2009 年 08 月 05 日

数列の定数係数線形漸化式について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

漸化式で決まる数列として代表的なものにフィボナッチ数列がある。

$$\begin{cases} a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\geq 0), \\ a_0=0, \quad a_1=1 \end{cases} \tag{1}$$

これは、3 項の定数係数線形同次漸化式と分類されるものであるが、この a_n の一般項は次の形になることがよく知られている。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \tag{2}$$

(1) で得られる項はすべて整数であるのに、一般項 (2) には $\sqrt{5}$ のような無理数が現れることに不思議さを感じる人もいるようである。

本稿では、一般の定数係数線形同次漸化式、および連立の線形同次漸化式、非同次の漸化式の解 (一般項) の構造やその求め方について考察を行うことで、フィボナッチ数列の一般項の構造に関して考え直してみたいと思う。

なお、本稿ではある程度の線形代数の知識を仮定して話を進めることにする。

2 定数係数線形同次漸化式

定数係数線形同次 $(N+1)$ 項漸化式とは、以下のような漸化式を言う。

$$\sum_{j=0}^{N}p_ja_{n+j}=a_{n+N}+p_{N-1}a_{n+N-1}+\cdots+p_1a_{n+1}+p_0a_n=0 \quad (n\geq 0) \tag{3}$$

ここで、p_k $(0 \le k \le N)$ は定数で、$p_N = 1$ とする。また、$p_0 = 0$ であれば、一つずらすことで N 項以下の漸化式にできるので、ここでは

$$p_0 \neq 0 \tag{4}$$

であると仮定する。

まず、数列の線形性について述べておく。今、数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を

$$\{a_n\}_{n\ge0} = \{a_n\}$$

のように書くことにする。このとき、2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の和を $\{a_n + b_n\}$ で定義でき、また数列 $\{a_n\}$ のスカラー倍 (α 倍) を $\{\alpha a_n\}$ で定義できる。これにより、数列 $\{a_n\}$ を抽象的なベクトルと見ることができ、数列の集まりをベクトル空間 (線形空間) と考えることができる。

漸化式 (3) は、$a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ を与えれば $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ がこの漸化式によって順に求められていくから、(3) を満たす数列には N 個の自由度があるといえる。これを線形代数の言葉で表現すれば次の命題 1 のようになる。なお、以下では (3) を満たす数列のことを (3) の **解** と呼ぶことにする。

命題 1

1. (3) の解は、線形 (部分) 空間を作る (これを (3) の **解空間** と呼ぶ)。すなわち、(3) の解である 2 つの数列の和、および (3) の解のスカラー倍も (3) の解となる。
2. (3) の解空間の次元は丁度 N である。すなわち、N 個の一次独立な数列 $\{a_n^{(j)}\}$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ が存在して、解空間の任意の数列 $\{a_n\}$ は、ある定数 α_j $(0 \le j \le N-1)$ を用いて

   $$a_n = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j a_n^{(j)} = \alpha_0 a_n^{(0)} + \alpha_1 a_n^{(1)} + \cdots + \alpha_{N-1} a_n^{(N-1)}$$

   と書ける。

証明

1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が (3) の解であれば、

$$\sum_{j=0}^{N} p_j a_{n+j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{N} p_j b_{n+j} = 0 \quad (n \geq 0)$$

が成り立つから、任意のスカラー α に対して、

$$\sum_{j=0}^{N} p_j (a_{n+j} + b_{n+j}) = 0, \quad \sum_{j=0}^{N} p_j (\alpha a_{n+j}) = 0 \quad (n \geq 0)$$

となるので、$\{a_n + b_n\}$, $\{\alpha a_n\}$ も (3) の解となる。よって、それらは線形空間を作る。

2. $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ を与えれば (3) の解は一意に決まるので、$0 \leq j \leq N-1$ に対し、

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

($\boldsymbol{e}_j$ は上から $(j+1)$ 番目の成分が 1 で、他の成分が全部 0 の N 次元ベクトル) によって決まる (3) の解を $\{a_n^{(j)}\}$ と書くことにすると、これにより N 個の解が作られることになる。この N 個の解は一次独立である。実際、定数 d_j $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ に対し、

$$\sum_{j=0}^{N-1} d_j a_n^{(j)} = d_0 a_n^{(0)} + d_1 a_n^{(1)} + \cdots + d_{N-1} a_n^{(N-1)} = 0 \tag{6}$$

がすべての $n \geq 0$ について成り立つとすると、(5) により $k \leq N-1$ に対して

$$a_k^{(j)} = 0 \ (j \neq k), \quad a_k^{(k)} = 1 \tag{7}$$

が成り立つから、(6) で $n = k$ とすれば $d_k = 0$ となる。結局 d_0, d_1, ... はすべて 0 となるので、よって $\{a_n^{(j)}\}$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ が一次独立であることがわかる。

また、(3) の任意の解 $\{a_n\}$ に対しても、

$$b_n = \sum_{j=0}^{N-1} a_j a_n^{(j)} = a_0 a_n^{(0)} + a_1 a_n^{(1)} + \cdots + a_{N-1} a_n^{(N-1)} \tag{8}$$

とすると、$\{b_n\}$ は $\{a_n^{(j)}\}$ の一次結合であるから 1. により (3) の解の一つであり、$0 \leq k \leq N-1$ に対しては、(7) より $b_k = a_k$ になっているので、$\{b_n\} = \{a_n\}$ であることがわかる。すなわち、任意の解 $\{a_n\}$ は (8) のように $\{a_n^{(j)}\}$ の一次結合として表されることになる。■

フィボナッチ数列 (1) で言えば、(2) は $a_0 = 0, a_1 = 1$ の解であるから、これは命題 1 の 2. の $\{a_n^{(1)}\}$ に当たる。もう一つの解である $\{a_n^{(0)}\}$ は、

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 0), \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \end{cases}$$

を満たすものとなるが、これは $a_2 = a_0 + a_1 = 1$ となるので、$\{a_n^{(1)}\}$ を一つずらしたものであることがわかる。すなわち、

$$a_n^{(0)} = a_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\} \tag{9}$$

となる。

3 解の構造

2 節の命題 1 により、(3) の解を求めるには N 個の線形独立な解を求めればよいことがわかったが、それはいわゆる特性方程式によって求めることができる。

N 次方程式

$$\sum_{j=0}^{N} p_j \lambda^j = \lambda^N + p_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = 0 \tag{10}$$

を、(3) の **特性方程式** と呼ぶ。これは一般には N 個の複素数解を持つが、条件 (4) によりそれらはいずれも 0 ではない。

(10) を λ^n 倍すると、

$$\lambda^{n+N} + p_{N-1}\lambda^{n+N-1} + \cdots + p_1\lambda^{n+1} + p_0\lambda^n = 0$$

となる。これはすなわち $a_n = \lambda^n$ が (3) の解の一つであることを意味している[1]。

よって、特性方程式 (10) の解 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ がすべて違っていれば、

$$\{\lambda_0^n\},\ \{\lambda_1^n\},\ \ldots,\ \{\lambda_{N-1}^n\}$$

が一次独立であることは、例えばファンデルモンドの行列式によってわかるから、(3) の一般解は、

$$a_n = \sum_{j=0}^{N-1} c_j\lambda_j^n = c_0\lambda_0^n + c_1\lambda_1^n + \cdots + c_{N-1}\lambda_{N-1}^n$$

と表されることになる。

問題は特性方程式 (10) が重解を持つ場合であるが、この場合は次が成り立つ。

命題 2

$\lambda = \lambda_0$ が (10) の k 重解の場合 $(2 \leq k \leq N)$、

$$\{n^j\lambda_0^n\} \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$$

の k 個の一次独立な数列がすべて (3) の解となる。

証明

$\lambda = \lambda_0$ が (10) の k 重解であれば、(10) の左辺は $(\lambda - \lambda_0)^k$ を因数に持つので、(10) の左辺を λ で微分した式に $\lambda = \lambda_0$ を代入すれば 0 となる。よって、

$$N\lambda_0^{N-1} + p_{N-1}(N-1)\lambda_0^{N-2} + \cdots p_2 2\lambda_0 + p_1 = 0$$

が成り立つ。この式を λ_0 倍すると

$$N\lambda_0^N + p_{N-1}(N-1)\lambda_0^{N-1} + \cdots + p_1\lambda_0 = 0 \tag{11}$$

となるが、これに、(10) に $\lambda = \lambda_0$ を代入して n 倍したものを加えると、

$$(n+N)\lambda_0^N + p_{N-1}(n+N-1)\lambda_0^{N-1} + \cdots + p_1(n+1)\lambda_0 + p_0 n = 0$$

[1]本来はむしろ逆で、$a_n = \lambda^n$ を (3) に代入して、その式を λ^n で割った式が (10) である。

となるが、これをさらに λ_0^n 倍すれば

$$(n+N)\lambda_0^{n+N} + p_{N-1}(n+N-1)\lambda_0^{n+N-1} + \cdots + p_0 n\lambda_0^n = 0$$

となる。これは $\{n\lambda_0^n\}$ が (3) の解であることを意味する。

$k \geq 3$ の場合は、(11) の左辺の λ_0 を λ で置き換えた式

$$N\lambda^N + p_{N-1}(N-1)\lambda^{N-1} + \cdots + p_1\lambda$$

は、(10) の左辺を 1 回微分して λ 倍した式であるから、$(\lambda-\lambda_0)^{k-1}$ を因数に持つ。よって、やはりこの式を微分したものに $\lambda=\lambda_0$ を代入すれば 0 となる。

$$N^2\lambda_0^{N-1} + p_{N-1}(N-1)^2\lambda_0^{N-2} + \cdots + p_1 = 0$$

これを λ_0 倍して、

$$N^2\lambda_0^{N} + p_{N-1}(N-1)^2\lambda_0^{N-1} + \cdots + p_1\lambda_0 = 0$$

とし、これに (11) の $2n$ 倍と、(10) に λ_0 を代入して n^2 倍したものを加えると、

$$\sum_{j=1}^{N} p_j j^2\lambda_0^j + \sum_{j=1}^{N} p_j 2nj\lambda_0^j + \sum_{j=0}^{N} p_j n^2\lambda_0^j = 0$$

より

$$\sum_{j=0}^{N} p_j (n+j)^2\lambda_0^j = 0$$

となるので、これを λ_0^n 倍すれば、

$$\sum_{j=0}^{N} p_j (n+j)^2\lambda_0^{n+j} = 0$$

となる。これは、$\{n^2\lambda_0^n\}$ が (3) の解であることを意味する。

以下、これを繰り返せばよい。■

これにより、(10) が重解を持つ場合も含めて (3) の解の構造がわかったことになる。

基本的には、$a_n = \lambda^n$ のように等比数列だと考えて得られるのが特性方程式 (10) なので、(3) の解がその形の解によってほぼ表現される、というところが (3) の解の構造の本質となる。

例えば、4 項漸化式

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0$$

の場合、$a_n = \lambda^n$ とすると

$$\lambda^{n+3} - 2\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} + 2\lambda^n = 0$$

となるので、λ^n で割ると

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

という 3 次方程式が得られるが、これが特性方程式である。これは、

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

と因数分解されるので、$\lambda = 1, -1, 2$ と求まる。よって、1^n, $(-1)^n$, 2^n という一次独立な解があるので、一般解は、

$$a_n = c_0 + c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

と表される。a_0, a_1, a_2 を与えれば、それにより c_0, c_1, c_2 が決定され、一つの解が決まることになる。

同様に、

$$a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

の場合は、特性方程式は $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ であり、これは

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

と因数分解され、$\lambda = 1$ は重解になるので、この場合の一次独立な解は命題 2 により $1^n, n \cdot 1^n, 2^n$ となり、よって、一般解は

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 2^n$$

となる。

フィボナッチ数列 $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ の場合は、特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \tag{12}$$

であり、この解は

$$\lambda = \lambda_0,\ \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

となる。よって、

$$a_n = c_0\lambda_0^n + c_1\lambda_1^n = c_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

と表される。(1) の $a_0 = 0, a_1 = 1$ となる解を求めると、

$$a_0 = c_0 + c_1 = 0, \quad a_1 = c_0\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_1\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

の連立方程式を解いて、

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

となり、これにより (2) が得られる。

つまり、$\sqrt{5}$ は、2 次方程式 (12) の解として出てくるのであって、それを満たす λ が

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$$

を満たすことで λ^n がフィボナッチ数列の解となるという構造から (2) のような式が出てくるわけである。このように、線形同次漸化式の解は、基本的には (ほぼ) 等比数列の一次結合という構造になっている。

4 連立漸化式

次に、連立の定数係数線形漸化式について考えてみる。

例えば、フィボナッチ数列の 2 つの解

$$b_n^{(0)} = \lambda_0^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad b_n^{(1)} = \lambda_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

には、$\sqrt{5}$ が含まれているが、これらを展開すればいずれも有理数と $\sqrt{5}$ の有理数倍の和で書ける。実際、二項定理により

$$b_n^{(0)} = x_n + y_n\sqrt{5}, \quad b_n^{(1)} = x_n - y_n\sqrt{5} \tag{13}$$

(x_n, y_n は有理数) の形になることが容易にわかる。この x_n, y_n の満たす漸化式を考えてみよう。

$$b_{n+1}^{(0)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = b_n^{(0)}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

であるから、

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{5} = (x_n + y_n\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{x_n + 5y_n}{2} + \frac{x_n + y_n}{2}\sqrt{5}$$

となる。よって、

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 5y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \tag{14}$$

となることがわかる。これに x_0, y_0 を与えることで、順次 x_1, y_1, x_2, y_2,... と数列の値が決まっていくことになる。

一般に、N 次元列ベクトルの列

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n^{(0)} \\ x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と、成分が定数である $n \times n$ 行列 A に対して、

$$X_{n+1} = AX_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

を **定数係数連立線形同次漸化式** と呼ぶ。(14) は、

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

の場合になっている。

(15) より、X_n は、

$$X_1 = AX_0, \quad X_2 = AX_1 = A^2X_0, \quad X_3 = AX_2 = A^3X_0, \quad \ldots$$

のようになるから、一般に

$$X_n = A^nX_0 \tag{17}$$

と書けることがわかる。よって、この行列の n 乗の A^n を行列の対角化などを使って求めれば、(17) によって一般項 X_n が求まることになるが、それは少し難しい。一方で、(15) を 2, 3 節で考察した単独の (連立でない) 線形同次漸化式に帰着させる方法もある。ここではそちらの方を説明する。

行列 A の固有方程式を

$$F(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$$

とすると、$F(\lambda)$ は λ^N の係数が 1 の N 次式になる。この $F(\lambda)$ を

$$F(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} q_j \lambda^j \tag{18}$$

と書く ($q_N = 1$) と、良く知られているようにケーリー・ハミルトンの関係式

$$F(A) = \sum_{j=0}^{N} q_j A^j = O \tag{19}$$

(ただし、$A^0 = E$) が成り立つ。この両辺を右から $A^n X_0$ 倍すると

$$\sum_{j=0}^{N} q_j A^{n+j} X_0 = O$$

となるが、(17) よりこれは

$$\sum_{j=0}^{N} q_j X_{n+j} = O$$

と書ける。そしてこれは、X_n の成分 $\{x_n^{(j)}\}$ すべてが、同じ線形同次漸化式

$$\sum_{j=0}^{N} q_j x_{n+j} = x_{n+N} + q_{N-1} x_{n+N-1} + \cdots + q_0 x_n = 0 \tag{20}$$

を満たすことを意味している。

なお、この q_0 は、$F(\lambda)$ の定数項であるから、

$$q_0 = F(0) = |-A| = (-1)^N |A|$$

となっている。よってこれが条件 (4) を満たすことは $|A| \neq 0$、すなわち A が正則であることと同値となる。以下、A は正則であるとして考える。

この場合は、3 節で見たように特性方程式により解が求まる。(20) の特性方程式は、(18) より固有方程式 $F(\lambda) = 0$ 自体であるから、つまり A の固有方程式の解である固有値によって (20) の解が求まることになる。

それによる (20) の N 個の一次独立な解を

$$\{\alpha_n^{(0)}\},\ \{\alpha_n^{(1)}\},\ \ldots,\ \{\alpha_n^{(N-1)}\}$$

とし、

$$Y_n = \begin{bmatrix} \alpha_n^{(0)} \\ \alpha_n^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(N-1)} \end{bmatrix}$$

とすると、次が言える。

補題 3

$\{\alpha_n^{(j)}\}$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ が一次独立なら n 次元列ベクトル $Y_0, Y_1, \ldots Y_{N-1}$ も一次独立。

証明

$Y_0, Y_1, \ldots Y_{N-1}$ が一次独立でないとすれば、$n \times n$ 行列

$$[Y_0\ Y_1\ \cdots\ Y_{N-1}]$$

の行列式の値は 0 となる。よって、この行列の行ベクトル $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{N-1}$ も一次独立ではないことになる。ここで、

$$Z_j = [\alpha_0^{(j)}\ \alpha_1^{(j)}\ \cdots\ \alpha_{N-1}^{(j)}]$$

であるから、これらが一次従属ならば、

$$(d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0) \tag{21}$$

である定数 d_j に対して、

$$d_0 Z_0 + d_1 Z_1 + \cdots + d_{N-1} Z_{N-1} = O$$

と書けることになる。成分で見ればこれは、

$$\sum_{j=0}^{N-1} d_j \alpha_k^{(j)} = d_0 \alpha_k^{(0)} + d_1 \alpha_k^{(1)} + \cdots + d_{N-1} \alpha_k^{(N-1)} = 0 \tag{22}$$

が $k = 0, 1, \ldots N-1$ に対して成り立つことを意味する。(20) を考えれば、この (22) は $k \geq N$ に対しても成り立つことになる。例えば $k = N$ に対しては、

$$\sum_{j=0}^{N-1} d_j a_N^{(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} d_j \left(-\sum_{m=0}^{N-1} q_m a_m^{(j)} \right) = -\sum_{m=0}^{N-1} q_m \left(\sum_{j=0}^{N-1} d_j a_m^{(j)} \right) = 0$$

が (22) から言える。以下同様である。そして (21) と (22) は、$\{\alpha_n^{(j)}\}$ $(j=0,1,\ldots,N-1)$ が一次従属であることを意味する。■

$\{\alpha_n^{(j)}\}$ $(j=0,1,\ldots,N-1)$ は、(20) の N 個の一次独立な解であるから、命題 1 によって X_n の成分 $\{x_n^{(k)}\}$ はそれらの一次結合で表される。よって、

$$x_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{N-1} c_{k,j}\alpha_n^{(j)}$$

のようになるので、これにより X_n はこの係数による行列 $C=[c_{k,j}]$ と Y_n により

$$X_n = CY_n \quad (C=[c_{k,j}]) \tag{23}$$

と書けることになる。後は、この係数行列 C を初期値から決めればよい。すなわち、C を X_0 と A を用いて表せばよいことになる。(23) の $n=0,1,\ldots,N-1$ の式を行列にまとめて書けば、

$$[X_0\ X_1\ \cdots\ X_{N-1}] = C[Y_0\ Y_1\ \cdots\ Y_{N-1}]$$

となるが、補題 3 より行列 $[Y_0\ Y_1\ \cdots\ Y_{N-1}]$ は正則であり、また (17) を用いて左辺を書き直せば、結局 C は

$$C = [X_0\ AX_0\ \cdots\ A^{N-1}X_0][Y_0\ Y_1\ \cdots\ Y_{N-1}]^{-1} \tag{24}$$

と書けることになる。この (23) と (24) により、行列 A の n 乗の計算をせずに連立漸化式の解が求められることになる。

例として、今の方法を (14) に適用してみる。初期値は、題意より $x_0=1,\ y_0=0$ とする。この場合、A は (16) より、固有方程式は

$$|\lambda A - E| = \begin{vmatrix} \lambda-1/2 & -5/2 \\ -1/2 & \lambda-1/2 \end{vmatrix} = (\lambda-1/2)^2 - 5/4 = \lambda^2-\lambda-1 = 0$$

となって、結局フィボナッチ数列の特性方程式と同じになる。よって、一次独立な二つの解は

$$\lambda_0^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \lambda_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

であり、よって

$$x_n = a\lambda_0^n + b\lambda_1^n, \quad y_n = c\lambda_0^n + d\lambda_1^n$$

つまり、

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \end{bmatrix}$$

と書ける。この係数行列を求めるには、$n = 0, n = 1$ を考えれば、

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

より、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1/2 & -\lambda_0 + 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\sqrt{5}/2 & -\sqrt{5}/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より、結局、

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_0^n + \lambda_1^n}{2} \\ \dfrac{\lambda_0^n - \lambda_1^n}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

となる。

x_n は、$x_0 = 1, x_1 = 1/2$ に対するフィボナッチ数列の解、y_n は $y_0 = 0, y_1 = 1/2$ に対するフィボナッチ数列の解となっていて、これらは 2 節の最後の $a_n^{(0)}, a_n^{(1)}$ を用いれば、

$$x_n = a_n^{(0)} + \frac{1}{2}a_n^{(1)}, \quad y_n = \frac{1}{2}a_n^{(1)}$$

と書けることもわかる。

なお、この最後の y_n と $a_n^{(1)}$ (= 元々のフィボナッチ数列 a_n) との関係は、(13) からもわかる。すなわち、(2) および (13) より、

$$a_n = a_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(b_n^{(0)} - b_n^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{5}}2y_n\sqrt{5} = 2y_n$$

だからである。つまり、元のフィボナッチ数列の値は、λ_0^n の $\sqrt{5}$ の係数である有理数の 2 倍であることになる。

さらに、(9) より、$a_n^{(0)} = a_{n-1}$ であるから、

$$x_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n, \quad y_n = \frac{1}{2}a_n$$

となり、そして $\lambda_0^n = x_n + y_n\sqrt{5}$ はフィボナッチ数列 a_n を用いて

$$\lambda_0^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n\right) + \frac{1}{2}a_n\sqrt{5} = \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right) + \frac{1}{2}a_n\sqrt{5}$$

と書けることになる。

5 関数表現

フィボナッチ数列の一般項を表す式 (2) は、実はある関数を使ってある意味で一つの形にまとめることができる。それを、まず別の例で簡単に紹介しよう。

特性方程式が複素数解を持つような次の 3 項漸化式を考える。

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad (n \geq 0), \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \end{cases} \tag{25}$$

この場合、特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

であるから解は、

$$\lambda = \lambda_0, \lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ 1 - \sqrt{3}i$$

となる。よって、一般解は、

$$a_n = c_0(1 + \sqrt{3}i)^n + c_1(1 - \sqrt{3}i)^n$$

と書けるので、$n = 0, 1$ により

$$a_0 = c_0 + c_1 = 0, \quad a_1 = c_0(1 + \sqrt{3}i) + c_1(1 - \sqrt{3}i) = 1$$

となるので、これを解けば

$$c_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}i}, \quad c_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}i}$$

となるから、a_n は、もちろん (25) よりすべての項が整数であるが、その一般項は i を用いて

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}i}\{(1 + \sqrt{3}i)^n - (1 - \sqrt{3}i)^n\} \tag{26}$$

と表されることになる。

一方で、これを複素数を使わない表現にもできる。オイラーの公式を使えば、

$$\lambda_0 = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{\pi i/3}, \quad \lambda_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2e^{-\pi i/3}$$

となるので、一般解を

$$a_n = c_0\lambda_0^n + c_1\lambda_1^n = c_0 2^n e^{n\pi i/3} + c_1 2^n e^{-n\pi i/3} = 2^n\left(d_0 \cos\frac{n\pi}{3} + d_1 \sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

と三角関数により実数形で書くことができる。$n=0,1$ により

$$a_0 = d_0 \cos 0 = 0, \quad a_1 = 2\left(d_0 \cos\frac{\pi}{3} + d_1 \sin\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

であるからこれを解いて

$$d_0 = 0,\ d_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となるので、よって、a_n は

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3} \tag{27}$$

と、i を使わずに書ける。このように 2 つの等比数列の和による解 (26) が、三角関数を使えば積による一つの式で表すことができる。

実はこれに似たことをフィボナッチ数列の解 (2) に対しても行うことができる。(2) は一見 (26) に似ていなくもないので、λ_0^n などを指数の形に書けば、同様のことができるのではないかと想像されるだろう。今、

$$\lambda_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = e^{\mu}$$

とすると、μ は

$$\mu = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となり、このとき λ_1 は

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -e^{-\mu}$$

となるから、(2) は、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\{(e^{\mu})^n - (-e^{-\mu})^n\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\{e^{\mu n} - (-1)^n e^{-\mu n}\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}(e^{\mu n} - e^{-\mu n}) & (n\ \text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}(e^{\mu n} + e^{-\mu n}) & (n\ \text{が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるので、双曲線関数を使えば、

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \sinh\left(n \log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cosh\left(n \log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \tag{28}$$

と書けることになる。

もちろん、この式 (28) が (2) よりも便利な式かというと必ずしもそうとは言えないだろうが、n が一箇所に収まるという点で (28) の方が便利な場合ももしかしたらあるかもしれない。

6 非同次の線形漸化式

最後に、非同次の定数係数線形漸化式

$$\sum_{j=0}^{N} p_j a_{n+j} = a_{n+N} + p_{N-1} a_{n+N-1} + \cdots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = f_n, \quad (n \geq 0) \tag{29}$$

($\{f_n\}$ は既知の数列、$\{a_n\}$ が未知の数列) についても簡単に述べておこう。

次の事実は、命題 1 と同様に容易にわかる (証明は略す)。

命題 4

非同次の漸化式 (29) の一般解は、(29) の一つの解と、同次の漸化式 (3) の一般解の和で表される。

これにより、(29) の一般解を求めるには、(29) のなんらかの解 (特殊解) を一つ求めれば良いことになるが、その解法を述べるために、次のような記法、用語を用いることにする。

まず、非同次の漸化式 (29) に対しても、(10) を (29) の特性方程式と呼び、(10) の左辺を (29) の **特性多項式** と呼ぶ。逆に、最高次数の係数が 1 で、定数項が 0 でない多項式

$$F(\lambda) = \lambda^N + p_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + p_0$$

を特性多項式とする漸化式 (29) の左辺を、この多項式 $F(\lambda)$ に **付随する漸化式** と呼び、

$$D(F, a, n) = a_{n+N} + p_{N-1}a_{n+N-1} + \cdots + p_0 a_n$$

のような記号で書くことにする。

命題 5

1. $\alpha \neq 0$ のとき、非同次漸化式

$$a_{n+1} - \alpha a_n = f_n \quad (n \geq 0) \tag{30}$$

の解の一つは、

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-k-1} f_k \quad (n \geq 1), \quad a_0 = 0 \tag{31}$$

で与えられる。

2. (29) の特性多項式 $F(\lambda)$ が、最高次数の係数が 1 の 2 つの多項式 $G(\lambda)$, $H(\lambda)$ の積に因数分解されるとき、数列 b_n をこの $G(\lambda)$ に付随する漸化式 $b_n = D(G, a, n)$ とすると、b_n は $H(\lambda)$ を特性多項式に持つ漸化式 $D(H, b, n) = f_n$ を満たす (すなわち $D(F, a, n) = D(H, b, n)$ が成り立つ)。

証明

1. $\alpha \neq 0$ より、(30) の n を k として、その両辺を α^{k+1} で割れば

$$\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k} = \frac{f_k}{\alpha^{k+1}}$$

となる。$n \geq 1$ に対してこれを $k = 0$ から $k = n - 1$ まで加えれば、

$$\frac{a_n}{\alpha^n} - \frac{a_0}{1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k}{\alpha^{k+1}}$$

となるので、$a_0 = 0$ とすれば (31) が得られる。

2. まず、G が 1 次式のときに示す。

$$G(\lambda) = \lambda - \alpha, \quad H(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} q_j \lambda^j, \quad F(\lambda) = (\lambda - \alpha)H(\lambda)$$

とすると、$b_n = D(G, a, n) = a_{n+1} - \alpha a_n$ より

$$\begin{aligned} D(H, b, n) &= \sum_{j=0}^{N-1} q_j b_{n+j} = \sum_{j=0}^{N-1} q_j (a_{n+j+1} - \alpha a_{n+j}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} q_{j-1} a_{n+j} - \sum_{j=0}^{N-1} \alpha q_j a_{n+j} \\ &= q_{N-1} a_{n+N} + \sum_{j=1}^{N-1} (q_{j-1} - \alpha q_j) a_{n+j} - \alpha q_0 a_n \end{aligned} \tag{32}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= (\lambda - \alpha) \sum_{j=0}^{N-1} q_j \lambda^j = \sum_{j=0}^{N-1} q_j (\lambda^{j+1} - \alpha \lambda^j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} q_{j-1} \lambda^j - \sum_{j=0}^{N-1} \alpha q_j \lambda^j \\ &= q_{N-1} \lambda^N + \sum_{j=1}^{N-1} (q_{j-1} - \alpha q_j) \lambda^j - \alpha q_0 \end{aligned} \tag{33}$$

となり、確かに (32) が (33) に付随する漸化式であることがわかる。よって (32) の右辺は $D(F, a, n)$ と書けるから

$$D(H, b, n) = D(F, a, n) = D(HG, a, n) \tag{34}$$

が一次式の G について言えたことになる。

G が 2 次以上の場合は、(34) を繰り返し用いればよい。例えば G が 2 次の場合、

$$G(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

と因数分解して $c_n = D(\lambda - \beta, a, n) = a_{n+1} - \beta a_n$ とすれば、(34) より $b_n = D(G, a, n)$ は

$$b_n = D((\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), a, n) = D(\lambda - \alpha, c, n)$$

となるから、再び (34) を繰り返し使うことで

$$D(H,b,n) = D((\lambda-\alpha)H,c,n) = D((\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)H,a,n) = D(F,a,n)$$

が得られる。■

ここで、命題 5 の 1. の (31) の右辺は、**たたみこみ** と呼ばれる次の記号

$$(P_n * Q_n)(j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{j} P_{j-k}Q_k & (j \geq 0), \\ 0 & (j < 0) \end{cases}$$

を使うと $(\alpha^n * f_n)(n-1)$ と書けることを注意しておく。

この命題 5 により、非同次の漸化式 (29) の特殊解を求める問題は、一つ項数の低い漸化式に帰着できることがわかる。

例えば特性多項式 $F(\lambda)$ が

$$F(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda^2+p\lambda+q) = \lambda^3+(p-\alpha)\lambda^2+(q-\alpha p)\lambda-\alpha q$$

の 3 次式の場合を考えてみよう。この場合、非同次の漸化式は

$$a_{n+3}+(p-\alpha)a_{n+2}+(q-\alpha p)a_{n+1}-\alpha q a_n = f_n \tag{35}$$

となるが、命題 5 の 2. は、

$$b_n = D(\lambda^2+p\lambda+q,a,n) = a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n \tag{36}$$

とすると、(35) の左辺が

$$D(F,a,n) = D(\lambda-\alpha,b,n) = b_{n+1}-\alpha b_n \tag{37}$$

となることを意味している。なおこれは、(37) に (36) を代入することで (35) の左辺が得られることを直接確認することもできる。

よって、(35) は b_n では

$$b_{n+1}-\alpha b_n = f_n$$

となるので、命題 5 の 1. により

$$b_n = (\alpha^n * f_n)(n-1) \tag{38}$$

がその一つの解となる。よって、(36), (38) により

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = (\alpha^n * f_n)(n-1) \tag{39}$$

となり、4 項の非同次漸化式 (35) が 3 項の非同次漸化式 (39) に帰着されることになる。同じように $\lambda^2 + p\lambda + q$ を因数分解すれば 2 項の漸化式に帰着され、最終的に a_n が求まることになる。

されに今の考察から、例えば $F(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ の場合、

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = f_n \tag{40}$$

の特殊解は、

$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha^n * \{(\beta^n * f_n)(n-1)\})(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k}(\beta^n * f_n)(k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-1-k} \sum_{j=0}^{k-1} \beta^{k-1-j} f_j = \sum_{m=0}^{n-2} \alpha^{n-2-m} \sum_{j=0}^{m} \beta^{m-j} f_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} f_j \sum_{m=j}^{n-2} \alpha^{n-2-m}\beta^{m-j} \end{aligned}$$

となることがわかる。この最後の和は、$\alpha \neq \beta$ のときは等比級数で、

$$\begin{aligned} \sum_{m=j}^{n-2} \alpha^{n-2-m}\beta^{m-j} &= \alpha^{n-2-j} + \alpha^{n-3-j}\beta + \cdots + \beta^{n-2-j} \\ &= \alpha^{n-2-j}\frac{(\beta/\alpha)^{n-1-j} - 1}{(\beta/\alpha) - 1} = \frac{\beta^{n-1-j} - \alpha^{n-1-j}}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

となり、$\alpha = \beta$ のときは定数和で、

$$\sum_{m=j}^{n-2} \alpha^{n-2-m}\beta^{m-j} = \sum_{m=j}^{n-2} \alpha^{n-2-j} = (n-1-j)\alpha^{n-2-j}$$

となる。よって、(40) の 特殊解は、$a_0 = a_1 = 0$, $n \geq 2$ に対しては、

$$a_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-2} \frac{\beta^{n-1-j} - \alpha^{n-1-j}}{\beta - \alpha} f_j & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j)\alpha^{n-2-j} f_j & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

なお、高校の数学での漸化式の解法では、特性方程式はむしろ本節のような使い方をするのが主のようで、例えば

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

の一般項を求めるのに、特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 つの解 α, β を使って、命題 5 の 2. のような変形を行い、

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n \\ &= (a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) - \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

とし、$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とおいて

$$b_{n+1} - \beta b_n = 0$$

より b_n を等比数列として求め、そこから命題 5 の 1. のような方法で a_n を求めること行われているようである。

なお、$\alpha \neq \beta$ の場合は、(41) の α と β を入れかえた

$$(a_{n+2} - \beta a_{n+1}) - \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) = 0$$

という変形を行うことで $c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ とおいて c_n を求めることができるから

$$a_{n+1} - \alpha a_n = b_n, \quad a_{n+1} - \beta a_n = c_n$$

から a_{n+1} を消去して a_n を求める、という方法もある。

7 最後に

本稿では最も基本的な漸化式である定数係数の線形漸化式に関する一般論をいくつか紹介し、フィボナッチ数列に関する考察を行なった。

これは実は最近「数学ガール」(結城浩、ソフトバンククリエイティブ) なる本でフィボナッチ数列の話を目にしたことから、ふと漸化式に関してまとめてみようと思い立ったものであるが、本稿にはさして目新しいことが書いてあるわけではなく、数列の一般論や「差分方程式」としてはよく知られていることばかりである。

しかし、高校だけでなく大学の講義でも (理学部でも工学部でも) こういう話が取り扱われることはほとんどなく、そのためそのような一般書は、書店や図書館などでもあまり目にすることがないだろうと思うので、その点では多少意味があるのではないかと思う。

なお、線形常微分方程式を既習の方は気がついたと思うが、本稿の話は、定数係数線形常微分方程式の理論とほぼ同じである。同次と非同次の関係、同次方程式の解空間、特性方程式と解の関係、特性方程式が重解を持つ場合や複素数解を持つ場合、いずれも常微分方程式の解 (連続的な関数) に用いられる手法を数列の漸化式の解 (離散的な数列) に焼き直したものになっていて、連続と離散の深い類似性の一例になっている[2]。

また、単独の N 項の漸化式と連立の漸化式はお互いに行き来することができるので、本稿の 4 節のように連立の漸化式を N 項の単独漸化式に帰着させる方法とは逆に、N 項単独漸化式を連立の漸化式に帰着させ、行列の n 乗の計算で説明する、という方法もある。しかし、行列の n 乗の話をするには、行列の対角化や Jordan 標準形など、本稿よりさらに深い線形代数の知識が必要となるので、そちらの方向は本稿では避けた。

特性方程式と漸化式の関係 (命題 5 の 2.) も、常微分方程式の演算子法に対応し、数列の前進演算子を使って説明する方が綺麗に説明できるのであるが、なるべく初等的な説明を、と考えてあえてそれは使わなかった。

以上、本稿の内容は有用なものであるとはあまり思えないが、例えば高校の漸化式の一般化の話などとしてでも、何かの参考になれば幸いである。

[2]過去に、逆に常微分方程式の講義で、特性方程式は数列の漸化式に対するものと同じか、と質問を受けたこともある。