2018 年 02 月 15 日

ポイント還元について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

最近はスーパーマーケット、書店、家電量販店など、多くの店が独自の「カード」を作っていて、ポイント制度、値引き制度などで客を呼ぼうとしているが、店毎に仕組みも違い、私もよくは理解していない。

それに関して、ある高校の先生から、「家電量販店の 10 % ポイント還元は、実質何割引きに相当するのか」という質問をされた。ネットで検索してみると、同じ疑問を持つ人が多いのか、かなり同様の質問や解説が上がっているようであるが、質問者は「複利」のような構造があるという話をしていたので、簡単に調べて考察してみた。それをまとめておく。

2 ポイント制度

まず、ネットでポイント制度や還元制度について簡単に調べてみたが、そのおおまかな仕組みを以下にまとめる。

- 商品を買物すると、その値段に応じたポイントが購入者のカードに追加される。
- そのポイントは、その店での次回の購入代金、またはその一部として使用でき、使用した分だけポイントが減る。
- 使用するポイント数は、客が指定できる。
- 基本的にポイントは整数値で (端数の処理は店により異なる)、1 ポイントを 1 円として使用できる。
- ポイントを代金として使用した場合は、その差額、すなわち現金として支払った額に対して再びポイントが追加される。
- ポイントの計算は、一律何 % という場合もあるし、商品の種類や、特売品などによって割合が異なる場合もある (店により異なる)。

- ポイントの追加の代わりに代金の値引きを行える店もあるし、それとは無関係に代金の値引き交渉が可能な店もある。
- 支払い方法によってポイントの計算方法が変わる店もある。
- ポイントの計算式やポイントの使用の際に、消費税を入れるか入れないかは店により異なる。

もちろん上記に当てはまらないポイント制度もあるだろうし、店によってルールも違うので、すべての店に対する考察は容易ではないが、ここから基本的な仕組みのみを取り出して、以後簡単な考察を行うことにする。設定するルールは以下のようにする。

ルール 1. 商品を買物すると、代金 (税込み) の一定割合のポイントが購入者のカードに追加される。

ルール 2. そのポイントは、その店での次回の購入代金 (税込み額)、またはその一部として使用でき、使用した分だけポイントが減る。

ルール 3. 使用するポイント数は、客が指定できる。

ルール 4. ポイントは、1 ポイントを 1 円として使用できる。

ルール 5. ポイントを代金として使用した場合は、その差額、すなわち現金として支払った額に対して再びポイントが追加される。

このルールでは税込額に対して計算するので、消費税は考察しなくてよい。

3 単純な設定での考察

簡単に、毎回同じ金額の物品を購入することにして、以下のように設定する。

- $A =$ 毎回購入する税込代金 ($A > 0$, 例えば $A = 10000$ 円)
- $x \times 100\ \% =$ 代金に対してポイントがつく割合 ($0 < x < 1$, 例えば $x = 0.1$)
- $n =$ 購入回数
- $B_j = j$ 回目の現金での支払い額
- $p_j = j$ 回目の支払い後のポイント数
- $S = n$ 回の支払い総額 ($= B_1 + B_2 + \cdots + B_n$)

ポイントの使用方法は、

使用方法 1. 毎回全部のポイントを支払いに使用する

使用方法 2. 支払い額を越えるまでたまったら使用する

など色々あると思うが、今回はこの 2 種類を考える。

まず、使用方法 1. を考える。この場合は規則的なので、一般的な式で考察する。

初回の買物ではポイントは 0 なので、$B_1 = A$ 円支払って、その後に $p_1 = Ax$ ポイントもらえることになる。なお、本来ポイントは、小数以下を切り上げにするところが多いようであるが、今は端数は小数のまま考える (整数化しない) こととする。

2 回目の買物ではポイントを使用して、現金は $B_2 = A - p_1 = A(1-x)$ 円支払い、$p_2 = B_2 x = A(1-x)x$ ポイントがつくことになる。

以下同様で、j 回目の買物では $B_j = A - p_{j-1}$ 円の現金を支払い、$p_j = B_j x$ ポイントがつく。つまり、

$$B_j = A - p_{j-1} = A - B_{j-1}x$$

という漸化式が成り立つので、

$$B_j - \frac{A}{1+x} = A - \frac{A}{1+x} - B_{j-1}x = \frac{Ax}{1+x} - B_{j-1}x = -x\left(B_{j-1} - \frac{A}{1+x}\right)$$

より $B_j - A/(1+x)$ が等比数列になるので、$B_1 = A$ より

$$B_j - \frac{A}{1+x} = (-x)^{j-1}\left(B_1 - \frac{A}{1+x}\right) = (-x)^{j-1}\frac{Ax}{1+x}$$

なので、

$$B_j = A\,\frac{1-(-x)^j}{1+x}, \quad p_j = Ax\,\frac{1-(-x)^j}{1+x} \tag{1}$$

となる。なお、これは B_j を順に書き下して、

$$\begin{aligned}
B_1 &= A, \\
B_2 &= A - Ax = A(1-x), \\
B_3 &= A - A(x - x^2) = A(1 - x + x^2), \\
B_4 &= A - A(x - x^2 + x^3) = A(1 - x + x^2 - x^3), \\
&\cdots
\end{aligned}$$

及び等比数列の和の公式から導くこともできる。これは確かに複利に似た構造だが (ルール 5. に起因)、公比は $-x<0$ なので、複利とはやや異なる。

そして、支払い代金の合計 S は

$$S=\sum_{j=1}^{n}B_j=\sum_{j=1}^{n}A\,\frac{1-(-x)^j}{1+x}=\frac{A}{1+x}\sum_{j=1}^{n}\{1-(-x)^j\}$$

より、

$$S=\frac{nA}{1+x}+Ax\,\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2} \tag{2}$$

となるから、ポイントにより値引きされた総額は

$$nA-S=\frac{nAx}{1+x}-Ax\,\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2}$$

となり、結局ポイントの使用方法 1. での値引き率 r_1 は

$$r_1=\frac{nA-S}{nA}=\frac{x}{1+x}-\frac{x}{n}\,\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2} \tag{3}$$

となる。n が大きく、x が小さい場合は、$(-x)^n$ はほぼ 0 に近く、よってこれは

$$r_1\approx\frac{x}{1+x}-\frac{x}{n(1+x)^2} \tag{4}$$

で近似でき、n がさらに大きければ右辺第 2 項も無視して、

$$r_1\approx\frac{x}{1+x} \tag{5}$$

と近似できることになる。これは当然 x より小さく、例えば x が 10% であれば、$x/(1+x)=0.1/1.1=9.1\%$ 程度で、(4) の方はそれよりもさらに (少しばかり) 小さい。

なお、値引き総額に最終ポイント数も入れた金額を得した金額と考えれば、その総額は

$$\begin{aligned}nA-S+p_n &= n\,\frac{Ax}{1+x}-Ax\,\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2}+Ax\,\frac{1-(-x)^n}{1+x}\\ &= n\,\frac{Ax}{1+x}+Ax^2\,\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

となり、値引き率 r_2 は

$$r_2 = \frac{nA - S + p_n}{nA} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{n}\frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2} \tag{6}$$

となり r_1 より少し大きくなる。しかし、この第 2 項は n が大きく、x が小さければやはり第 1 項に比べて無視できるほど小さな値となるので、(5) とあまり変わらない。

なお、ここまでの議論は、金額の小数以下の端数も含めた計算であるが、本来ポイントや代金には小数値を考えない。その場合上の計算の $(-x)^j$ の部分はあるところから先は端数となり、よって実際にはこのような式にはならないことにも注意する。

4 使用方法 2. も含めた考察

次は、使用方法 2. も含めた考察を行う。

ポイントの分だけ値引きされると考えるのであれば、支払い額が大きいほど大きなポイントがもらえて得となるので、ポイントを毎回使用するよりも、使用方法 2. の方が得のようにも思える。よって、今度は、具体的な A, x, n に対して、端数の処理も考えた上で使用方法 1. と 2. の比較を行うことにする。ポイントの端数 (小数以下) は切り上げとする。

$A = 10000$ 円、$x = 0.1$ (10%), $n = 11$ とすると、各支払い額、ポイント値は使用方法 1., 2. で以下のようになる。

	使用方法 1.		使用方法 2.	
回数 j	支払い額 B_j	ポイント数 p_j	支払い額 B_j	ポイント数 p_j
1	10000	1000	10000	1000
2	9000	900	10000	2000
3	9100	910	10000	3000
4	9090	909	10000	4000
5	9091	910	10000	5000
6	9090	909	10000	6000
7	9091	910	10000	7000
8	9090	909	10000	8000
9	9091	910	10000	9000
10	9090	909	10000	10000
11	9091	910	0	0
合計	100,824 円	(10086)	100,000 円	

この表から、以下のことがわかる。

- 端数が切り上げられるため、使用方法 1. でも途中から同じパターンが繰り返される。
- 支払い額の合計 (S) で見ると、使用方法 2. の方が 824 円得で、値引率は、使用方法 1. では

  $$\frac{nA-S}{nA}=\frac{110,000-100,824}{110,000}=\frac{9,176}{110,000}=8.34\%$$

  使用方法 2. では

  $$\frac{nA-S}{nA}=\frac{110,000-100,000}{110,000}=\frac{10,000}{110,000}=9.09\%$$

- 最後に残るポイント数 p_n も追加して考えると、使用方法 1. の方は得した金額は

  $$nA-S+p_n=110,000-100,824+910=10,086\,円$$

  値引率は

  $$\frac{10,086}{110,000}=9.17\%$$

  使用方法 2. は $p_n=0$ なので $nA-S$ の場合と変わらない

最後のポイントも含めると、得した金額は使用方法 1. では当然それはポイント合計に等しくなる。それが使用方法 2. の 10,000 円を上回るのは、11 回目の代金では使用方法 2. にポイントが 1 円もつかないからである。つまり、支払い額だけ考えれば使用方法 2. の方が得に見えるが、長く利用する店であれば、最後のポイントをまた今後も使用するので、必ずしも使用方法 2. の方が得であるとは限らないことになる。

なお、最後のポイント数は完全に得をした金額と言えるわけではなく、将来使える金額なので、博打の中止問題のように全額を得した金額に入れるのでなく、その何割かのみを入れるべきなのかもしれない。

また、使用方法 1. や 2. 以外の方法で、さらに得をする方法があるかどうかはわからないし、A, x, n の数値が変われば別な結果が得られるかもしれないが、常識的な数値ではほぼ同様の結果となるだろうと思う。

5 最後に

結果として、「10 % のポイント還元率」の場合は、約 9 % 程度の値引きに相当するが、ポイントの使用方法や、評価方法によって多少変化はある、ということがわかった。このような話は、数列の応用として学生に話すこともできるかもしれないが、少し難しいかもしれないし、学生はそもそもポイントがたまるほどの買物をたくさんしているとは考えにくいので、あまり実感はないかもしれない。

なお、ネットには、店内で商品によりポイント還元率が異なる場合は、還元率 (x) の高い商品の支払いにはポイントを使用せず、還元率の低い商品の支払いにポイントを使用すると得である、といった情報がでているようである。

参考文献

[1] 古川雅一、「ヤマダ電機のポイント加算 20 % と現金割引 15 % はどっちが得か」 http://president.jp/articles/-/6127 (2010)

[2] 「ヤマダ電機のポイント還元率を解説！還元率が悪い商品も存在する！？」 https://お得ポイントカード.jp/yamadadenki-point-cashback (2017)

[3] 「ヤマダ電機のポイントの有効な使い方は？」 http://behappy35.com/wp/?p=2004 (2018)