式集 I 初等関数」、丸善 (1991)

[10] 森口、宇田川、一松「岩波 数学公式 I 微分積分・平面曲線」、岩波書店 (1987)