2020 年 03 月 16 日

自然数の巾乗の和について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

高校の数列の授業では、自然数の巾の和

$$S_p(n)=\sum_{k=1}^{n}k^p\quad (p,\,n\text{ は自然数}) \tag{1}$$

に対して、いくつかの p についてその公式を紹介している。

$$\begin{aligned}&S_0(n)=n,\quad S_1(n)=\frac{n}{2}(n+1),\quad S_2(n)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1),\\&S_3(n)=\frac{n^2}{4}(n+1)^2\end{aligned} \tag{2}$$

しかし大学で、この続きの公式を紹介することはまずないし、実際にそれを用いることも多分ほとんどない。

一方で、一般の自然数 p に対する (1) を n の式で表す公式も知られていて、「ファウルハーバーの公式」などと呼ばれることもあるようである ([1]) が、数学辞典 ([2]) では同様の式が「ベルヌーイ多項式」で表されている。

さらに「ファウルハーバーの定理」というものでこの $S_p(n)$ に関する性質も多少知られているようであるが、Web 上にあるその説明 ([3]〜[8] 等) は、代数的な計算の紹介やベルヌーイ数によるものが多いようだし、高校の数学でも (2) は $(k+1)^r-k^r$ の展開式を用いて代数的に導く計算で示されていると思う。

それに対し、本稿では「解析的」、すなわち微積分を用いてそれを計算する方法を示し、その「ファウルハーバーの定理」の性質も考察してみる。

2 通常の代数的手法

まずは、(2) の公式を求める、通常の代数的な手法を紹介する。例えば、$S_1(n)$ は、

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \tag{3}$$

の式を $k=1$ から $k=n$ まで加えると、

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2 - k^2\} = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2S_1(n) + S_0(n)$$

となるが、この左辺は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2 - k^2\} \\
&= \{2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n+1)^2\} - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
&= (n+1)^2 - 1
\end{aligned}$$

となり、また $S_0(n) = n$ なので、(3) は

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1(n) + n$$

となり、よって

$$S_1(n) = \frac{1}{2}\{(n+1)^2 - 1 - n\} = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n}{2}(n+1)$$

が得られる。同様に $S_2(n)$ は、

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 \tag{4}$$

の和を考えることで、

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n)$$

が得られ、よって、

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= \frac{1}{3}\{(n+1)^3-1-3S_1(n)-S_0(n)\}\\
&= \frac{1}{3}\left\{n^3+3n^2+3n-\frac{3n}{2}(n+1)-n\right\} = \frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

となる。

このようにして、帰納的に $S_j(n)$ $(0\leq j\leq p-1)$ の式から $S_p(n)$ を得るのが標準的な手法であり、原理的に同じようにすればできる、という方法が示されて通常は終わりで、高校や大学の教科書でこの先、すなわち $S_p(n)$ の漸化式を導いたり、「ファウルハーバーの定理」を紹介、証明したりすることはまずない。

3 差分方程式

前節の (3) や (4) の左辺の和を求めることができたのは、$(k+1)^r-k^r$ のような形の和がほとんどが消えて、2 項だけが残ったからであるが、よって、もし

$$k^p = f(k+1)-f(k) \tag{5}$$

となるような関数 $f(x)$ が見つかれば、$S_p(n)$ は、

$$S_p(n)=\sum_{k=1}^{n}k^p=\sum_{k=1}^{n}(f(k+1)-f(k))=f(n+1)-f(1)$$

のように簡単に求めることができる。

なお、本稿では、(5) を一つずらして、さらに k を一般の x とした

$$f(x)-f(x-1)=x^p \tag{6}$$

という方程式をこの先考えることにする。

すべての x に対して (6) のような式を満たす未知関数 $f(x)$ を求める問題は、一般に「差分方程式」と呼ばれる。その差分方程式の解の性質を少し紹介するために、これを少し一般化した、

$$[f]_{x-1}^{x}=g(x) \tag{7}$$

という方程式を考えることにする。なお、この左辺は

$$[f]_a^b = f(b) - f(a)$$

を意味することとする。

非斉次型の (7) の一般解 $f(x)$ は、(7) の解の一つ (「特殊解」と呼ばれる) $f_0(x)$ と、周期 1 の任意の周期関数 $p(x)$ を用いて

$$f(x) = f_0(x) + p(x) \tag{8}$$

と書ける。これをまず示す。

最初に、(8) の右辺で与えられる関数が、確かに方程式 (7) を満たすことを示す。$f_0(x)$ は (7) の特殊解なので、すべての x に対し

$$[f_0]_{x-1}^x = f_0(x) - f_0(x-1) = g(x) \tag{9}$$

を満たし、また $p(x)$ は周期 1 の周期関数なので $p(x+1) = p(x)$、よって

$$p(x) - p(x-1) = 0 \tag{10}$$

を満たす。(9), (10) より

$$[f_0 + p]_{x-1}^x = [f_0]_{x-1}^x + [p]_{x-1}^x = g(x) + 0$$

となり、確かに (8) の右辺 $f_0(x)+p(x)$ は (7) を満たすことがわかる。次に、逆に (7) を満たす $f(x)$ は必ず $f_0(x)+p(x)$ の形になることを示す。(7) の任意の解を $f(x)$ とすると、

$$[f - f_0]_{x-1}^x = [f]_{x-1}^x - [f_0]_{x-1}^x = g(x) - g(x) = 0$$

なので、$p(x) = f(x) - f_0(x)$ は $p(x) = p(x-1)$ をすべての x に対して満たすことになるから $p(x)$ は周期 1 の周期関数であることがわかる。よって $f(x)$ が (8) の右辺の形になることが示された。

上の事実により、(7) の一般解を求めるには、その特殊解 $f_0(x)$ を求めればよいことになる。なお、定数 c に対して

$$[f_0 + c]_{x-1}^x = [f_0]_{x-1}^x + [c]_{x-1}^x = [f_0]_{x-1}^x$$

となるので、$f_0(x)$ は

$$f_0(0) = 0 \tag{11}$$

を満たすと仮定してよい (必要ならば $f_0(x)$ の代わりに $f_0(x) - f_0(0)$ と取ればよい)。

以後、0 以上の整数 n に対して、$g(x) = x^n$ に対する方程式 (7) の、(11) を満たす特殊解を $\phi_n(x)$ と書くことにする。実は、このような $\phi_n(x)$ が $(n+1)$ 次多項式としてただひとつ決まるのであるが、本節でそれを示す。

まず、そのような多項式があれば、それが多項式としてはただひとつの解であることはすぐにわかる。それは、もし 2 つあったとすれば、その差 (それも多項式) は上で見たように周期 1 の周期関数でなければならないが、多項式の中で周期関数となるのは定数しかないので、その差は定数となり、(11) の条件からその定数は 0 でなければならないからである。

よってあとはこの $\phi_n(x)$ が存在することを示せばよいが、本節では $\phi_n(x)$ の漸化式を作ることで、それを構成的に示す。

まず $\phi_0(x) = x$ であることは容易にわかる。今、そのような多項式 $\phi_0(x) \sim \phi_n(x)$ $(n \geq 1)$ が存在したとする。方程式

$$[\phi_n]_{x-1}^{x} = \phi_n(x) - \phi_n(x-1) = x^n \tag{12}$$

の両辺を x で微分すると、

$$\phi_n'(x) - \phi_{n-1}'(x-1) = nx^{n-1}$$

となるから、

$$\left[\frac{\phi_n'}{n}\right]_{x-1}^{x} = x^{n-1}$$

を満たすことになり、よって、その一意性により

$$\frac{1}{n}(\phi_n'(x) - \phi_n'(0)) = \phi_{n-1}(x) \tag{13}$$

となることがわかる。この式の両辺を 0 から x まで積分すれば

$$\phi_n(x) = n\left(\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt + C_n x\right) \tag{14}$$

が得られるが、この $C_n=\phi'_n(0)$ を $\phi_{n-1}(x)$ で書き表すために (14) を (12) に代入すると、

$$[\phi_n]_{x-1}^x = n\left[\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt + C_n x\right]_{x-1}^x = n\int_{x-1}^x \phi_{n-1}(t)dt + nC_n = x^n$$

となるので、$x=0$ とすれば、

$$C_n = -\int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt = \int_0^{-1} \phi_{n-1}(t)dt$$

となる。よって、ϕ_{n-1} から ϕ_n を求める漸化式

$$\phi_n(x) = n\left(\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt + x\int_0^{-1} \phi_{n-1}(t)dt\right) \quad (n\geq 1) \tag{15}$$

が得られる。

ただし、(15) はあくまでそのような多項式 ϕ_n が存在するとして導いたもので、逆にそこから得られる $\phi_n(x)$ がすべての x に対して (12) を満たすことはまだ保証されていない。よって次は、(15) で得られる ϕ_n が、確かに (12) と $\phi_n(0)=0$ を満たすことを示す。

そこにも帰納的を用いる。$\phi_0(x)=x$ として、$n\geq 1$ に対して、ϕ_{n-1} までは (12) と $x=0$ で 0 になることは満たしていると仮定する。

まず、$\phi_n(0)=\phi_n(-1)=0$ は、(15) に $x=0, x=-1$ を代入すれば容易に得られる。また、変数変換と帰納法の仮定により、

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt\right]_{x-1}^x &= \int_0^x \phi_{n-1}(t)dt - \int_0^{x-1} \phi_{n-1}(t)dt \\
&= \int_0^x \phi_{n-1}(t)dt - \left(\int_{-1}^{x-1} \phi_{n-1}(t)dt - \int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt\right) \\
&= \int_0^x \phi_{n-1}(t)dt - \int_0^x \phi_{n-1}(t-1)dt + \int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt \\
&= \int_0^x \{\phi_{n-1}(t)-\phi_{n-1}(t-1)\}dt + \int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt \\
&= \int_0^x [\phi_{n-1}]_{t-1}^t\, dt + \int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt \ = \int_0^x t^{n-1}dt + \int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt \\
&= \frac{x^n}{n} + \int_{-1}^0 \phi_{n-1}(t)dt
\end{aligned} \tag{16}$$

となるので、よって (15) で与えられる $\phi_n(x)$ は、(16) より、

$$\begin{aligned}[\phi_n]_{x-1}^{x} &= n\left[\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt\right]_{x-1}^{x} + n\left[x\int_0^{-1} \phi_{n-1}(t)dt\right]_{x-1}^{x} \\ &= x^n + n\int_{-1}^{0} \phi_{n-1}(t)dt + n\int_0^{-1} \phi_{n-1}(t)dt \;=\; x^n\end{aligned}$$

となり、これで ϕ_n が (12) の解であることが帰納的に保証されることになる。

また、$\phi_0(x) = x$ は 1 次式で、よって (15) により $\phi_n(x)$ は多項式で、その次数は $\phi_{n-1}(x)$ より一つ上であることも帰納的に保証され、よって $\phi_n(x)$ が $(n+1)$ 次式であることがわかる。

なお、(12) を $x = 1$ から $x = k$ まで和を取れば、

$$\phi_n(k) - \phi_n(0) = \sum_{x=1}^{k} x^n = S_n(k)$$

となるので、よって $S_p(n)$ はこの ϕ_n を用いて

$$S_p(n) = \phi_p(n) \tag{17}$$

と表される。以上により、通常は代数的に求める $S_p(n)$ を、解析的に積分を用いて求める漸化式 (15) が得られたことになる。

4 ファウルハーバーの定理

Wikipedia ([1]) によれば、$S_p(n)$ は次の性質を持つことが知られていて、それをファウルハーバーの定理と呼ぶようである。

- [T1] $S_{2p-1}(n)$ は n の多項式として $S_1(n)$ で割り切れ、さらにその商は $S_1(n)$ の多項式で表される $(p \geq 1)$。
- [T2] $S_{2p}(n)$ は n の多項式として $S_2(n)$ で割り切れ、さらにその商は $S_1(n)$ の多項式で表される $(p \geq 1)$。

例えば、以下のような具合である。

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = S_1(n)^2, \\ S_4(n) &= \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = \frac{1}{5}S_2(n)(6S_1(n)-1), \\ S_5(n) &= \frac{n^2}{12}(n+1)^2(2n^2+2n-1) = \frac{1}{3}S_1(n)^2(4S_1(n)-1) \end{aligned} \tag{18}$$

(17) より、$S_p(n)$ に対する性質 [T1], [T2] は、ϕ_n に対する次の性質 [T1'], [T2'] に書き直すことができる。

- [T1'] ある多項式 $F_n(X)$ により $\phi_{2n-1}(x) = \phi_1(x)F_n(\phi_1(x))$ となる ($n \geq 1$)。
- [T2'] ある多項式 $G_n(X)$ により $\phi_{2n}(x) = \phi_2(x)G_n(\phi_1(x))$ となる ($n \geq 1$)。

この性質 [T1'], [T2'] を、漸化式 (15) を用いて直接示すこともできるが、本節では、この [T1'], [T2'] が、さらに少し変形した形 [S1], [S2] と同等であることを示し、そちらを証明することで [T1], [T2] が成り立つことを示すことにする。

そのために、$\phi_n(x) = \hat{\phi}_n(x+1/2)$, すなわち

$$\hat{\phi}_n(y) = \phi_n\left(y - \frac{1}{2}\right) \quad \left(y = x + \frac{1}{2}\right)$$

により新たな $(n+1)$ 次多項式 $\hat{\phi}_n(y)$ を導入すると、[T1'], [T2'] は次の形に書ける ($n \geq 1$)。

- [S1] $\hat{\phi}_{2n-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0$ で、かつ $\hat{\phi}_{2n-1}(y)$ は偶関数 (偶数次の項のみの多項式)
- [S2] $\hat{\phi}_{2n}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0$ で、かつ $\hat{\phi}_{2n}(y)$ は奇関数 (奇数次の項のみの多項式)

この、[T1'],[T2'] と [S1],[S2] が同等であることを示そう。

まず、[T1'] が成り立てば、$\phi_1(x) = x(x+1)/2$ より、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \phi_{2n-1}(0) = \phi_1(0)F_n(\phi_1(0)) = 0, \\ \hat{\phi}_{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\right) &= \phi_{2n-1}(-1) = \phi_1(-1)F_n(\phi_1(-1)) = 0 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\phi_1(x) = \frac{x}{2}(x+1) = \frac{1}{2}(x^2+x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{8}$$

より、[T1'] から

$$\hat{\phi}_{2n-1}(y) = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{8}\right) F_n\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{8}\right)$$

となるので、確かに $\hat{\phi}_{2n-1}(y)$ は偶関数となり、よって [S1] が得られる。

同様に [T2'] が成り立てば、$\phi_2(x) = x(x+1)(2x+1)/6$ より、

$$\hat{\phi}_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_2(0)G_n(\phi_1(0)) = 0, \quad \hat{\phi}_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \phi_2(-1)G_n(\phi_1(-1)) = 0$$

となる。また、$\phi_2(x) = \phi_1(x)(2x+1)/3 = 2y\phi_1(x)/3$ より、[T2'] から

$$\hat{\phi}_{2n}(y) = \frac{2y}{3}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{8}\right) G_n\left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{8}\right)$$

となるので、確かに $\hat{\phi}_{2n}(y)$ は奇関数となり、よって [S2] が得られる。

逆に、[S1] が成り立てば、$\hat{\phi}_{2n-1}(y)$ は因数定理により $(y-1/2)(y+1/2) = y^2-1/4$ で割り切れるので、その商を $\psi(y)$ と書けば

$$\hat{\phi}_{2n-1}(y) = \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\psi(y)$$

となるが、$\hat{\phi}_{2n-1}(y)$ は偶関数なので、

$$\hat{\phi}_{2n-1}(-y) = \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\psi(-y) = \hat{\phi}_{2n-1}(y) = \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\psi(y)$$

となるから $\psi(y)$ も偶関数の多項式で、よって $\psi(y) = \hat{\psi}(y^2)$ の形に書ける ($\hat{\psi}(Y)$ も多項式)。よって $\hat{\phi}_{2n-1}(y)$ は

$$\hat{\phi}_{2n-1}(y) = \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\hat{\psi}(y^2)$$

の形になるから、これを $\phi_{2n-1}(x)$ に戻せば、

$$\begin{aligned}\phi_{2n-1}(x) &= \hat{\phi}_{2n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}\hat{\psi}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)\\ &= (x^2+x)\hat{\psi}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) = 2\phi_1(x)\hat{\psi}\left(2\phi_1(x)+\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

となり、確かに [T1'] が得られることがわかる。

同様に、[S2] が成り立つならば、$\hat{\phi}_{2n}(y)$ は、ある多項式により

$$\hat{\phi}_{2n}(y) = \left(y^2-\frac{1}{4}\right)\mu(y)$$

と書け、$\hat{\phi}_{2n}(y)$ は奇関数なので、

$$\hat{\phi}_{2n}(-y) = \left(y^2-\frac{1}{4}\right)\mu(-y) = -\hat{\phi}_{2n}(y) = -\left(y^2-\frac{1}{4}\right)\mu(y)$$

となるから $\mu(y)$ も奇関数の多項式で、特に $\mu(0)=0$ であるから y で割り切れ、その商は偶関数となる。よって、$\mu(y)=y\hat{\mu}(y^2)$ ($\hat{\mu}(Y)$ も多項式) の形になるので、

$$\hat{\phi}_{2n}(y) = y\left(y^2-\frac{1}{4}\right)\hat{\mu}(y^2)$$

となり、これを $\phi_{2n}(x)$ に戻せば、

$$\begin{aligned}\phi_{2n}(x) &= \hat{\phi}_{2n}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}\hat{\mu}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)\\ &= \frac{2x+1}{2}(x^2+x)\hat{\mu}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) = 3\phi_2(x)\hat{\mu}\left(2\phi_1(x)+\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

となり、確かに [T2'] が得られることがわかる。

よって、あとは [S1],[S2] が成り立つことを示せばよいのであるが、$\hat{\phi}_n(\pm 1/2)=0$ は、$\phi_n(0)=\phi_n(1)=0$ と同等で、それは漸化式 (15) から、成り立つことが帰納的に容易に示される ((15) に $x=0, x=-1$ を代入すればいずれも 0 になる) ので、あとは偶関数、奇関数の部分のみ考えればよい。

今、関数 $f(x)$ から、新たな関数を作る変換演算子 $T[f]=T[f](x)$ を、

$$T[f](x) = \int_0^x f(t)dt + x\int_0^{-1} f(t)dt \tag{19}$$

と定義すると、(15) は、

$$\phi_n(x) = nT[\phi_{n-1}](x) \tag{20}$$

と書ける。この演算子は線形、すなわち、関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 a, b に対して

$$T[af+bg](x) = aT[f](x) + bT[g](x)$$

となることは容易にわかる。

さて、あと [S1],[S2] で示すべきは、

「$\hat{\phi}_{2n-1}(y)$ が偶関数で、$\hat{\phi}_{2n}(y)$ が奇関数であること」

であるが、これは、ϕ_n で言えば

「$\phi_{2n-1}(x)$ が $(x+1/2)$ の偶数次の項からなる多項式、$\phi_{2n}(x)$ が $(x+1/2)$ の奇数次の項からなる多項式となること」

を意味する。よってこれを示すためには、(20) と T の線形性により、

「$(x+1/2)$ の偶数乗 (0 乗以上) の T による変換結果が $(x+1/2)$ の奇数次の項のみで表され、$(x+1/2)$ の奇数乗の T による変換結果が $(x+1/2)$ の偶数次の項のみで表されること」

を示せばよい。あとはこれを実際に計算で示す。

整数 m (≥ 0) に対して、

$$\begin{aligned}
T\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m}\right] &= \int_0^x \left(t+\frac{1}{2}\right)^{2m} dt + x\int_0^{-1}\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2m} dt \\
&= \left[\frac{1}{2m+1}\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\right]_0^x + x\left[\frac{1}{2m+1}\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\right]_0^{-1} \\
&= \frac{1}{2m+1}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} + x\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m+1} - x\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\right\} \\
&= \frac{1}{2m+1}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m+1} - \frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{2x}{2^{2m+1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2m+1}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m+1} - \frac{1}{2^{2m}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

となり、確かに $(x+1/2)$ の偶数乗の T の変換結果は $(x+1/2)$ の奇数次の項のみの式で表されることがわかる。同様に、$m\ (\geq 1)$ に対して、

$$\begin{aligned} T\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\right] &= \left[\frac{1}{2m}\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2m}\right]_0^x + x\left[\frac{1}{2m}\left(t+\frac{1}{2}\right)^{2m}\right]_0^{-1} \\ &= \frac{1}{2m}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} + x\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m} - x\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right\} \\ &= \frac{1}{2m}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2m} - \frac{1}{2^{2m}}\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

となり、確かに $(x+1/2)$ の奇数乗の T の変換結果は $(x+1/2)$ の偶数次の項のみの式で表される。これで [S1],[S2] が成り立つことが示され、よって [T1],[T2] が示されたことになる。

5 計算例

本節では漸化式 (15) や、前節の (21), (22)、すなわち

$$T[y^{2m}] = \frac{y}{2m+1}\left(y^{2m} - \frac{1}{2^{2m}}\right), \quad T[y^{2m-1}] = \frac{1}{2m}\left(y^{2m} - \frac{1}{2^{2m}}\right) \tag{23}$$

などを用いて、いくつかの $\phi_n(x)$ の計算を紹介する。公式集や数式処理ソフトでも簡単に得られるかもしれないが、ここでは少し地道な計算を示し、多項式としての形や ϕ_1, ϕ_2 の因数を出した形、および [T1],[T2] の形がどうなるかを紹介する。

なお、n が奇数か偶数かで計算のしやすさに違いがあることに注意する。例えば n が奇数の場合は、[T2'] より

$$\phi_{n-1}(x) = \phi_2(x)G_m(\phi_1(x)) \quad \left(m = \frac{n-1}{2}\right)$$

となるが、

$$\phi_2(x) = \frac{2x+1}{3}\phi_1(x) = \frac{2}{3}\phi_1'(x)\phi_1(x)$$

なので、多項式 $H_m(X)$ を

$$H_m(X) = \int_0^X YG_m(Y)dY \tag{24}$$

とすれば、$\phi_{n-1}(x)$ の積分は置換積分により、

$$\begin{aligned}\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt &= \int_0^x \frac{2}{3}\phi_1(t)G_m(\phi_1(t))\phi_1'(t)dt = \frac{2}{3}\{H_m(\phi_1(x)) - H_m(\phi_1(0))\}\\ &= \frac{2}{3}\{H_m(\phi_1(x)) - H_m(0)\} = \frac{2}{3}H(\phi_1(x))\end{aligned}$$

となり、よって

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= n\left(\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt + x\int_0^{-1}\phi_{n-1}(t)dt\right)\\ &= \frac{2n}{3}\{H_m(\phi_1(x)) + xH_m(\phi_1(-1))\} = \frac{2n}{3}\{H_m(\phi_1(x)) + xH_m(0)\}\\ &= \frac{2n}{3}H_m(\phi_1(x)) \qquad (25)\end{aligned}$$

となる。つまり、n が奇数の場合、$\phi_{n-1}(x)$ の [T2'] の形が得られていれば、そこから ϕ_n の [T1'] の形を得るのは難しくはなく、ほぼ (24) の計算だけで済むし、また、上の計算からもわかるが、直接 (15) を使って計算しても、n が奇数の場合は後ろの定積分の項は 0 となるため、

$$\phi_n(x) = n\int_0^x \phi_{n-1}(t)dt$$

となって、計算量はだいぶ小さくなる。

一方、n が偶数の場合は [T1'] の形から [T2'] を求めるのはそれほど易しくはない。(23) を使えば一応計算できるのであるが、y の多項式への変形や、逆に y の式から $\phi_1(x)$ の式への展開などが入り、n が奇数の場合よりも計算量が多くなる。この場合はむしろ多項式として直接 (15) を使って計算し、それを因数分解して [T2'] の形を作った方が、n が大きい場合には早いかもしれない。

それでは、順に $\phi_n(x)$ $(n \geq 1)$ を計算する。$\phi_0(x) = x$ なので、定数 C に対して

$$T[C] = \int_0^x Cdt + x\int_0^{-1} Cdt = Cx + x(-C) = 0$$

に注意すると、(23) を使えば

$$\begin{aligned}T[\phi_0] &= T[x] = T\left[x + \frac{1}{2}\right] = T[y] = \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{1}{2^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}(x^2 + x)\end{aligned}$$

となるが、これは直接 (19) から

$$T[x] = \int_0^x tdt + x\int_0^{-1} tdt = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

とする方が早いだろう。いずれにせよ、結局、

$$\phi_1(x) = T[\phi_0] = \frac{x}{2}(x+1)$$

となる。

$\phi_2(x)$ は、(23) を使えば、

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= 2T[\phi_1(x)] = T[x^2+x] = T\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = T[y^2] \\ &= \frac{y}{3}\left(y^2 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2x+1}{6}(x^2+x) = \frac{x}{6}(x+1)(2x+1)\end{aligned}$$

が得られるが、これは直接 (19) から計算すれば、

$$\int_0^x \phi_1(t)dt = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right) dt = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}$$

より、

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} \\ &= \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}\end{aligned}$$

のようになる。

次は $\phi_3(x)$ であるが、(25) を使うと、この場合は $G_1(X) = 1$ なので、$H_1(X) = X^2/2$ となり、よって

$$\phi_3(x) = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot \frac{1}{2}\phi_1(x)^2 = \phi_1(x)^2 = \frac{x^2}{4}(x+1)^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

となる。

$\phi_4(x)$ は、(23) で計算すると、$y^2 = x^2 + x + 1/4 = 2\phi_1(x) + 1/4$ より、

$$\begin{aligned}
\phi_4(x) &= 4T[\phi_3(x)] \;=\; T[(x^2+x)^2] \;=\; T\left[\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2\right] \;=\; T\left[y^4 - \frac{y^2}{2}\right] \\
&= \frac{y}{5}\left(y^4 - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{y}{6}\left(y^2 - \frac{1}{2^2}\right) \\
&= \frac{y}{5}\left\{\left(2\phi_1(x) + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right\} - \frac{y}{6}\left(2\phi_1(x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{(2x+1)}{10}(4\phi_1(x)^2 + \phi_1(x)) - \frac{2x+1}{6}\phi_1(x) \\
&= \frac{3\phi_2(x)}{10}(4\phi_1(x)+1) - \frac{\phi_2(x)}{2} \;=\; \frac{\phi_2(x)}{5}(6\phi_1(x) - 1)
\end{aligned}$$

となるので、これを展開すれば、

$$\begin{aligned}
\phi_4(x) &= \frac{x(x+1)(2x+1)}{30} \times (3x^2 + 3x - 1) \\
&= \frac{x}{30}(2x^2+3x+1)(3x^2+3x-1) \;=\; \frac{x}{30}(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1) \\
&= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}
\end{aligned}$$

となる。一方、$\phi_4(x)$ を直接 (15) から計算すれば、

$$\begin{aligned}
4\int_0^x \phi_3(t)dt &= \int_0^t (t^4 + 2t^3 + t^2)dt \;=\; \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \\
4\int_0^{-1} \phi_3(t)dt &= -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{-6+15-10}{30} \;=\; -\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\phi_4(x) &= 4\int_0^x \phi_3(t)dt + 4x\int_0^{-1} \phi_3(t)dt \;=\; \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30} \\
&= \frac{x}{30}(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1)
\end{aligned}$$

となる。[T2] より $6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1$ は $(x+1)(2x+1)$ で割り切れるので、実際に割り算を実行すれば、組み立て除法なら 3 行位の計算で済み、

$$\begin{aligned}
6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 &= (x+1)(6x^3 + 9x^2 + x - 1) \\
&= (x+1)(2x+1)(3x^2 + 3x - 1)
\end{aligned}$$

のようになり、$3x^2+3x-1=3(x^2+x)-1=6\phi_1(x)-1$ より、前と同じものが得られることがわかる。

$\phi_5(x)$ は、$G_2(X)=(6X-1)/5$ なので

$$H_2(X)=\int_0^X\left(\frac{6Y^2}{5}-\frac{Y}{5}\right)dY=\frac{2X^3}{5}-\frac{X^2}{10} \tag{26}$$

となるから、(25) より、

$$\begin{aligned}\phi_5(x) &= \frac{10}{3}H_2(\phi_1(x)) = \frac{\phi_1^2}{3}(4\phi_1-1) = \frac{x^2}{12}(x+1)^2(2x^2+2x-1)\\ &= \frac{x^2}{12}(x^2+2x+1)(2x^2+2x-1) = \frac{x^2}{12}(2x^4+6x^3+5x^2-1)\\ &= \frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{2}+\frac{5x^4}{12}-\frac{x^2}{12}\end{aligned}$$

となる。ちなみに、この最後の式が正しいことは、(13) を用いて微分で確認することもできる。

以下、計算結果のみを示す。紹介するのは、ファウルハーバーの定理の形の式 ([T1'], [T2'])、因数分解の形、および展開した式の 3 つの形である。なお、因数分解式は、[T1'], [T2'] の形の ϕ_1, ϕ_2 の因数だけの因数分解式を紹介するが、$F_n(\phi_1)$, $G_n(\phi_1)$ の部分がさらに有理数係数の範囲で因数分解できるかもしれないが、それは確認していない。また、手計算での計算例なので、計算間違いなどが含まれる可能性もある。

$$\begin{aligned}\phi_6(x) &= \frac{\phi_2}{7}(12\phi_1^2-6\phi_1+1)\\ &= \frac{x}{42}(x+1)(2x+1)(3x^4+6x^3-3x+1)\\ &= \frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{2}+\frac{x^5}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{42},\\ \phi_7(x) &= \frac{\phi_1^2}{3}(6\phi_1^2-4\phi_1+1)\\ &= \frac{x^2}{24}(x+1)^2(3x^4+6x^3-x^2-4x+2)\\ &= \frac{x^8}{8}+\frac{x^7}{2}+\frac{7x^6}{12}-\frac{7x^4}{24}+\frac{x^2}{12},\\ \phi_8(x) &= \frac{\phi_2}{15}(40\phi_1^3-40\phi_1^2+18\phi_1-3)\\ &= \frac{x}{90}(x+1)(2x+1)(5x^6+15x^5+5x^4-15x^3-x^2+9x-3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^9}{9}+\frac{x^8}{2}+\frac{2x^7}{3}-\frac{7x^5}{15}+\frac{2x^3}{9}-\frac{x}{30},\\
\phi_9(x) &= \frac{\phi_1^2}{5}(16\phi_1^3-20\phi_1^2+12\phi_1-3)\\
&= \frac{x^2}{20}(x+1)^2(2x^6+6x^5+x^4-8x^3+x^2+6x-3)\\
&= \frac{x^{10}}{10}+\frac{x^9}{2}+\frac{3x^8}{4}-\frac{7x^6}{10}+\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{20},\\
\phi_{10}(x) &= \frac{\phi_2}{11}(48\phi_1^4-80\phi_1^3+68\phi_1^2-30\phi_1+5)\\
&= \frac{x}{66}(x+1)(2x+1)(3x^8+12x^7+8x^6-18x^5-10x^4+24x^3+2x^2\\
&\quad -15x+5)\\
&= \frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{10}}{2}+\frac{5x^9}{6}-x^7+x^5-\frac{x^3}{2}+\frac{5x}{66},\\
\phi_{11}(x) &= \frac{\phi_1^2}{3}(16\phi_1^4-32\phi_1^3+34\phi_1^2-20\phi_1+5)\\
&= \frac{x^2}{24}(x+1)^2(2x^8+8x^7+4x^6-16x^5-5x^4+26x^3-3x^2-20x\\
&\quad +10)\\
&= \frac{x^{12}}{12}+\frac{x^{11}}{2}+\frac{11x^{10}}{12}-\frac{11x^8}{8}+\frac{11x^6}{6}-\frac{11x^4}{8}+\frac{5x^2}{12},\\
\phi_{12}(x) &= \frac{\phi_2}{13}\Biggl(2^5\cdot 3\phi_1^5-2^4\cdot 3\cdot 5\phi_1^4+2^3\cdot 41\phi_1^3-\frac{2^5\cdot 59}{7}\phi_1^2+\frac{2\cdot 3\cdot 691}{35}\phi_1\\
&\quad -\frac{691}{35}\Biggr)\\
&= \frac{x}{78}(x+1)(2x+1)\Bigl(3x^{10}+15x^9+15x^8-30x^7-34x^6+66x^5\\
&\quad +\frac{284}{7}x^4-\frac{657}{7}x^3-\frac{41}{5}x^2+\frac{3\cdot 691}{35}x-\frac{691}{35}\Bigr)\\
&= \frac{x^{13}}{13}+\frac{x^{12}}{2}+x^{11}-\frac{11x^9}{6}+\frac{22x^7}{7}-\frac{33x^5}{10}+\frac{5x^3}{3}-\frac{691x}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13},\\
\phi_{13}(x) &= \phi_1^2\left(\frac{2^6}{7}\phi_1^5-\frac{2^4\cdot 5}{3}\phi_1^4+\frac{2^4\cdot 41}{15}\phi_1^3-\frac{2^4\cdot 59}{21}\phi_1^2+\frac{2^2\cdot 691}{105}\phi_1-\frac{691}{105}\right)\\
&= \frac{x^2}{14}(x+1)^2\Biggl(x^{10}+5x^9+\frac{25x^8}{6}-\frac{40x^7}{3}-\frac{163x^6}{15}+\frac{526x^5}{15}+\frac{367x^4}{30}\\
&\quad -\frac{893x^3}{15}+\frac{101x^2}{15}+\frac{691x}{15}-\frac{691}{30}\Biggr)\\
&= \frac{x^{14}}{14}+\frac{x^{13}}{2}+\frac{13x^{12}}{12}-\frac{11\cdot 13x^{10}}{60}+\frac{11\cdot 13x^8}{28}-\frac{11\cdot 13x^6}{20}\\
&\quad +\frac{5\cdot 13x^4}{12}-\frac{691x^2}{420}
\end{aligned}
$$

ここまでの式を見ると、これらの式にはさらに次の性質があることがわかる。

- [T3'] $\phi_n(x)$ を展開すると、次数の高い最初の 2 項は以下のようになる:
$$\phi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \cdots$$
- [T4'] $\phi_n(x) - x^n/2$ は、n が偶数なら奇関数、n が奇数なら偶関数になる
- [T5'] n が 3 以上の奇数の場合、$\phi_n(x)$ は $\phi_1(x)^2$ でも割り切れる

いずれも、それらが正しいことも容易に証明できる (証明は省略)。

なお、G_m から H_m を計算する (24) と (25)、および [T1'] より、x, y を介さずに G_n から 直接 F_{n+1} を求める式

$$XF_{n+1}(X) = \frac{2(2n+1)}{3}H_n(X) = \frac{2(2n+1)}{3}\int_0^X YG_n(Y)dY \tag{27}$$

が得られる。逆に F_n から G_n を直接求める式を作ることもできなくはないが、その計算は、以下に示すようにあまり易しくはない。$\hat{F}_n(X) = XF_n(X)$ とすると、

$$\phi_{2n}(x) = 2nT\left[\phi_{2n-1}\right] = 2nT\left[\hat{F}_n(\phi_1)\right]$$

であり、よってこの式を微分すると

$$\phi'_{2n}(x) = 2n\{\hat{F}_n(\phi_1(x)) + C_{2n}\} \tag{28}$$

となる。一方、$\hat{G}_n(X) = XG_n(X)$ として、

$$\phi_{2n}(x) = \phi_2(x)G_n(\phi_1(x)) = \frac{2x+1}{3}\phi_1(x)G_n(\phi_1(x)) = \frac{2x+1}{3}\hat{G}_n(\phi_1(x))$$

を微分すると、

$$\begin{aligned} \phi'_{2n}(x) &= \frac{2}{3}\hat{G}_n(\phi_1(x)) + \frac{2x+1}{3}\hat{G}'_n(\phi_1(x))\phi'_1(x) \\ &= \frac{2}{3}\hat{G}_n(\phi_1(x)) + \frac{(2x+1)^2}{6}\hat{G}'_n(\phi_1(x)) \\ &= \frac{2}{3}\hat{G}_n(\phi_1(x)) + \frac{8\phi_1(x)+1}{6}\hat{G}'_n(\phi_1(x)) \end{aligned} \tag{29}$$

となるので、(28), (29) より、$\hat{G}_n(X)$ を求める微分方程式

$$4\hat{G}_n(X) + (8X+1)\hat{G}'_n(X) = 12n\{\hat{F}_n(X) + C_{2n}\} \tag{30}$$

が得られる。この左辺を $\sqrt{8X+1}$ で割れば、

$$\frac{4}{\sqrt{8X+1}}\hat{G}_n(X) + \sqrt{8X+1}\,\hat{G}'_n(X) = \frac{d}{dX}\left(\sqrt{8X+1}\,\hat{G}_n(X)\right)$$

となるので、$\hat{G}_n(0) = 0$ より、

$$\sqrt{8X+1}\,\hat{G}_n(X) = \int_0^X \frac{12n}{\sqrt{8Y+1}}(\hat{F}_n(Y) + C_{2n})dY$$

が得られ、よって F_n から G_n を計算する公式

$$XG_n(X) = \frac{1}{\sqrt{8X+1}}\int_0^X \frac{12n}{\sqrt{8Y+1}}(YF_n(Y) + C_{2n})dY \tag{31}$$

が得られる。左辺は X の多項式であるから、定数 C_{2n} は、右辺の積分で平方根の式 $\sqrt{8X+1}$ が残らないように選べばよい。

例えば、$F_2(X) = X$ から (31) を用いて $G_2(X)$ $(= (6X-1)/5)$ を計算してみる。

$$\begin{aligned}
XG_2(X) &= \frac{1}{\sqrt{8X+1}}\int_0^X \frac{24}{\sqrt{8Y+1}}(Y^2 + C_4)dY \\
&= \frac{1}{\sqrt{8X+1}}\int_0^X 24(Y^2+C_4)\left\{2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8^3}(8Y+1)^{5/2}\right\}''' dY \\
&= \frac{1}{40\sqrt{8X+1}}\Big[\{(8Y+1)^{5/2}\}''(Y^2+C_4) - \{(8Y+1)^{5/2}\}'(Y^2+C_4)' \\
&\quad +(8Y+1)^{5/2}(Y^2+C_4)''\Big]_0^X \\
&= \frac{1}{40\sqrt{8X+1}}\Big[240(8Y+1)^{1/2}(Y^2+C_4) - 40(8Y+1)^{3/2}Y + 2(8Y+1)^{5/2}\Big]_0^X \\
&= 6(X^2+C_4) - (8X+1)X + \frac{(8X+1)^2}{20} - \frac{1}{\sqrt{8X+1}}\left(6C_4 + \frac{1}{20}\right)
\end{aligned}$$

となるので、平方根の項を消すためには、$C_4 = -1/120$ となり、そのとき、

$$\begin{aligned}
XG_2(X) &= 6X^2 - \frac{1}{20} - 8X^2 - X + \frac{16}{5}X^2 + \frac{4}{5}X + \frac{1}{20} \\
&= \frac{6}{5}X^2 - \frac{1}{5}X \;=\; \frac{X}{5}(6X-1)
\end{aligned}$$

となって $G_2(X) = (6X-1)/5$ が得られるが、計算は H_2 の計算 (26) に比べればかなり面倒で、これで ϕ_{2n} を計算をするのはあまり実用的ではない。

6 最後に

本稿では、n^k の和の公式に関する考察を紹介した。通常とは違い、代数的な方法ではなく、差分方程式の積分による解法を紹介した。

実際には、この和の公式はベルヌーイ数で表現できることが知られており ([2])、本稿の手法は、そちらの観点からはあまり意味がないかもしれないが、初等的な手法しか用いていないので、高校生でも理解できる内容だと思う。

個人的には、指数 k が偶数か奇数かで和の式を求める難易度や、F_n, G_n の漸化式の簡便さもだいぶ変わってしまうことが興味深く感じる。それは、もしかしたら指数 k を一般の実数、あるいは複素数に拡張してその和を k の関数と考えた場合にその k に関する性質として見えてくるかもしれないが、専門分野ではないのでそのあたりは全くわからない。

参考文献

[1] Wikipedia「ファウルハーバーの公式」
https://ja.wikipedia.org/wiki/ファウルハーバーの公式

[2] 日本数学会編「岩波数学辞典 (第 3 版)」(1985)、岩波書店、386 母関数 B.「Bernoulli の多項式」

[3] 倭算数理研究所「自然数の冪乗和の公式を導いてみるよ」(2013-11-03)
https://wasan.hatenablog.com/entry/2013/11/03/055215

[4] Shadow Academy「冪乗和の公式 (ファウルハーバーの公式)」(2013-10-28)
https://shadowacademy.web.fc2.com/faulhaber.html

[5] 梅谷武「関・ベルヌーイの冪和公式」(2006-05-25, 2013-06-14)
https://pisan-dub.jp/doc/2011/20110114001/4_3.html

[6] Takashi Hirotsu「べき乗和の公式」(COMPASS 真の理解のためのシンプルな数学のノート)
http://www.compassare.org/sum-pw-f.html

[7] 難波博之「4 乗の和, べき乗の和の公式」(高校数学の美しい物語)
https://mathtrain.jp/yonjo

[8] tsujimotter「ベルヌーイ数 (2): ファウルハーバーの公式の証明」(2012-05-18)
http://tsujimotter.info/2012/05/18/bernoulli-2/