2006 年 9 月 26 日

ベキ級数論入門

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

テイラー展開やマクローリン展開のように、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の形の無限級数を一般に **ベキ級数**[1]と呼ぶ。

工学では、テイラー展開は色んな場面でよく使われているようであるが、多くの場合それは無限級数ではなくて、そのうちの有限項のみが近似式 (つまり多項式近似) として使われるようである。

そのためか、無限級数としてのベキ級数に対する色々な性質は、工学部初年度用の解析学の本には詳しくはとり上げられないが、しかしそれらには有限項の多項式近似しか使わない人にとっても有用なもの、知っておくべきものが多い。

よって、ここでは丁寧 (で厳密) な証明はあまりせずに、それらのいくつかを例を混じえて紹介することにする。

2 無限級数の一般論

この節では、ベキ級数とは限らない無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \tag{1}$$

に関する一般論をいくつか紹介する。

[1]「ベキ」は漢字で書くと「冪」または「羃」で、累乗を意味する。なお「巾」と書かれることもあるが、これはこれらの字を簡略化して下の部分のみを取った書き方で、元々は「巾」に「ベキ」の意味はなく別字。

2.1 収束の定義と基本性質

無限級数 (1) が **収束する** とは、n 項までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \tag{2}$$

が $n \to \infty$ のときに収束すること、と定義される。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

収束しない場合、**発散する** という。例えば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

は、

$$S_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

なので収束しない。

命題 1

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

証明

$S_n - S_{n-1} = \alpha_n$ $(n \geq 2)$ なので、仮定より $n \to \infty$ のとき

$$S_n \to S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad S_{n-1} \to S$$

となるので、$\alpha_n \to S - S = 0$ ■

この命題 1 の逆、すなわち $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ であったとしても $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ が収束するとは限らない。例えば、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \tag{3}$$

は、$\alpha_n = 1/n \to 0$ だが、この級数 (3) は ∞ に発散する。それは、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = \infty\end{aligned}$$

となるからである。しかし、少なくとも $\lim_{n\to\infty}\alpha_n \neq 0$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ が発散することは言える。

収束級数に対しては、容易に次も言える (証明は省略)。

命題 2

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ が収束する級数であるとき、

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$ も収束し、$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$
2. 任意の定数 c に対して $\sum_{n=1}^{\infty}c\alpha_n$ も収束し、$\sum_{n=1}^{\infty}c\alpha_n = c\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$
3. すべての n に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ であれば $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$

また級数は、いくつかの項をまとめて考えても収束、発散は変わらないことが言える。

命題 3

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ に対して、$\{\alpha_n\}$ を m 個ずつまとめた項からなる数列 $\{\beta_n\}$ を

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m \\
\beta_2 &= a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m} \\
\beta_3 &= a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{3m} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

とし、その和を $\hat{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ とすると、$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ であれば、S の収束、発散と、$\hat{S}$ の収束、発散とは一致し、$S = \hat{S}$ となる。

証明

簡単のため、$m = 3$ として証明する。$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ の部分和をそれぞれ $S_n, \hat{S}_n$ と書くことにすると、

$$
\hat{S}_n = S_{3n}, \quad S_{3n+1} = \hat{S}_n + \alpha_{3n+1}, \quad S_{3n+2} = \hat{S}_n + \alpha_{3n+1} + \alpha_{3n+2}
$$

であり、よって、$S_n \to S$ ならば $\hat{S}_n = S_{3n} \to S$ となる。

逆に、$\hat{S}_n \to \hat{S}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
S_{3n} &= \hat{S}_n \to \hat{S}, \\
S_{3n+1} &= \hat{S}_n + \alpha_{3n+1} \to \hat{S} + 0 = \hat{S} \\
S_{3n+2} &= \hat{S}_n + \alpha_{3n+1} + \alpha_{3n+2} \to \hat{S} + 0 + 0 = \hat{S}
\end{aligned}
$$

となるので、$S_n \to \hat{S}$ となる。■

2.2 絶対収束

$\alpha_n \geq 0$ のとき (このとき **正項級数** という)、S_n は単調に増加する数列となるが、単調増加数列に関しては次のことが知られている。

定理 4

単調増加数列 $\{\beta_n\}$ は、上に有界ならばある値に収束する。上に有界でなければ ∞ に発散する。

これは、実数の定義と深く関わる定理で、証明は省略する。

なお、数列 $\{\gamma_n\}$ が **上に有界である** とは、

$$\gamma_n \leq N \quad (\text{すべての } n \text{ に対して})$$

となるような有限の値 N が存在することをいう。例えば $\{1-1/n\} = \{0, 1/2, 2/3, \ldots\}$ は上に有界であるが、$\{\log n\}$ は上に有界ではない。

よって正項級数は、上に有界で収束するか、∞ に発散するか、のいずれかとなる。

この定理 4 から、次のこともすぐにわかる。

命題 5

$0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ のとき、

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ も収束する
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ も発散する

この命題は、以下のようにもう少し拡張することもできる。

命題 6

$\alpha_n \geq 0,\ \beta_n \geq 0$ で、$\alpha_n/\beta_n \to M > 0$ のとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ の収束、発散と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ の収束、発散とは一致する。

証明

$\alpha_n/\beta_n \to M > 0$ より、十分大きい N より先の n に対しては少なくとも $M/2 < \alpha_n/\beta_n < 2M$ が成り立つ[2]。よって、$n \geq N$ に対しては、$\alpha_n < 2M\beta n$, および $\beta_n < (2/M)\alpha_n$ となるから、命題 5 より $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ の収束、発散と $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ の収束、発散とは一致する (収束、発散は、十分先の n のみで考えればよい)。■

無限級数 (1) が **絶対収束する** とは、$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ が有限の値に収束することを言う[3]。

命題 7

絶対収束する無限級数は収束する。

証明

実数 x に対して、正の部分 x^+ と負の部分 x^- を次のように定める:

$$x^+ = \begin{cases} x & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad , \quad x^- = \begin{cases} 0 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

x^+ と x^- のはどちらか一方は常に 0 で、

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad 0 \leq x^+, x^- \leq |x|$$

が成り立つ。

これを用いて、

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^+ - \alpha_k^-) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^+ - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^-$$

と分けると、$0 \leq \alpha_k^+ \leq |\alpha_k|, 0 \leq \alpha_k^- \leq |\alpha_k|$ で、仮定より $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ は有限の値に収束するから、命題 5 より $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^+, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^-$ も有限の値に収束する。よって、$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ も有限の値に収束する。■

[2] ここの議論は、極限の「厳密な」定義とも関連するので、よくわからない場合は例えば [1] を参照のこと。

[3]「絶対に」収束する、という意味ではなく、「絶対収束」という用語であることに注意。

系 8

(1) が絶対収束するとき、

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

証明

上の命題 7 の証明から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{+} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-}$$

がすぐにわかる。よって、

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{+} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-} = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

■

しかし、命題 7 の逆は言えない。つまり、$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ は収束しても $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ が収束するとは限らない。例えば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{4}$$

は $\log 2$ に収束する (3.5 節で示す) が、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

このように、収束はするが絶対収束しない級数を、**条件収束** するという。一般に条件収束級数の取り扱いは厄介であり、級数に関する性質の多くは絶対収束級数に対するものである。ここでは条件収束級数の厄介さを物語る次の命題のみを証明なしに紹介しておく。

命題 9

1. 条件収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ に対しては、$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^- = \infty$、すなわち、正の部分も負の部分も無限大に発散する。
2. 条件収束級数は、項の順序を (無限回) 前後に入れ換えることにより、どんな実数値にでも収束させることができる。しかし絶対収束級数の場合は、順序の入れ替えを行っても値は変わらない。

ここでいう「無限回の項の順序の入れ変え」とは単に級数の 3 番目と 4 番目の項だけを入れかえる、ということではなく (それでは値は変わらない)、例えば (4) で言えば、負の項が 2 つおきになるように後ろにずらして、

$$\hat{S} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{5}$$

のようにすることを意味する。この値が、実際に (4) (これを S とする) とは異なることを以下に示す。

S は、命題 3 より 2 つずまとめて考えると、

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$$

と書くことができて、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n-1)} \times n^2 = \frac{1}{4}$$

となり、後で示すように $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから、命題 6 より S も収束する。

一方 $\hat{S}$ は、命題 3 より 3 つずまとめると

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n-3}{2n(4n-3)(4n-1)}
\end{aligned}$$

であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-3}{2n(4n-3)(4n-1)}\times n^2=\frac{1}{4}$$

だから $\hat{S}$ も収束する。この $\hat{S}$ と S の差を考えると、

$$\begin{aligned}\hat{S}-S &= \left(1+\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n-1)(2n-1)}\end{aligned}$$

となるが、これも上と同様に収束し、値は明らかに正の値となる。よって、$0<S<\hat{S}<\infty$ となる (実際に $\hat{S}$ が $(3/2)\log 2$ であることを 3.5 節で示す)。

2.3 収束判定法

無限級数の値を求めることは難しい問題であるが、それ以前に収束するかどうかを判定することも容易ではなく、一般的な判定法は残念ながら存在しない。ここでは、よく用いられる 3 つの判定法を紹介する。

命題 10

正項級数 (1) に対して ($\alpha_n\geq 0$)、

1. (ダランベールの判定法)

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\ell$$

   のとき、$0\leq\ell<1$ ならば (1) は収束し、$\ell>1$ ならば (1) は発散する

2. (コーシーの判定法)

   $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\ell$$

   のとき、$0\leq\ell<1$ ならば (1) は収束し、$\ell>1$ ならば (1) は発散する。

3. (積分判定法)
$f(x)$ が $x \geq 1$ で定義された単調減少関数で、$f(x) \geq 0$ で、$x = n$ (自然数) に対して $f(n) = \alpha_n$ になるとき (よって α_n も単調減少数列である必要がある)、広義積分

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

の収束、発散と (1) の収束、発散は一致する。

証明

1.
$0 \leq \ell < 1$ のときは、それが極限であるから、$\ell < \ell' < 1$ なる ℓ' に対して十分大きい N から先の n $(n \geq N)$ に対しては

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < \ell'$$

が成り立つはずである。よって、$n > N$ に対して

$$\alpha_n < \ell' \alpha_{n-1} < (\ell')^2 \alpha_{n-2} < \cdots < (\ell')^{n-N} \alpha_N$$

となるので、

$$\beta_n = \begin{cases} \alpha_n & (1 \leq n < N) \\ (\ell')^{n-N}\alpha_N & (n \geq N) \end{cases}$$

とすると、$0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ で、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \beta_k &= \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k + \sum_{k=N}^n (\ell')^{k-N}\alpha_N = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k + \alpha_N \frac{1-(\ell')^{n-N+1}}{1-\ell'} \\ &\to \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k + \frac{\alpha_N}{1-\ell'} \quad (n \to \infty \text{ のとき}) \end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \beta_n$ は収束する。よって $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ も収束する。

$\ell > 1$ のときは、$\ell > \ell' > 1$ なる ℓ' に対して十分大きい N から先の n で

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > \ell'$$

が成り立つはずなので、$\alpha_n > (\ell')^{n-N}\alpha_N$ となり、$\ell' > 1$ より $(\ell')^{n-N}\alpha_N \to \infty$ ($n \to \infty$ のとき) となるので、α_n も無限大に発散するので明らかにこの級数は収束しない。

2.
この場合も、1. の場合とほぼ同様。$\ell < 1$ なら、$\ell < \ell' < 1$ に対してある N から先の n で $\sqrt[n]{\alpha_n} < \ell'$ が成り立ち、よって $\alpha_n < (\ell')^n$ となるので、

$$\gamma_n = \begin{cases} \alpha_n & (1 \leq n < N) \\ (\ell')^n & (n \geq N) \end{cases}$$

とすればよい。発散の方も 1. と同様。

3.
$f(x)$ は単調減少関数であるから、$k \leq x \leq k+1$ では、$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ なので、これをこの範囲で積分すると

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)$$

が成り立つ ($k \geq 1$)。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx, \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k &= \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \\ &= f(1) + \int_1^n f(x)dx \end{aligned}$$

となる。よって、$\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ が ∞ に発散すれば $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ も発散し、$\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ も収束する。■

これらの判定法は正項とは限らない級数の場合も適用でき、例えばダランベールの判定法ならば、一般の級数に対しては、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \ell$$

のとき、$0 \leq \ell < 1$ ならば (1) は絶対収束、$\ell > 1$ ならば発散、のようになる。

例をいくつか紹介する。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{6}$$

この級数の場合、ダランベールの判定法により

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$

であるから収束することが言える (実際には e に収束)。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \tag{7}$$

この場合、

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1 \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$

であるから、ダランベールの判定法では収束の判定ができない。この場合は、$1/x^2$ が単調減少関数であり、広義積分は

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$$

となって収束するので、(7) も収束する (実際には $\pi^2/6$ に収束することが知られている)。一方、$1/x$ の場合は、

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{x=1}^{x=\infty} = \lim_{x\to\infty} \log|x| - \log 1 = \infty$$

となるので、前にも見たように

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

は発散する。

3 ベキ級数

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \tag{8}$$

の形の無限級数をベキ級数という。これは、x の関数であり、$x = 0$ のときは必ず収束し、その値は a_0 に等しい。

3.1 収束半径

2.2 節の議論により、

$$|a_n x^n| \leq M_n, \quad \sum_{n=0}^\infty M_n < \infty$$

となるような M_n が存在すればこのベキ級数は、この条件が満たされる x に対して絶対収束する。このような級数 $\sum_{n=0}^\infty M_n$ をこのベキ級数 (8) の**優級数** という。

今、もし

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell > 0 \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$

である場合、

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \to \ell|x|$$

であるから、ダランベールの判定法により $\ell|x| < 1$、すなわち $|x| < 1/\ell$ のときベキ級数 (8) は絶対収束し、$|x| > 1/\ell$ のときは発散することがわかる。つまり、0 を中心として、$-1/\ell < x < 1/\ell$ の範囲で収束することになるが、一般に、次のことが言える。

定理 11

どんなベキ級数 (8) に対しても、

- $|x| < r$ ならば絶対収束、
- $|x| > r$ ならば発散

となるような $0 \leq r \leq \infty$ が存在する。ただし、$r = 0$ のときは、$x = 0$ 以外では収束しない ($|x| > 0$ ならば発散)、$r = \infty$ のときは、すべての x に対して収束する ($|x| < \infty$ ならば収束) ことを意味する。

この r を、このベキ級数の **収束半径** と呼ぶ。

$r = 0$ であるようなベキ級数としては、例えば

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

があるし、$r = \infty$ であるようなベキ級数としては、例えば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (= e^x)$$

がある。前者は

$$\left|\frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right| = (n+1)|x| \to \begin{cases} \infty & (|x| > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので、$x \neq 0$ ならばこのベキ級数は収束しない。後者は

$$\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

となるので、どんな x に対しても絶対収束する。

収束半径は、一般に次のような式であらわされることが知られている:

$$r = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

式の意味も含めて、詳しいことに関しては、解析学の詳しい本、あるいは級数論に関する書籍を参照してもらいたいが、コーシーの判別法と関連があることがぼんやりと想像されると思う。実際、この節の最初に紹介したように、

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \text{ または } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

ならば $r = 1/\ell$ となる。

マクローリン展開の有限項による近似式も、収束半径内では近似になるが、収束半径外では近似にはならないし、収束半径内でも収束半径に近い x ではその近似の精度は悪くなる。

3.2 項別微分、項別積分

有限和の場合には、

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$$

のように、和の微分は項別に微分したものと等しくなるが、無限和の場合もそれが成り立つかどうかは明らかではない。それは、無限和が極限で定義されるだけでなく微

分自体も極限で定義されるため、そこに極限と極限の順序交換が必要になり、それが可能であるためにはある種の条件が必要になるからである。

しかし、ベキ級数の項別微分可能性に関しては、次の定理がなりたつ。

定理 12

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ の収束半径を r とすると、形式的に項別に微分して得られるベキ級数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

の収束半径も r であり、$|x|<r$ で $f(x)$ は微分可能 (よって連続) で、$f'(x)=g(x)$ が成り立つ。

証明

一般の場合の証明は面倒なので、簡単のため、

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell \quad (n\to\infty \text{ のとき})$$

(よって $r=1/\ell$) の場合に限って証明を行う。

まず、$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ の収束半径も r であることは、

$$\left|\frac{(n+2)a_{n+2}}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \frac{n+2}{n+1}\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right| \to 1\times\ell=\ell$$

より O.K. よって、あとは $|x_0|<r$ なる x_0 に対して、

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = g(x_0) \tag{9}$$

となることを言えばよい (これも無限和に対しては明らかではない)。

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - g(x_0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta x}\Big[\{a_0 + a_1(x_0+\Delta x) + a_2(x_0+\Delta x)^2 + \cdots\} - (a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots)\Big] \\
&\quad - (a_1 + 2a_2 x_0 + 3a_3 x_0^2 + \cdots) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left\{\frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} - n x_0^{n-1}\right\}
\end{aligned}
$$

となるが、ここで次のテイラーの定理を用いる:

> 「$h(x)$ が $x_0 - a < x < x_0 + a$ で 2 回微分可能で、$h''(x)$ がそこで連続ならば、$|\Delta x| < a$ に対して
>
> $$h(x_0+\Delta x) = h(x_0) + h'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}h''(x_0+\theta\Delta x)(\Delta x)^2$$
>
> となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する (θ は Δx にも依存する)。」

これにより、すべての $n \geq 2$ に対して、

$$(x_0+\Delta x)^n = x_0^n + n x_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}(x_0+\theta_n\Delta x)^{n-2}(\Delta x)^2$$

となる θ_n $(0 < \theta_n < 1)$ が存在する。よって、

$$\frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} - n x_0^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}\Delta x(x_0+\theta_n\Delta x)^{n-2}$$

となるので、

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - g(x_0) = \Delta x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n (x_0+\theta_n\Delta x)^{n-2}$$

となる。ここで、$|x_0| < r$ だから、$|x_0| < r_1 < r$ となる r_1 をとり、$|\Delta x| \leq r_1 - |x_0|$ の範囲で $\Delta x \to 0$ とすると考えると、

$$
\begin{aligned}
&|x_0+\Delta x| \leq |x_0| + |\Delta x| \leq |x_0| + r_1 - |x_0| = r_1, \\
&|x_0+\theta_n\Delta x| \leq |x_0| + \theta_n|\Delta x| \leq |x_0| + |\Delta x| \leq r_1
\end{aligned}
$$

なので、

$$\left|\frac{n(n-1)}{2}a_n(x_0+\theta_n\Delta x)^{n-2}\right| = \frac{n(n-1)}{2}|a_n||x_0+\theta_n\Delta x|^{n-2} \leq \frac{n(n-1)}{2}|a_n| r_1^{n-2}$$

とでき、和

$$M = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} |a_n| r_1^{n-2}$$

は、

$$\frac{\dfrac{(n+1)n}{2}|a_{n+1}|r_1^{n-1}}{\dfrac{n(n-1)}{2}|a_n|r_1^{n-2}} = \frac{n+1}{n-1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| r_1 \to 1 \times \ell \times r_1 = \ell r_1 < \ell r = 1$$

なので、ダランベールの判定法により有限の値に収束する。よって、

$$\left|\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - g(x_0)\right| \leq M\Delta x$$

となり、$\Delta x \to 0$ のときに右辺は確かに 0 に収束するので (9) が言えたことになる。■

この定理 12 により、ベキ級数は収束半径内で何回でも微分可能であることになる (こういう関数を **無限回微分可能**、C^∞ **級**、あるいは **なめらかな関数** と呼ぶことがある) であることがわかる。逆に、そうでない関数はベキ級数展開できない。これはフーリエ級数が不連続な関数でも展開できるのとは大いに異なる点である。

また、「ベキ級数展開できる」という性質は無限回微分可能という性質よりも強いことになるが、よってベキ級数展開できる関数のことを **解析的** と呼んで、無限回微分可能と区別することがある。

この定理 12 により、ベキ級数は自由に項別微分ができることになるが、実際にいくつか計算してみる。

e^x のマクローリン展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

を微分すると、

$$(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

となる。また、

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} == \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

を微分すると、

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}(2n-1)x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos x\end{aligned}$$

となるし、$\cos x$ を微分すると

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2nx^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

となる。

無限等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{10}$$

は、収束半径は $|a_{n+1}/a_n| = |-1| = 1$ なので確かに 1 であり、これを微分すると、定理 12 により、$|x| < 1$ で

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \cdots$$

よって、

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

が得られる。さらに微分すると、

$$-\frac{2}{(1+x)^3} = -2 + 3\cdot 2x - 4\cdot 3x^2 + 5\cdot 4x^3 - \cdots$$

よって、

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \binom{2}{2} - \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 - \binom{5}{2}x^3 + \cdots$$

となる。

微分の逆を考えれば、次の項別積分の定理が得られる。

系 13

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が r であるとき、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) は、

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \tag{11}$$

で与えられ、この収束半径も r となる。

これは、(11) で与えられるベキ級数を $G(x)$ とおいて、これに定理 12 を適用すれば、$G'(x) = f(x)$ であって収束半径が r であることがわかり、$G(0) = F(0)$ なので、$G = F$ であることが言える。

これを使うと例えば、(10) から、これを積分して

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{12}$$

が得られる (左辺は $x = 0$ のとき 0)。また、$|x| < 1$ のとき、$|x^2| < 1$ なので、x^2 を (10) の x の代わりに x^2 を代入すれば

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{13}$$

が得られるが、これを x で積分すると、

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1) \tag{14}$$

が得られる。この $\arctan x$ のベキ級数展開をマクローリン展開から計算するとかなり大変な計算になるが、このように積分を利用すると容易に求められる。

また、(12) の式からは $\log 2$ の値を求めることはできないが ($x = 1$ は収束半径の内側ではないので代入できない)、(12) の x の代わりに $(-x)$ を代入して、(12) から引き算すると、

$$\begin{aligned}
&\log(1+x) - \log(1-x) \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\right) \\
&= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \cdots
\end{aligned}$$

より、

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{15}$$

が得られる ($|x| < 1$)。この式を使えば、$x = 1/3$ とすれば $(1 + 1/3)/(1 - 1/3) = 2$ より $\log 2$ を与える級数が得られる。

3.3 ベキ級数の一意性

3.2 節で、$\arctan x$ や $\log(1+x)$ のベキ級数展開を、他のベキ級数の積分などを使って得たが、これははたして普通のマクローリン展開の結果と一致するのだろうか。それに対しては、次の一意性定理がその一致を保証してくれる。

定理 14

$|x| < r$ のすべての x に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

が成り立つならば、すべての n に対し $a_n = b_n$ が成り立つ。

証明

$|x| < r$ では絶対収束するので、両辺の差を考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n = 0$$

となるから、$c_n = a_n - b_n$ とすれば、結局 $|x| < r$ のときに

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

であるときにすべての c_n が 0 であることを示せばよい。

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ とおくと、$|x| < r$ で $f(x) = 0$ であり、$f(0) = c_0$ なのでまず $c_0 = 0$ が言える。また、定理 12 により、

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots$$

であり、$|x| < r$ で $f(x) = 0$ よりもちろんここで $f'(x) = 0$ でもあるので、$f'(0) = c_1 = 0$ となる。同様に繰り返し項別微分を行って $x = 0$ を代入すれば、結局すべての n に対して $c_n = 0$ であることが言える。■

この定理により、微分や積分、ax^k の積や商によって得られた級数や、(13) のように x の代わりに ax^k などを代入して得られる級数が、マクローリン展開の計算によって得られるものと一致することが言えることになる。例えば、

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

を x で割って

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

となるが、この右辺は左辺の関数 (厳密には、$x = 0$ では左辺は定義されないが、その値は $x \to 0$ への極限として決めたもの) のマクローリン展開を計算したものに等しくなる。しかし、実際には左辺のマクローリン展開の計算はかなり大変である。

マクローリン展開と一致することは、より明確に次の形で与えられる。

系 15

$|x| < r$ で $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ であるとき、$a_n = f^{(n)}(0)/n!$ となる。

証明

$f(0) = a_0$ は OK. 定理 12 より、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

なので $f'(0) = a_1$ となる。また、

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

より $f''(0) = 2 \cdot 1 a_2$ となる。これを繰り返せばよい。■

さらに、この命題 15 より奇関数、偶関数に関しては次が言える。

命題 16

$|x| < r$ で $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が、

- 奇関数ならば $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = a_{2n} = \cdots = 0$
- 偶関数ならば $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n-1} = \cdots = 0$

証明

$f(x)$ が奇関数のとき、$f(-x) = -f(x)$ であるから、これに $x = 0$ を代入すると $f(0) = 0$ が得られる。

また、2 回微分すると $f''(-x) = -f''(x)$ であるから、これに $x = 0$ を代入して $f''(0) = 0$ が得られる。同様にして $f^{(2n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が言える。よって、系 15 より $a_{2n} = 0$ となる。

偶関数の場合は $f(-x) = f(x)$ であるから、$-f'(-x) = f(x)$ となり、よって $f'(0) = 0$ となる。以下同様に $f^{(2n-1)}(0) = 0$ が言え、よって $a_{2n-1} = 0$ が言える。■

3.4 積、商、合成関数

有限項のベキ級数を計算する際には、積や商、合成関数などの場合は直接マクローリン展開を計算するのではなく、個々のマクローリン展開を求めておいて、そのベキ級数同士の積や商、合成を行う方が楽な場合が多い。ここではその方法と、その理論的な裏付けについて紹介する。

まず、$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ の場合、この積は、形式的に展開すれば、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 \\ &\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

のようになるので、少なくとも形式的な計算では

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{16}$$

のようになる。これは、以下のように正当化される。

命題 17

$f(x)$ の収束半径が r_1, $g(x)$ の収束半径が r_2 であるとき、$r = \min\{r_1, r_2\}$ ($\min\{a, b\}$ は a と b の小さい方を意味する) とすると、$|x| < r$ で (16) の右辺は絶対収束し、(16) の等式が成り立つ。

証明

$|x| < r$ では少なくとも $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ は絶対収束するから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x|^n < \infty$$

となる。また、c_n は、

$$|c_k| = |a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0| \leq |a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \cdots + |a_k||b_0|$$

(この最後の右辺を $\hat{c}_k$ と書くことにする) であるから、

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k||x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}| \right) |x|^k = \sum_{k=0}^{n} \hat{c}_k |x|^k$$

であるが、この右辺は、積

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k||x|^k \right)$$

を展開したものの $|x|^n$ 次までの項に等しく、この積はさらに高次の項を含んでいる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |c_k||x|^k &\leq \sum_{k=0}^{n} \hat{c}_k |x|^k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k||x|^k \right) \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x|^n \right) < \infty \end{aligned}$$

が成り立つので、$\sum_{k=0}^{n} |c_k||x|^k$ は上に有界となり、よって $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ は絶対収束する。

後は、これが $f(x)g(x)$ に等しいことを示せばよいが、

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

は、最初の項は $f(x)g(x)$ に、最後の項は $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ にそれぞれ収束するので、これが $n \to \infty$ のときに 0 に収束することを示せば (16) の等号が成り立つことになる。一方、この式は上に見たように x^{n+1} から x^{2n} 次の項のみからなり、

$$\sum_{k=n+1}^{2n} d_k x^k, \quad d_k = a_{k-n}b_n + a_{k-n+1}b_{n-1} + \cdots + a_n b_{k-n}$$

に等しい。そして、これは明らかに $|d_k| \le \hat{c}_k$ を満たす。上に見たように、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k |x|^k \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||x|^n\right) < \infty$$

であるから、結局

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right| \\
&\quad \le \sum_{k=n+1}^{2n} |d_k||x|^k \le \sum_{k=n+1}^{2n} \hat{c}_k |x|^k = \sum_{k=0}^{2n} \hat{c}_k |x|^k - \sum_{k=0}^{n} \hat{c}_k |x|^k \\
&\quad \to \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k |x|^k - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k |x|^k = 0
\end{aligned}$$

となる。■

なお、この定理は、r が (16) の右辺の収束半径に等しい、ということは意味しておらず、(16) の右辺の収束半径は少なくとも r 以上であることを言うのみである。

例は後でまとめて紹介することにして、次はベキ級数の合成を考える。$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ に、$u = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ を代入してできるベキ級数を求める。

この場合、もちろん $g(x)$ が $f(u)$ の収束半径内に入っていないといけないのであるが、普通は $b_0 = 0$ の場合、すなわち $g(0) = 0$ の場合を考える。こうであれば、x が十分小さければ $g(x)$ の値も十分小さくなるので自然に $f(u)$ の収束半径内におさまる。逆に $b_0 = 0$ でない場合は、$f(u)$ の方を $u = 0$ の代わりに $u = b_0$ を中心に展開して、

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n (u - b_0)^n$$

のようにして、ここに $u = g(x)$ を代入するのが自然であり、これは $b_0 = 0$ の場合と本質的に同じことになる。

もちろん、$b_0 \neq 0$ の場合でも $g(x)$ の値さえ $f(u)$ の収束半径内に入っていれば代入は可能なのであるが、それには応用上も問題がある。それは、$f(u)$ の収束が一番速い、つまり有限項の近似が最もよいのは展開の中心である $u = 0$ の付近であり、$g(x)$ の場合も同じく $x = 0$ の近くが最も精度がよい。よって、合成して得られる x のベキ級数は、 $g(0) = 0$、そうでなければ $f(u)$ を $u = g(0)(= b_0)$ を中心に展開しておく、とすることで最も精度がよくなる。

よってここでは、$b_0 = 0$、すなわち

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

として話を進めることにする。

$u = g(x)$ を $f(u)$ のベキ級数に代入すると、

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(g(x)\right)^n$$

となるが、$(g(x))^n$ は $g(x)$ のベキ級数の積であるから、積の展開 (命題 17) を繰り返し行って

$$(g(x))^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_{k,n} x^k \tag{17}$$

のように書くことができる ($g(x)$ は最低次が 1 次なので、$(g(x))^n$ は n 次以上の項からなる)。よって、形式的に計算すれば、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(g(x)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=n}^{\infty} c_{k,n} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_n c_{k,n} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n c_{k,n} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=0}^{k} a_n c_{k,n} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \\ &\qquad \left(d_k = \sum_{n=0}^{k} a_n c_{k,n}\right) \end{aligned}$$

となるので、これにより合成によるベキ級数が得られる。

これが行える保証としての証明をちゃんと書くのは面倒なので省略するが、結論は以下のようになる。

命題 18

$f(u)$ の収束半径が R, $g(x)$ の収束半径が r であるとし、さらに、$|x| < \delta$ $(0 < \delta \leq r)$ のときに

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n||x|^n < R \tag{18}$$

を満たすとすると、この $|x| < \delta$ のときに上の $\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ は絶対収束し、$f(g(x))$ に等しい。

$|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||x|^n$ であるから、この条件 (18) は $|g(x)| < R$ よりも少し強い条件になっている。実は、この命題の証明には、2 重級数 (級数の級数) の順序交換を用いるのであるが、そのときの絶対収束性の条件として、$|g(x)| < R$ では少し足りず、(18) のような十分条件が必要になる。

なお、今 $b_0 = 0$ なので、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(g(x)\right)^n$ の n 次以下の項は

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(g(x)\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)^k$$

に全部含まれている ($(g(x))^k$ の最低次の項が k 次)。よって、

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(g(x)\right)^k = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \hat{d}_{k,n} x^k$$

のように、n を増やしても n 次以下の項は変化せず、

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(g(x)\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

となる。

商

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}$$

の場合は、合成を利用すれば収束級数が得られる。まず、分母が 0 にならないように $b_0 \neq 0$ であるとする。

このとき、

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0 + (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots)} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{b_1}{b_0} x + \dfrac{b_2}{b_0} x^2 + \cdots \right)}$$

であるから、

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots \quad (|u| < 1)$$

への合成であると考えれば、命題 17 により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_n}{b_0} \right| |x|^n < 1$$

すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n||x|^n < |b_0| \tag{19}$$

であるときに、

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \left\{ 1 - \left(\frac{b_1}{b_0} x + \cdots \right) + \left(\frac{b_1}{b_0} x + \cdots \right)^2 - \cdots \right\}$$

を利用して展開されることになる。これに $f(x)$ をかければ、$f(x)/g(x)$ のベキ級数が得られる。よって、この場合は (19) を満たすように $|x|$ の範囲をせばめることが条件となる。

しかし、実際に商のベキ級数を計算する場合はこの方法は少し煩雑で、以下のような方法を取ることの方が簡単である場合が多い。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

とおいて、両辺に $g(x)$ をかけると

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \\ & \quad \left(d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right) \end{aligned}$$

となるが、ベキ級数の一意性 (定理 14) よりすべての n に対し $a_n = d_n$、すなわち、

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_1 c_0 + b_0 c_1, \\ a_2 &= b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \\ a_3 &= b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

となり、これを c_n に関する連立方程式と見て求めていく、という方法である。

以下に、いくつか積、合成、商の例を紹介する。

例 19

$1/(1-2\sin x)$ の $x=0$ での展開 (4 次の項まで計算してみる)

これは、

$$f(u) = \frac{1}{1-2u} = 1 + 2u + 4u^2 + 8u^3 + 16u^4 + \cdots \quad \left(|u| < \frac{1}{2}\right)$$

に、

$$u = \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

を代入すればよい。代入自体は、$|u| = |\sin x| < 1/2$ となる範囲で代入してよいが、その後それを展開して絶対収束する、という保証を得るためには命題 18 より、

$$\frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^5}{5!} + \cdots = \frac{e^{|x|} - e^{-|x|}}{2} < \frac{1}{2}$$

である必要がある。よって、

$$(e^{|x|})^2 - e^{|x|} - 1 < 0, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} < e^{|x|} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

より、

$$|x| < \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

であれば少なくともその展開は絶対収束することが保証される。そして、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 1 + 2\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + 4\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 \\ &\quad + 8\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 + 16\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^4 + \cdots \\ &= 1 + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) + 4\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)\right) \\ &\quad + 8(x^3 + O(x^5)) + 16x^4 + O(x^5) \\ &= 1 + 2x + 4x^2 + \frac{23}{3}x^3 + \frac{44}{3}x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

のように展開できる。ここで、$O(x^k)$ は、k 次以上の項の和を表すものとする。この 4 次位までの項をこの関数を直接マクローリン展開することで求めようとすると、かなり大変な微分の計算をしなければいけない。

例 20

$\tan x$ の $x = 0$ での展開 (5 次の項まで計算)

これは、

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots}$$

であり、分母の 2 次以降の項、すなわち $1-\cos x$ は $|1-\cos x| < 1$ (すなわち $|x| < \pi/2$) である必要があるが、展開した級数の絶対収束性の保証のためには命題 18 より、

$$\frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^4}{4!} + \frac{|x|^6}{6!} + \cdots = \frac{e^{|x|} + e^{-|x|}}{2} - 1 < 1$$

である必要がある。よって、

$$(e^{|x|})^2 - 4e^{|x|} + 1 < 0, \quad 2 - \sqrt{3} < e^{|x|} < 2 + \sqrt{3}$$

より

$$|x| < \log(2 + \sqrt{3})$$

であれば少なくともその展開は絶対収束することが保証される。最初の方法によれば、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \left(\dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \cdots\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6) + \left(\frac{x^4}{4} + O(x^6)\right) + O(x^6) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\cos x} &= \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\right) \\
&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + O(x^7) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)
\end{aligned}$$

が得られる。

一方、第 2 の方法では次のようになる。まず $\tan x$ は奇関数なので、命題 16 より偶数次の項は含まれないから、

$$\tan x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + O(x^7)$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
\sin x &= (c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + O(x^7)) \times \cos x \\
&= (c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + O(x^7)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) \\
&= c_1 x + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right) x^3 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24}\right) x^5 + O(x^7) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1, \\
c_3 &= \frac{c_1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \\
c_5 &= \frac{c_3}{2} - \frac{c_1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

となり、よって

$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + O(x^7)$$

が得られる。

計算は明らかに後者の方が楽であろう。

3.5 収束円周上での値

ベキ級数の収束半径が r であるとき、$|x| < r$ では絶対収束し、$|x| > r$ では発散することは言えるが、$|x| = r$ のとき (このような x を **収束円周上** にあるという) はどうなるかについては次のことが知られている。

定理 21

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が r $(0 < r < \infty)$ であるとき、$|x_0| = r$ となる x_0 で $f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するならば、それは収束円内からの極限に一致する。すなわち、

- $x_0 = r$ ならば $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$
- $x_0 = -r$ ならば $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

この証明は参考のために書き残しておくが、いわゆる ε–N 論法、$\limsup$, アーベル変形などを利用する煩雑なものなので、読みとばしても構わない。

証明

S, S_n をそれぞれ x_0 での和、部分和

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k$$

とする。$|x| < r$ で x を x_0 に近づけるということは、x と x_0 は同符号で、

$$0 < \frac{x}{x_0} < 1, \quad \frac{x}{x_0} \to 1 - 0$$

とすると考えればよい。今、$M > N > 0$ に対して、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{M} a_n x^n &= \sum_{n=N+1}^{M} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \\
&= \sum_{n=N+1}^{M} (S_n - S_{n-1}) \left(\frac{x}{x_0}\right)^n = \sum_{n=N+1}^{M} S_n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \sum_{n=N}^{M-1} S_n \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \\
&= \sum_{n=N+1}^{M-1} S_n \left\{\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1}\right\} + S_M \left(\frac{x}{x_0}\right)^M - S_N \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1}
\end{aligned}$$

と変形すると[4]、この最後の n に関する和の部分は $M \to \infty$ のときに絶対収束する。それは、$S_n \to S$ より $\{S_n\}$ は有界、すなわち $|S_n| \leq L$ となる $L < \infty$ がとれて、よって、

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{M-1} |S_n| \left| \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{M-1} L \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} \\
&\quad \left(0 < \frac{x}{x_0} < 1 \text{ より } \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} > 0 \right) \\
&= L \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+2} \right\} + L \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+2} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+3} \right\} + \cdots \\
&\quad + L \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{M-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{M} \right\} \\
&= L \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{M} \right\} \leq L \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} < \infty
\end{aligned}
$$

と、M によらない値でおさえられるので、定理 4 より絶対収束性が言える。よって、$M \to \infty$ とすると、$S_M \to S,\ (x/x_0)^M \to 0$ より、

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} - S_N \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1}
$$

となる。さらにこの右辺を、以下のように変形する。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=N+1}^{\infty} S_n \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} - S_N \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} (S_n - S) \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} + S \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} \\
&\quad - S_N \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} (S_n - S) \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} + (S - S_N) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1}
\end{aligned}
$$

これを使って $f(x) - f(x_0)$ を以下のように分割する。

$$
f(x) - f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n
$$

[4] このような変形を **アーベル変形** と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x_0^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n (x^n - x_0^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (S_n - S) \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} \\
&\quad + (S - S_N) \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} - 1 \right\} \\
&\quad\quad \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n = S - S_N \right)
\end{aligned}
$$

$S_n \to S$ より、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N > 0$ があって、$n \geq N$ ならば $|S_n - S| < \varepsilon$ とできる[5]。よって、

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f(x_0)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n x_0^n| \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right\} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |S_n - S| \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} \\
&\quad + |S - S_N| \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} \right\} \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n x_0^n| \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right\} + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right)^n - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} \right\} \\
&\quad + \varepsilon \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N} |a_n x_0^n| \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right\} + \varepsilon \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} + \varepsilon \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{N+1} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N} |a_n x_0^n| \left\{ 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right\} + \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる。ここで、両辺の $x/x_0 \to 1-0$ のときの $\limsup$ を考えると、$1 - (x/x_0)^n \to 0$ であり、これは有限和であるから

$$
\limsup_{x/x_0 \to 1-0} |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon
$$

となる。$\varepsilon > 0$ は任意なので、この左辺は 0 でなくてはならず、よってこの $\limsup$ は

[5] これがいわゆる ε–N **論法** であって、数列の収束の厳密な定義である。詳しくは、[1] を参照。

lim に等しくなり、

$$\lim_{x/x_0\to 1-0}|f(x)-f(x_0)|=0$$

となる。ゆえに

$$\lim_{x/x_0\to 1-0}f(x)=f(x_0)$$

が言える。■

この定理 21 により、収束円周上でその級数が収束する場合は内部からの極限に等しいことが言えるが、しかし逆に収束円周上の収束性が保証されていない場合は、内部から極限があったとしてもそれに一致するとは限らないことに注意する。

また収束円周上の値は、それが収束するギリギリのところであるから、一般にその収束はかなり遅いので、あまり実用にはならない。

例えば収束する級数 (4) は、$\log(1+x)$ のマクローリン展開 (12) の収束円周上 $x=1$ での値に等しく、よって定理 21 により $\log 2$ であることが言えるが、$\log 2$ の計算をするならば (15) の式を用いる方がずっと精度はよい。(4) を使用する場合は、命題 3 より 2 項ずつまとめたとしても、10 項目はだいたい $1/20^2=2.5\times 10^{-3}$ くらいであるが、(15) の式の場合は、10 項目はだいたい $(1/20)\times 1/3^20=1.4\times 10^{-11}$ くらいになっている。

また、$\arctan x$ のマクローリン展開 (14) を利用すれば、これに $x=1$ を代入することで、

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

を得るが、これも 2 項ずつまとめれば一般項は $2/(2n-1)(2n+1)$ になり、よって命題 6 により収束することが言えるので、定理 21 よりこの式が正しいことが示される。この式を使って π の近似値を計算することもできなくはないが、これも収束円周上の値なので収束はよくない。

この節の最後に、(4) が $\log 2$ に等しいことを積分を使って直接示す方法、および、(5) が $(3/2)\log 2$ に等しいことを示す。そのために、よく知られている以下の公式 (区分求積) を利用する。

命題 22

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

命題 3 より (4) は 2 項ずつまとめてもよいので、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

であり、

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\
&= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

となるので、よって命題 22 より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2$$

となる。

(5) の方は以下のようにすればよい。まず、2,6,10,. . . 項目に 0 をはさんで

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots\\
&= 1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+0+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots
\end{aligned}$$

として、これと (4) との引き算を行うと、

$$\begin{aligned}\hat{S}-\log 2 &= 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+0-\frac{1}{12}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

となるので $\hat{S}=(3/2)\log 2$ であることが言える。

4 おわりに

無限級数論は数学的にも内容は豊富で応用も広いが、工学部の学生にも読めるような級数論の書物は、最近はあまり見かけないように思う。

今回は工学者にとって入門的な内容として、必要と思われるところのみをおおまかにまとめてみたが、理論の展開が主で、例がやや少なってしまったように感じる。例については、参考文献として上げたものや解析学の演習書などを参照してもらいたい。

本来ベキ級数論というと、複素関数論における正則関数のテイラー展開やローラン展開まで話をしないと完結しないように思うが、ここでは複素関数論に触れることは避けて実数の話のみに留めた。関数と収束半径の関係等について詳しく知りたい人は複素関数論を勉強するとよいだろう。

また、工学への応用という立場でいえば、総和法や区間近似、漸近級数などの話もするべきであったかもしれないが、入門ということでこれらについても触れなかった。

この冊子により、無限級数やベキ級数の扱いが多少でも手軽に行えるようになって頂ければ幸いである。

最後に、参考文献を少し紹介しておく。

[1] は、1 変数の微分積分を説明した本であるが、極限の厳密な定義である、いわゆる「ε–δ 論法」(数列の場合は ε–N 論法)、およびその使い方を丁寧に説明することを主眼としていて、、微分や積分の計算法のための本ではない。ε–N 論法は本稿でも証明中に何回か使用したが、それが気になる人、あるいは極限の厳密な定義を知りたい人は参考にするとよい。

[2] は、ベキ級数を含む級数論の専門書で、これも具体的な計算ではなく、級数の理論を説明した本である。級数論の専門書は多くはないので、古い本であるがその点では貴重なものであると思う。今回も、積、商、合成関数の話 (3.4)、収束円周上の値の話 (3.5 節) に関してはこれを大いに参考にさせてもらった。

[3] は、大学生向けの詳しい解析の本で、第 V 章に級数の話がのっている。分厚い本で多くの事柄について書かれているので、解析学で不明なことがあったら、この本やその第 II 巻、および演習書である「解析演習」(杉浦光夫 他著) にあたると見つかることが多い。級数の例についても、これらを参考にするとよい。

[4] は、解析学に関する 12 冊 (原著 5 巻) からなるシリーズの第 2 巻で、級数やその応用などがとりあげられている。思えば、無限級数論の魅力を感じたのはこの本が初めだったかもしれない。旧ソビエト時代の本なので、書き方に独特の癖もあるが、工学系の大学生くらいだと、内容、難易度からしてもこの 2 巻がシリーズの中でも最も読みやすくておもしろいのではないかと思う。

参考文献

[1] 田島一郎「解析入門」岩波全書 (1981)

[2] 岡田良知「級数概論」岩波全書 (1952)

[3] 杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会 (1980)

[4] V.I. スミルノフ「高等数学教程」2 巻 (福原満洲雄 他訳)、共立出版 (1958)