2022 年 01 月 11 日

1 次元ノズル流方程式の導出について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、管楽器のように、場所により断面積が一定ではない管の中の 1 次元的な気体の流れを記述するノズル方程式

$$\begin{cases} A(x)\rho_t + (A(x)\rho u)_x = 0, \\ A(x)(\rho u)_t + (A(x)\rho u^2)_x + A(x)P_x = 0, \\ A(x)(\rho E)_t + \{A(x)(\rho E + P)u\}_x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

の導出について考える。ここで、管は x 軸に沿って伸びていると考え、$A(x)$ (>0) は管の x での x 軸に垂直な断面積、t は時刻、$\rho=\rho(x,t)$ は気体密度、$u=u(x,t)$ は x 方向の気体速度、$P=P(x,t)$ は x での単位面積当たりの圧力、$E=u^2/2+e$ は単位質量当たりの気体のエネルギー、$e=P/((\gamma-1)\rho)$ は単位質量当たりの内部エネルギー、$\gamma>1$ は気体定数である。外力や粘性は本稿では考えないため省いてある。

なお (1) は、P が ρ だけの関数 $(P=P(\rho))$ として、最初の 2 本だけで考えることも良く行われている。

この (1) は、より一般の 3 次元的な気体運動を表す圧縮性オイラー方程式を導くのと同様、積分形の保存則に戻って、そこから微分方程式を導く方法を取っていることが多いように思う (例えば [1], [3], [4])。

しかし、3 次元オイラー方程式を導く際にすでにその方法、すなわち積分形の保存則から微分方程式を導く方法を用いているのであるから、積分形の保存則を経由せずに 3 次元オイラー方程式から直接 (1) を導くこともできそうな気がする。本稿は、それについて考察することが目標である。

2 積分保存則からの導出

まずは、通常良く見られる、(1) の積分保存則からの導出を行う。

管内の気体は、本来は x, y, z, t の関数であり、速度も 3 次元ベクトルであるが、ここでは流れはほぼ x 方向への 1 次元的な運動であり、ρ, P も断面に関しては一様な x, t のみの関数であるとする。

管内部の x での x 軸に垂直な断面 (y, z 平面の領域) を $S(x)$ とし、管の $a<x<b$ の範囲での内部 (3 次元領域) を $V(a,b)$、$a<x<b$ での管の壁 ($V(a,b)$ の側面側の境界の 2 次元曲面を $B(a,b)$ と書くことにする。

$$
\begin{aligned}
V(a,b) &= \{(x,y,z)|\ (y,z)\in S(x),\ a<x<b\},\\
B(a,b) &= \{(x,y,z)|\ (y,z)\in \partial S(x),\ a<x<b\}
\end{aligned}
$$

このとき、$\partial V(a,b) = B(a,b)\cup\overline{S(a)}\cup\overline{S(b)}$ となる。なお、$\partial\Omega$ は Ω の境界を意味することとする。

$V(a,b)$ 内部の気体の質量は、dx 幅での微小体積 $A(x)dx$ と密度 $\rho(x,t)$ の積の積分によって得られるので、

$$
\int_a^b \rho(x,t)A(x)dx \tag{2}
$$

と表される。$x=a$ では気体は単位時間当たりに $u(a,t)$ だけ右へ移動するので、$x=a$ での気体の単位時間当たりの右方向への移動質量は

$$
\rho(a,t)A(a)u(a,t)
$$

となる。$V(a,b)$ での質量 (2) の単位時間当たりの変化は、$V(a,b)$ の端 $x=a$, $x=b$ からの流入量に等しいので、

$$
\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)A(x)dx = \rho(a,t)A(a)u(a,t) - \rho(b,t)A(b)u(b,t) \tag{3}
$$

が成り立ち、この右辺は、

$$
\rho(a,t)A(a)u(a,t) - \rho(b,t)A(b)u(b,t) = -\left[\rho A(x)u\right]_a^b = -\int_a^b (A(x)\rho u)_x\,dx
$$

と変形できるので、結局

$$
\int_a^b \{(A(x)\rho)_t + (A(x)\rho u)_x\}dx = 0 \tag{4}
$$

が成り立つことになる。(4) の式の a, b の任意性により、被積分関数は恒等的に 0 であることになり、よって (1) の最初の式が得られることになる。

次は、(1) の 2 本目。$V(a,b)$ 内部の気体の運動量 (x 方向) は、質量 $\rho A(x)dx$ と速度 u の積の積分なので、

$$\int_a^b u(x,t)\rho(x,t)A(x)dx$$

となる。運動量の単位時間当たりの変化は、$x=a$, $x=b$ からの流入量と、外部から $V(a,b)$ に加えられる力 $\boldsymbol{Fs}$ の x 成分の和となるので、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b A(x)\rho u dx = -\left[A(x)\rho u^2\right]_a^b + \boldsymbol{Fs}\cdot\boldsymbol{e}_x \tag{5}$$

が成り立つ。ここで、$\boldsymbol{Fs}$ は、端 $x=a$, $x=b$ で圧力が内部を押す力の総和と、壁 $B(a,b)$ で $V(a,b)$ 内の空気が壁を押す力の反作用の総和に等しいので、$V(a,b)$ の境界 $\partial V(a,b)$ 上の点における、$V(a,b)$ に関して外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば、

$$\boldsymbol{Fs} = \int_{\partial V(a,b)} P(x,t)(-\boldsymbol{n})dS$$

と書ける。発散定理により、

$$\boldsymbol{Fs} = -\int_{V(a,b)} \nabla P(x,t)dv = -\int_a^b (P_x,0,0)dx\int_{S(x)} dydz = -\int_a^b P_x A(x)dx\boldsymbol{e}_x$$

となるので、(5) から

$$\int_a^b \{(A(x)\rho u)_t + (A(x)\rho u^2)_x + A(x)P_x\}dx = 0$$

となり、よって a, b の任意性より (1) の 2 本目が得られる。

最後に (1) の 3 本目。$V(a,b)$ 内部の気体のエネルギー総量は、質量 $\rho A(x)dx$ と単位質量当たりのエネルギー E との積の積分なので、

$$\int_a^b E(x,t)\rho(x,t)A(x)dx$$

と表される。エネルギーの単位時間当たりの変化は、端 $x = a$, $x = b$ からの流入量と、端で圧力 P がする仕事の和になる。管の壁 $B(a, b)$ は固定壁なのでそこでの仕事はない。よって、

$$\frac{d}{dt}\int_a^b E\rho A(x)dx = -\left[E\rho A(x)u\right]_a^b - \left[PA(x)u\right]_a^b$$

となる。よって、

$$\int_a^b \{(A(x)\rho E)_t + (A(x)\rho Eu)_x + (A(x)Pu)_x\}dx = 0$$

となり、a, b の任意性より、(1) の 3 本目の式が得られる。

3 3 次元オイラー方程式からの導出

2 節では、積分形での質量保存、運動量保存、エネルギー保存を考えてそこからノズル方程式 (1) を導いた。

一方、空間 3 次元の未知関数 $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $P = P(x, y, z, t)$, および 3 次元速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ に対する圧縮性オイラー方程式

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \\ (\rho v_j)_t + \nabla\cdot(\rho v_j\boldsymbol{v} + P\boldsymbol{e}_j) = 0 \quad (j = x, y, z), \\ (\rho E)_t + \nabla\cdot\{(\rho E + P)\boldsymbol{v}\} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

も (1) と同様に積分形での保存則から発散定理を用いて導かれていて、一度その段階は通っているから、それを行わずに (6) からノズル方程式 (1) が直接得られないかを考えてみる。

そのためには、3 次元方程式 (6) を $S(x)$ で y, z に関して積分すればよさそうであるが、実は少し面倒なところがあるので、本節ではその前段階として、3 次元方程式 (6) を $V(a, b)$ で積分することで改めて積分方程式を導き、そこから (1) に対応する方程式を導いてみる。$S(x)$ での積分による直接の導出については、4 節で考察する。

まず、議論を少し簡単にするため、密度 ρ と圧力 P は y, z によらない $S(x)$ 内で一様な関数であるとする。

$$\rho(x, y, z, t) = \hat{\rho}(x, t), \quad P(x, y, z, t) = \hat{P}(x, t)$$

また、以後 x, y, z, t の関数 $f(x, y, z, t)$ の、y, z に関する断面平均を $\bar{f}(x, t)$ と書くことにする。

$$\bar{f}(x,t) = \frac{1}{A(x)} \int_{S(x)} f(x,y,z,t) dydz$$

壁 $B(a, b)$ では、$\boldsymbol{v}$ は境界条件

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{n} \quad ((x,y,z) \in B(a,b)) \tag{7}$$

を満たす必要がある。

(6) の 1 本目を、$V(a, b)$ で積分する。$\rho = \hat{\rho}(x, t)$ は y, z に依らないので、

$$\int_{V(a,b)} \rho_t \, dv = \int_a^b \hat{\rho}_t \, dx \int_{S(x)} dydz = \int_a^b A(x)\hat{\rho}_t \, dx$$

と書ける。一方、$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) = (u, v, w)$ とすると、発散定理より、

$$\begin{aligned}\int_{V(a,b)} \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) dv &= \int_{\partial V(a,b)} \hat{\rho} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \int_{B(a,b)} \hat{\rho} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS - \int_{S(a)} \hat{\rho}(a,t) u(a,y,z) dydz + \int_{S(b)} \hat{\rho}(b,t) u(b,y,z) dydz\end{aligned}$$

と書ける。境界条件 (7) よりこの $B(a, b)$ 上の面積分は 0 となるので、結局 (6) の 1 本目の積分は、

$$\int_a^b A(x)\hat{\rho}_t \, dx + \left[\hat{\rho} \int_{S(x)} udydz\right]_a^b = 0$$

となり、

$$\int_{S(x)} udydz = A(x) \frac{1}{A(x)} \int_{S(x)} udydz = A(x)\bar{u}(x,t)$$

なので、

$$\int_a^b A(x)\hat{\rho}_t \, dx + [\hat{\rho} A(x)\bar{u}]_a^b = \int_a^b \{A(x)\hat{\rho}_t + (\hat{\rho} A(x)\bar{u})_x\} dx = 0$$

となり、よって a,b の任意性により

$$A(x)\hat{\rho}_t + (A(x)\hat{\rho}\bar{u})_x = 0 \tag{8}$$

が得られる。これは、$\hat{\rho}, \bar{u}$ に関する (1) の 1 本目の式に対応する。

次は運動量。まずは、(6) の 2 本目の、$j = x$ に対する式を積分する。

$$\begin{aligned}
\int_{V(a,b)} (\rho u)_t \, dv \;&=\; \int_a^b dx \int_{S(x)} (\hat{\rho} u)_t \, dydz \;=\; \int_a^b \left(\hat{\rho} \int_{S(x)} udydz \right)_t dx \\
&=\; \int_a^b (\hat{\rho} A(x) \bar{u})_t \, dx
\end{aligned}$$

で、発散の積分は、1 本目と同様境界条件により、

$$\begin{aligned}
\int_{V(a,b)} \nabla \cdot (\rho u \boldsymbol{v} + P \boldsymbol{e}_x) dv \;&=\; \int_{\partial V(a,b)} \hat{\rho} u \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_{V(a,b)} \hat{P}_x \, dv \\
&=\; \left[\hat{\rho} \int_{S(x)} u^2 dydz \right]_a^b + \int_a^b \hat{P}_x A(x) dx \;=\; \left[\hat{\rho} A(x) \overline{u^2}(x,t) \right]_a^b + \int_a^b A(x) \hat{P}_x \, dx
\end{aligned}$$

と変形できる。よって、

$$\int_a^b A(x)(\hat{\rho}\bar{u})_t \, dx + \left[\hat{\rho} A(x) \overline{u^2}(x,t) \right]_a^b + \int_a^b A(x) \hat{P}_x \, dx = 0$$

と a, b の任意性により、

$$A(x)(\hat{\rho}\bar{u})_t + (A(x)\hat{\rho}\,\overline{u^2})_x + A(x)\hat{P}_x = 0 \tag{9}$$

が得られる。これは、(1) の 2 本目と完全に同じものではないが、$\overline{u^2}$ が近似的に $\bar{u}^2$ に等しいと考えれば (例えば u が x, t にのみ依存する場合など)、$\hat{\rho}, \bar{u}$ に関する (1) の 2 本目の式に対応する。

同様に、(6) の 2 本目の、$j = y$ に対する式を積分してみると、

$$\nabla \cdot (P \boldsymbol{e}_y) = \hat{P}_y = 0$$

および境界条件により、

$$\begin{aligned}
\int_{V(a,b)} (\rho v)_t \, dv \;&=\; \int_a^b (\hat{\rho} A(x) \bar{v})_t \, dx, \\
\int_{V(a,b)} \nabla \cdot (\rho v \boldsymbol{v} + P \boldsymbol{e}_y) dv \;&=\; \int_{\partial V(a,b)} \hat{\rho} v \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS \;=\; \left[\hat{\rho} \int_{S(x)} uvdydz \right]_a^b \\
&=\; \left[\hat{\rho} A(x) \overline{uv} \right]_a^b
\end{aligned}$$

となり、よって、

$$A(x)(\hat{\rho}\bar{v})_t + (A(x)\hat{\rho}\,\overline{uv})_x = 0 \tag{10}$$

が得られる。同様に、$j = z$ の式を積分すれば、

$$A(x)(\hat{\rho}\bar{w})_t + (A(x)\hat{\rho}\,\overline{uw})_x = 0 \tag{11}$$

が得られる。

最後はエネルギー。(6) の 3 本目を積分する。

$$\begin{aligned}
\int_{V(a,b)} (\rho E)_t\,dv &= \int_a^b \left(\hat{\rho}\int_{S(x)} Edydz\right)_t dx = \int_a^b (\hat{\rho}A(x)\bar{E})_t\,dx,\\
\int_{V(a,b)} \nabla\cdot\{(\rho E + P)\boldsymbol{v}\}dv &= \int_{\partial V(a,b)} (\hat{\rho}E + \hat{P})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS\\
&= \left[\int_{S(x)} (\hat{\rho}E + \hat{P})udydz\right]_a^b = \Big[A(x)(\hat{\rho}\,\overline{Eu} + \hat{P}\bar{u})\Big]_a^b
\end{aligned}$$

よって、

$$A(x)(\hat{\rho}\bar{E})_t + \{A(x)(\hat{\rho}\,\overline{Eu} + \hat{P}\bar{u})\}_x = 0 \tag{12}$$

となる。ここで、$\bar{E}, \overline{Eu}$ は、

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) + \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{\hat{P}}{\hat{\rho}}, \quad \overline{Eu} = \frac{1}{2}(\overline{u^3} + \overline{uv^2} + \overline{uw^2}) + \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{\hat{P}}{\hat{\rho}}\bar{u}$$

である。よって (12) は (1) の 3 本目とは完全には一致しないが、近似的に

$$\overline{v^2} = \overline{w^2} = \overline{uv^2} = \overline{uw^2} = 0, \quad \overline{u^2} = \bar{u}^2, \quad \overline{u^3} = \bar{u}^3$$

と考えれば (1) の 3 本目に対応する。

4 断面での積分のみでの導出

3 節では、3 次元圧縮性オイラー方程式 (6) を $V(a,b)$ で積分して、ほぼ (1) に対応するものを積分方程式から改めて導いたが、$V(a,b)$ で積分して a, b の任意

性を利用して x に関する微分方程式を導くのは、(6) を導く過程から考えれば 2 度手間になっている。

むしろ、x 方向の積分を外して、3 次元圧縮性オイラー方程式 (6) を $S(x)$ 上で y,z にのみ微分するだけで 3 節と同じものが得られるはずである。本節ではそれを紹介する。

ただし、3 節では、3 次元体積分に対する発散定理や境界条件のおかげで断面 $S(x)$ や壁 $B(a,b)$ などの数式表示、パラメーター表示は必要なかったが、$S(x)$ 上での積分の場合、Green の公式は使えるものの、発散定理が使えず、少し議論が難しくなるものがあり、また、$S(x)$ の境界積分 (線積分) が出てくるので、境界のパラメータ表示も必要になる。

壁 $B(a,b)$ は、各断面 $S(x)$ の境界線 $C(x)$ の x 毎のパラメータ表示を使って、以下のように表されているとする。

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(x,\xi(x,\tau),\eta(x,\tau))\quad(\alpha\leq\tau\leq\beta,\ \ a<x<b) \tag{13}$$

$\xi(x,\tau),\eta(x,\tau)$ は連続かつ区分的に C^1 な関数で、

$$(\xi,\eta)|_{\tau=\alpha}=(\xi,\eta)|_{\tau=\beta}$$

を満たし、$(\xi(x,\tau),\eta(x,\tau))$ は x を固定すれば $C(x)$ のパラメータ表示になっていて、かつそれは τ の増加に沿って $S(x)$ を左側に見ながら反時計回りに進むものとする。

$B(a,b)$ のパラメータ表示 (13) の最も典型的なものは、極形式

$$y=R(x,\theta)\cos\theta,\quad z=R(x,\theta)\sin\theta\quad(0\leq\theta\leq 2\pi,\ \ R>0)$$

である。(13) は、この極形式では表せないものも含んでいる。

この場合、$C(x)$ の接線ベクトル $(\xi_\tau(x,\tau),\eta_\tau(x,\tau))$ は $S(x)$ が左に接するので、それを 90° 時計回りに回転したベクトル $(\eta_\tau(x,\tau),-\xi_\tau(x,\tau))$ は $C(x)$ の、$S(x)$ に対して外向きの法線ベクトルとなる。

(13) より、

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tau}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}=(0,\xi_\tau,\eta_\tau)\times(1,\xi_x,\eta_x)=(\Delta,\eta_\tau,-\xi_\tau) \tag{14}$$

となる。ここで、$\Delta=\Delta(x,\tau)=\xi_\tau\eta_x-\xi_x\eta_\tau$ とした。これは、$B(a,b)$ の法線ベクトルで、$V(a,b)$ に関して外向きになる。よって、$B(a,b)$ の外向き単位法線ベク

トル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tau} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right) \Bigg/ \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tau} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right| = \frac{(\Delta, \eta_\tau, -\xi_\tau)}{\sqrt{\Delta^2 + \xi_\tau^2 + \eta_\tau^2}} \tag{15}$$

となる。よって、境界条件 (7) は、

$$u\Delta + v\eta_\tau - w\xi_\tau = 0 \tag{16}$$

となる。

本節でも、$\rho(x, y, z, t) = \hat{\rho}(x, t)$ 等は 3 節と同じとし、まず、(6) の 1 本目を $S(x)$ で積分する。

$$\int_{S(x)} \rho_t \, dydz = \hat{\rho}_t A(x)$$

であり、空間微分の y, z 方向の微分は Green の公式より、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S(x)} \{(\rho v)_y + (\rho w)_z\} dydz = \oint_{C(x)} (\rho v dz - \rho w dy) \\ &= \hat{\rho} \int_\alpha^\beta \{v(\xi, \eta)\eta_\tau - w(\xi, \eta)\xi_\tau\} d\tau \end{aligned}$$

となるが、境界条件 (16) より、

$$I_1 = -\hat{\rho} \int_\alpha^\beta u(x, \xi, \eta, t)\Delta(x, \tau) d\tau$$

となる。一方、x 方向の微分に対しては、5 節の補題 1 を用いる。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{S(x)} (\rho u)_x \, dydz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{S(x)} \hat{\rho} u dydz + \int_\alpha^\beta \hat{\rho} u(x, \xi, \eta, t)\Delta(x, \tau) d\tau \\ &= \left(\hat{\rho} \int_{S(x)} u dydz\right)_x + \hat{\rho} \int_\alpha^\beta u(x, \xi, \eta, t)\Delta(x, \tau) d\tau \\ &= (\hat{\rho} A(x)\bar{u})_x + \hat{\rho} \int_\alpha^\beta u(x, \xi, \eta, t)\Delta(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

となるので、

$$I_1 + I_2 = (\hat{\rho} A(x)\bar{u})_x$$

となるので、(6) の 1 本目の積分により、(8) と同じものが得られる。

次は、(6) の 2 本目の $j=x$ の式を $S(x)$ で積分する。1 本目同様、Green の公式と補題 1 を用いる。

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{S(x)} (\rho u)_t\,dydz \;=\; \left(\hat\rho \int_{S(x)} udydz\right)_t \;=\; (\hat\rho A(x)\bar u)_t, \\
I_4 &= \int_{S(x)} \{(\rho uv)_y + (\rho uw)_z\} dydz \;=\; \hat\rho \oint_{C(x)} (uvdz - uwdy) \\
&= \hat\rho \int_\alpha^\beta \{(uv)|_{C(x)}\eta_\tau - (uw)|_{C(x)}\xi_\tau\} d\tau \;=\; -\hat\rho \int_\alpha^\beta u^2|_{C(x)}\Delta\,d\tau, \\
I_5 &= \int_{S(x)} (\rho u^2 + P)_x\,dydz \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\int_{S(x)} \hat\rho u^2 dydz + \int_\alpha^\beta \hat\rho u^2|_{C(x)}\Delta\,d\tau + \hat P_x A(x) \\
&= (\hat\rho A(x)\overline{u^2})_x + \hat\rho \int_\alpha^\beta u^2|_{C(x)}\Delta\,d\tau + \hat P_x A(x)
\end{aligned}
$$

よって、この I_3, I_4, I_5 の和 (=0) により、(9) が得られる。

同じく、(6) の 2 本目の $j=y$ の式を $S(x)$ で積分すると、

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \int_{S(x)} (\rho v)_t\,dydz \;=\; \left(\hat\rho \int_{S(x)} vdydz\right)_t \;=\; (\hat\rho A(x)\bar v)_t, \\
I_7 &= \int_{S(x)} \{(\rho v^2)_y + (\rho vw)_z + P_y\} dydz \;=\; \hat\rho \oint_{C(x)} (v^2 dz - vwdy) + 0 \\
&= \hat\rho \int_\alpha^\beta \{(v^2)|_{C(x)}\eta_\tau - (vw)|_{C(x)}\xi_\tau\} d\tau \;=\; -\hat\rho \int_\alpha^\beta vu|_{C(x)}\Delta\,d\tau, \\
I_8 &= \int_{S(x)} (\rho uv)_x\,dydz \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\int_{S(x)} \hat\rho uvdydz + \int_\alpha^\beta \hat\rho uv|_{C(x)}\Delta d\tau \\
&= (\hat\rho A(x)\overline{uv})_x + \hat\rho \int_\alpha^\beta uv|_{C(x)}\Delta d\tau
\end{aligned}
$$

なので、$I_6 + I_7 + I_8 = 0$ より (10) が得られる。同様に、$j=z$ の式の積分により、(11) が得られる。

最後は (6) の 3 本目の積分。

$$
\begin{aligned}
I_9 &= \int_{S(x)} (\rho E)_t\,dydz \;=\; \left(\hat\rho \int_{S(x)} Edydz\right)_t \;=\; (\hat\rho A(x)E)_t, \\
I_{10} &= \int_{S(x)} \{((\rho E + P)v)_y + ((\rho E + P)w)_z\} dydz \\
&= \oint_{C(x)} (\hat\rho E + \hat P)(vdz - wdy)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\alpha^\beta (\hat\rho E+\hat P)|_{C(x)}\{v|_{C(x)}\eta_\tau - w|_{C(x)}\xi_\tau\}d\tau \ = \ -\int_\alpha^\beta (\hat\rho E+\hat P)u|_{C(x)}\Delta\, d\tau, \\
I_{11} &= \int_{S(x)} ((\rho E+P)u)_x\, dydz \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_{S(x)} (\hat\rho E+\hat P)udydz + \int_\alpha^\beta (\hat\rho E+\hat P)u|_{C(x)}\Delta\, d\tau \\
&= (\hat\rho A(x)\overline{Eu} + \hat P A(x)\bar u)_x + \int_\alpha^\beta (\hat\rho E+\hat P)u|_{C(x)}\Delta\, d\tau
\end{aligned}
$$

よって、$I_9+I_{10}+I_{11}=0$ により (12) が得られる。

5 補題

ここでは、4 節で用いた補題の照明を紹介する。

$V(a,b)$, $B(a,b)$, $S(x)$ 等の記号は 1 節で導入したもの、曲面のパラメータは 4 節で導入したものを用いる。

補題 1

$f=f(x,y,z)$ に対して、

$$
\frac{d}{dx}\int_{S(x)} fdydz = \int_{S(x)} f_x\, dydz - \int_\alpha^\beta f(x,\xi(x,\tau),\eta(x,\tau))\Delta(x,\tau)d\tau
$$

証明

発散定理を用いると、

$$
I = \int_{V(a,b)} \nabla\cdot(f,0,0)dv = \int_{\partial V(a,b)} fn_x\, dS = \int_{B(a,b)} fn_x\, dS + \left[\int_{S(x)} fdydz\right]_a^b
$$

となる。(14), (15) より、$B(a,b)$ 上では

$$
\boldsymbol{n}dS = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\tau}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\,dydz
$$

より $n_x dS = \Delta dydz$ なので、

$$
\int_{B(a,b)} fn_x\, dS = \int_a^b dx\int_\alpha^\beta f|_{C(x)}\Delta d\tau
$$

より、

$$I = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f|_{C(x)} \Delta d\tau + \left[\int_{S(x)} f dydz \right]_a^b$$

となる。一方、

$$I = \int_{V(a,b)} \nabla \cdot (f,0,0) dv = \int_{V(a,b)} f_x \, dx = \int_a^b dx \int_{S(x)} f_x \, dydz$$

となるので、

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f|_{C(x)} \Delta d\tau + \frac{d}{dx} \int_{S(x)} f dydz \right\} dx = \int_a^b dx \int_{S(x)} f_x \, dydz$$

となる。a, b の任意性により、

$$\int_\alpha^\beta f|_{C(x)} \Delta d\tau + \frac{d}{dx} \int_{S(x)} f dydz = \int_{S(x)} f_x \, dydz$$

■

補題 2

$$\int_\alpha^\beta \Delta(x,\tau) d\tau = -A'(x)$$

証明

(1) で $f \equiv 1$ とすれば得られる。■

6 最後に

本稿では、ノズル方程式 (1) を、通常用いられる積分保存に戻る方法ではなく、3 次元オイラー方程式から得る方法について考察し、4 節でそれを実現した。

ただ、そのこと自体にさしたる意味はなく、(1) の物理的な意味を考える上ではむしろ積分保存に戻る方が適しているとも言えるので、本稿はあくまで私の素朴な疑問、すなわち 3 次元オイラー方程式から直接得ることはできないのかということに答えただけのものになっているが、個人的にはそれで十分満足である。

参考文献

[1] 生井武文、松尾一泰、「圧縮性流体の力学」、理工学社 (2001)

[2] 松尾一泰、「圧縮性流体力学 –内部流れの理論と解析」、オーム社 (2013)

[3] Wikipedia、「ウェブスターのホルン方程式」、
https://ja.wikipedia.org/wiki/ウェブスターのホルン方程式

[4] エリ・ランダウ、イェ・リフシッツ (竹内均 訳)、「流体力学 2」、東京図書 (1971)