2017 年 12 月 13 日

# 三角関数のグラフの下の面積について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 1 はじめに

以前、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ となることを、極限ではなく図を用いて示す方法を紹介した ([1])。一方、$0\leq x\leq\pi$ の範囲で、$y=\sin x$ のグラフと $x$ 軸が囲む部分の面積 $A$ は、

$$A=\int_0^\pi \sin x dx=[-\cos x]_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=2$$

のように簡単な値である 2 になることが定積分によりわかるが、これも易しく説明することはできないか、と考えてみた。

この面積は曲線で囲まれるため、円の面積の場合と同様、ある程度は区分求積法の考え方、すなわち細かく分けたものの和の極限のような見方は必要になるが、とりあえずある程度易しい説明を見つけることができたので、ここにまとめておく。

## 2 三角関数のグラフ

[1] では、1 辺が $2\pi$ の正方形を丸めて円柱にしたときの、元の正方形の対角線の射影が $y=\sin x$ のグラフとなることを利用したが、今回はまた別な形の $y=\sin x$ のグラフを利用する。

まず、底面が半径 1 の円で、高さ 1 の円柱を考え、その底面を $xy$ 平面に置き、中心を原点に合わせる。なお、曲面の実体としてはその側面 $S$ だけあればよい (図 1)。

$S$ は $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ 0\leq z\leq 1\}$ と表される。

次に、この側面 $S$ を、原点を通り $xy$ 平面と $45^\circ$ の角をなす平面 $H=\{(x,y,z):\ y=z\}$ で切り、その切り口の曲線を $C$, $S$ の $C$ より下の部分を $S_1$ とする (図 2)。

$$\begin{aligned} C &= H\cap S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ y=z,\ 0\leq z\leq 1\},\\ S_1 &= \{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ 0\leq z\leq y\}\end{aligned}\tag{1}$$

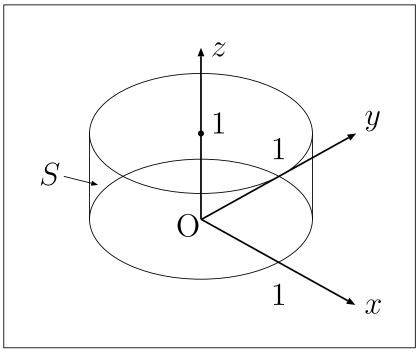


図 1: 円柱 $S$

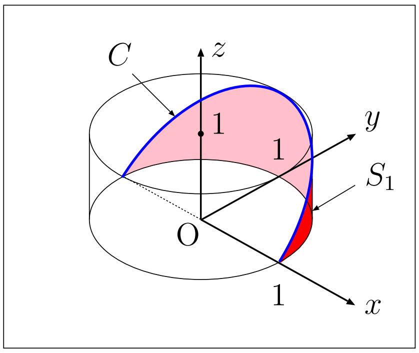


図 2: $C$ と $S_1$

$C$ は、(1) よりわかるように、$y$ 軸の負の方向から見れば $x^2+z^2=1$ の円の上半分になる (図 3)。

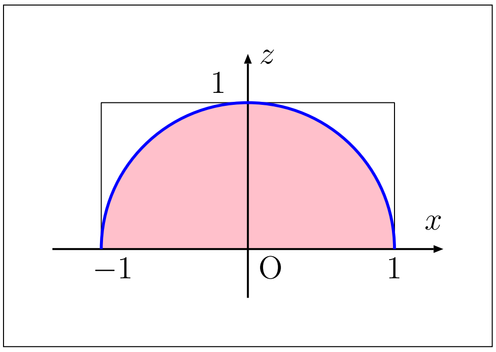


図 3: $S_1$ の $xz$ 平面への射影

さて、$H$ によって切り取られた下の部分である $S_1$ を平らな面に展開すると、$C$ の切り口の部分は $\sin x$ のグラフの形になることを示す (図 4)。

元の円柱を真上から見たとき、切り口 $C$ 上の点 P は、単位円周上にあるが、その中心角を $\theta$ とすると、P の座標 $(x,\ y,\ z)$ は、$y=z$ より

$$(x,y,z)=(\cos\theta,\sin\theta,\sin\theta)$$

となる。一方、$S_1$ を展開したときの端からの横座標 $x'$ は、元の円柱底面の円の弧長、すなわち $\theta$ であり、よって展開した図での P に対応する切り口の点 P' の座標 $(x',\ y')$ は

$$(x',y')=(\theta,\sin\theta)$$

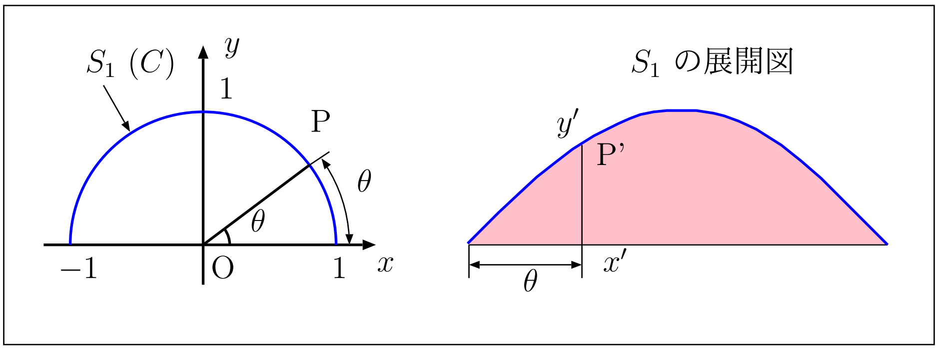


図 4: 円柱を上から見た図と $S_1$ の展開図

となり、よって $y' = \sin x'$ $(0 \leq x' \leq \pi)$ となる。ここから、$S_1$ の展開図の切り口は sin のグラフになることがわかり、そして $A$ はこの $S_1$ の面積に等しいことがわかる。

# 3 面積の射影

次は、$S_1$ の面積を、元の円柱の状態で考える。

この $S_1$ を $y$ 軸の負の方向から見れば、前に述べたように半円になっている (図 3) が、その半円の面積と $S_1$ の面積 (図 2) は当然異なる。

それは、$x = 0$ 付近は $S_1$ を正面から見ているから、その辺りの面積は半円と $S_1$ ではほぼ変わらないが、$x = 0$ から離れると $S_1$ の斜めの面を $xz$ 平面に投影して見ていることになるため、面積はだいぶ小さくなるからである。その元の $S_1$ の面と投影面でどれくらい面積が違うかを考えてみる。

今、$\Delta x$ $(> 0)$ を非常に小さい値として、$xz$ 平面の投影面上での $p \leq x \leq p + \Delta x$ の $\Delta x$ 幅の円の一部分 $\Delta S_2$ と、それに対する投影前の円柱側面 $S_1$ での面積 $\Delta S_1$ を考える (図 5)。

投影面での $x = p$ の円周上の点を $\mathrm{Q}(p, q)$ $(z = q)$ とし、その中心角を $\phi$ とすれば、

$$p = \cos\phi, \quad q = \sin\phi$$

であり、よってこの投影面での面積 $\Delta S_2$ は

$$\Delta S_2 \risingdotseq q\Delta x = (\sin\phi)\Delta x$$

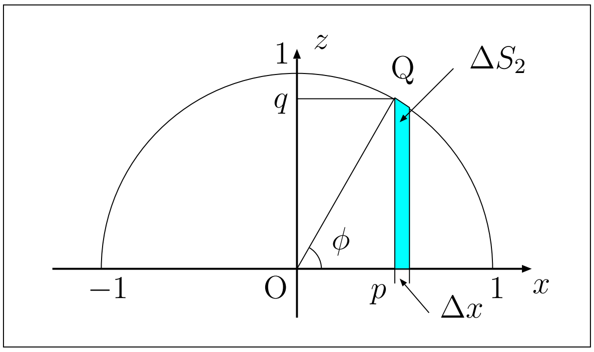


図 5: $xz$ 投影面での $\Delta S_2$

となる。一方、円柱を真上から見ると、その Q に対応する $C$ 上の点 P の座標は、P$(p,q,q)$ となり、P の真上から見た $xy$ 平面での中心角も $\phi$ に等しいことがわかる (図 6)。

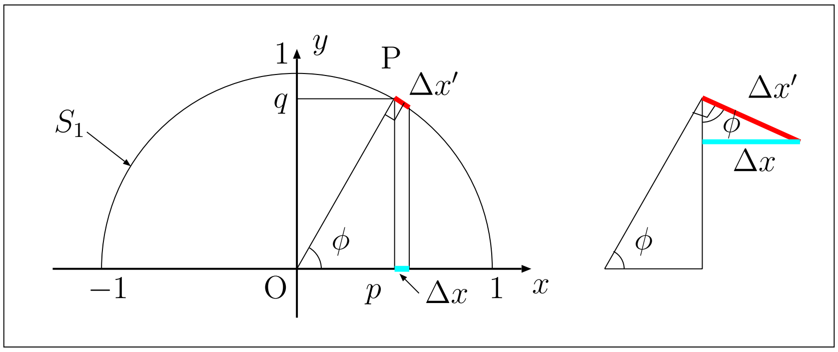


図 6: 真上から見た $\Delta x$ と $\Delta x'$

この場合、$\Delta S_1$ の面は、ほぼ中心角 $\phi$ の半径に垂直であり、よって、その横幅 $\Delta x'$ と $\Delta x$ の比は、ほぼ $\sin\phi$ となる (図 6 の右の図)。

$$\Delta x' : \Delta x \fallingdotseq 1 : \sin\theta$$

よって、$S_1$ 上での面積 $\Delta S_1$ は、

$$\Delta S_1 \fallingdotseq q\Delta x' \fallingdotseq q\,\frac{\Delta x}{\sin\phi} = \sin\phi\,\frac{\Delta x}{\sin\phi} = \Delta x$$

となり、すなわち $\Delta S_1$ は底辺 $\Delta x$、高さ 1 の長方形の面積にほぼ等しくなる。

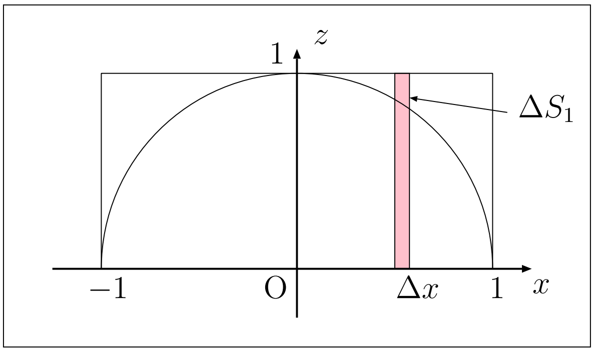


図 7: $\Delta S_1$ を投影面に作る

よって $S_1$ の面積と同じ面積を $xz$ への投影面に作ると、どの $x$ でも高さが 1 の長方形になるので (図 7)、全体として $S_1$ の面積 $A$ は底辺が 2、高さ 1 の長方形の面積に等しく、よって $A = 2$ となることがわかる。

# 4 最後に

本稿では、$y = \sin x$ のグラフの下の面積が 2 であることを、定積分を使わずに説明する方法を紹介した。

実はこの問題についてはなかなか糸口が見つからなかったが、$y = \sin x$ のグラフを作る構造と、2 という数値との図形的な関係、特に、本稿の 5 ページの高さ 1 の直線にあたる射影面上の「等面積曲線」(射影前の面の面積と同じ面積を与える射影面上の曲線) を考察することで、ようやくひとつの解答を見つけることができた。

ちなみに、前の正方形を丸めて作る場合の sin のグラフの場合、「等面積曲線」(に当たるもの) はかなり複雑になって、本稿のような易しい説明は無理なようである。

今回の方法も、それほど易しいとは言えないかもしれないが、基本的には比例の話で済んでいるので、原理的には中学生にも説明できなくはない。ということで、とりあえずの目標は果たしているように思えるが、いかがであろうか。

# 参考文献

[1] 竹野茂治、「極限を用いない微分の公式の説明」、
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#nolimit1` (2016, 2017)