2018 年 03 月 02 日

3 乗根と平方根の 2 重根号について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

高校では教わらないが、そして実は大学でも普通は教わらないが、2 次方程式と同様に 3 次方程式にも解の公式があり、すべての 3 次方程式は、3 乗根と平方根と複素数を使って解を表すことができる。

しかし、その公式は 3 乗根と平方根の 2 重根号で表現され、方程式が例えば整数などの簡単な解を持っていても、その公式を使うとそれが 3 乗根と平方根の 2 重根号で書かれてしまって、それが簡単な解であることがわからない、という問題もある。

本稿ではそれを逆用し、3 次方程式の解を利用して 3 乗根と平方根の 2 重根号を外す方法について考察してみたので、ここにまとめておく。

2 概要

本稿では、以下の形の 3 乗根と平方根の 2 重根号を外す方法について考察する。

$$X = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} \quad (a, b, c \in \mathbb{Q},\ \sqrt{c} \notin \mathbb{Q}) \tag{1}$$

ここで、$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合とし、以後同様に、$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ自然数全体の集合、整数全体の集合、実数全体の集合、複素数全体の集合を表すのに使用する。

3 次方程式の解の公式を使うと、実は解は易しい形の解なのに、3 乗根と平方根の 2 重根号で表されてしまう場合がある。

例えば、

$$x^3 - x - 6 = 0 \tag{2}$$

という 3 次方程式の左辺は因数分解できて、

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3) \tag{3}$$

となるので、(2) の解は

$$x = 2, -1 \pm \sqrt{2}i$$

となる。

しかし、(2) を解の公式、すなわち 3 次方程式の一般的な解法を用いて解くと、この解のうち $x = 2$ は

$$x = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}} + \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}} \tag{4}$$

となり、この 3 乗根と平方根の 2 重根号を外すことが容易ではないため、これが 2 であることはなかなかわからない。

この (2) を (3) の形に因数分解することと、(4) の「2 重根号を外す」ことでは前者の方が易しいので、本稿ではむしろ「2 重根号を外す」ことに 3 次方程式の因数分解を利用することを考える。

ちなみに、上の例の (4) の 2 重根号については、

$$3 + \frac{11}{9}\sqrt{6} = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3, \quad 3 - \frac{11}{9}\sqrt{6} = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 \tag{5}$$

が成り立つので、これにより (4) は確かに

$$x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = 2$$

となることがわかる。しかし、(5) を見つけることは容易ではない。例えば、

$$3 + \frac{11}{9}\sqrt{6} = (\alpha + \beta\sqrt{6})^3 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \tag{6}$$

と置いて、このような有理数 α, β があるかどうかを考えてみると、

$$(\alpha + \beta\sqrt{6})^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta\sqrt{6} + 18\alpha\beta^2 + 6\beta^3\sqrt{6}$$

より α, β は

$$\begin{cases} \alpha(\alpha + 18\beta^2) & = 3, \\ 3\beta(\alpha^2 + 2\beta^2) & = \dfrac{11}{9} \end{cases}$$

を満たすことになるが、この連立方程式を解くのは容易ではない。また、平方根と平方根の 2 重根号の場合もそうであるが、そもそも (6) が成り立つのはかなり特殊な状況で、通常はむしろ

$$3+\frac{11}{9}\sqrt{6}=\gamma(\alpha+\beta\sqrt{6})^3\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}) \tag{7}$$

の形で考える必要がある。そのような α,β,γ を見つけるのは相当厄介な問題で、それがあるかどうかも容易にはわからない。

それに比べて、有理数係数の 3 次式の因数分解の方がむしろ易しく、その方法はかなり確立されているし、それが有理数の範囲で因数分解できるかどうかも容易に判定できる。

つまり、3 次方程式の解の公式を使って (2) の解の $x=2$ を求めることは難しいが、因数分解により $x=2$ を求めることは難しくないので、それを $\sqrt[3]{3+11\sqrt{6}/9}$ の 2 重根号を外すことに利用する、というのが本稿の目的である。

3 3 次方程式の解法

本節では、3 次方程式の一般的な解法 (解の公式) を紹介する。本稿では、

$$x^3+ax+b=0\quad(a,b\in\mathbb{R}) \tag{8}$$

の形の 3 次方程式についてのみ説明するが、より一般の

$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0\quad(\alpha\neq 0)$$

の形の 3 次方程式を (8) の形に帰着させるのは難しいことではない (例えば [1] 参照)。また、係数 a,b は本節では実数とするが、その他の節では原則有理数のみを扱う。

(8) において $x=u+v$ として代入すると、

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+a(u+v)+b=0 \tag{9}$$

が得られる。ここから

$$u^3+v^3=-b,\quad uv=-\frac{a}{3} \tag{10}$$

を満たす u, v を求めて $x = u + v$ とする、というのが一般的な3次方程式の解法 (解の公式) である。

なお、(9) から (10) が成り立たなければいけないわけではないが、(10) が成り立てば (9) は当然成り立つ。そして、(10) から3つの解はすべて得られる、という仕組みになっている。また、x, u, v は一般には複素数である。

(10) より、u^3, v^3 は、2次方程式

$$\lambda^2 + b\lambda - \frac{a^3}{27} = 0 \tag{11}$$

の解となる。この方程式の判別式

$$D_1 = b^2 + \frac{4a^3}{27} \tag{12}$$

の符号により、場合分けして考える。

まずは $D_1 > 0$ の場合であるが、この場合 (11) は異なる2つの実数解

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{D_1}}{2},\ \lambda_2 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{D_1}}{2} \tag{13}$$

を持つ。$u^3 = \lambda_1$, $v^3 = \lambda_2$ と対応させれば、$u, v \in \mathbb{C}$ より

$$u = \sqrt[3]{\lambda_1}, \sqrt[3]{\lambda_1}\,\omega, \sqrt[3]{\lambda_1}\,\omega^2, \quad v = \sqrt[3]{\lambda_2}, \sqrt[3]{\lambda_2}\,\omega, \sqrt[3]{\lambda_2}\,\omega^2 \tag{14}$$

となる。ここで、ω は

$$\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

で、

$$\omega^2 = e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{\omega}, \quad \omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \tag{15}$$

を満たす。なお、(11) の解と係数の関係より、

$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{a^3}{27}$$

なので、$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ より

$$\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{a}{3}$$

となるから、(14) の 3×3 の組み合わせのうち、(10) の $uv = -a/3$ を満たすものは

$$(u,v) = \left(\sqrt[3]{\lambda_1}, \sqrt[3]{\lambda_2}\right),\ \left(\sqrt[3]{\lambda_1}\,\omega, \sqrt[3]{\lambda_2}\,\omega^2\right),\ \left(\sqrt[3]{\lambda_1}\,\omega^2, \sqrt[3]{\lambda_2}\,\omega\right)$$

の 3 種類であることがわかる。これにより、3 次方程式 (8) の解は

$$x = u + v = \sqrt[3]{\lambda_1} + \sqrt[3]{\lambda_2},\ \ \sqrt[3]{\lambda_1}\,\omega + \sqrt[3]{\lambda_2}\,\omega^2,\ \ \sqrt[3]{\lambda_1}\,\omega^2 + \sqrt[3]{\lambda_2}\,\omega \tag{16}$$

と表される。最初のものは実数であるが、$\sqrt[3]{\lambda_1} < \sqrt[3]{\lambda_2}$ より後の 2 つは虚数となる。よって、$D_1 > 0$ の場合は、方程式 (8) は 1 つの実数解と 2 つの虚数解を持つことになる。

λ_1, λ_2 は (13) のように平方根で表されるので、一般にはこの解には (1) の形の 2 重根号が含まれることになる ($a, b \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{D_1} \notin \mathbb{Q}$ の場合)。

次は $D_1 = 0$ の場合であるが、この場合は

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2}$$

となり、また (15) より $\omega + \omega^2 = -1$ なので、解は

$$x = 2\sqrt[3]{\lambda_1}, -\sqrt[3]{\lambda_1} = -2\sqrt[3]{\frac{b}{2}},\ \ \sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

の 2 つであることがわかる (後者は重解)。この場合は解には 2 重根号は現れない。

最後は $D_1 < 0$ の場合であるが、この場合 λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{-D_1}}{2}\,i,\ \lambda_2 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{-D_1}}{2}\,i \tag{17}$$

の虚数となる。つまり u, v は「虚数の 3 乗根」となるが、それを認めれば、形式的に (16) と同じ式が解となる。以下でこの虚数の 3 乗根について少し説明し、その式の意味をもう少し明らかにする。

虚数 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},\,b\neq 0)$ に対して、$p^3=z$ となる複素数 p を z の 3 乗根と呼ぶが、その実部と虚部を a,b で表すのは難しい。z を極座標表示して $z=re^{i\theta}$ $(r\geq 0)$ とすると、$p^3=z$ となる p は

$$p=\sqrt[3]{r}\,e^{i\theta/3},\sqrt[3]{r}\,e^{i(\theta+2\pi)/3},\sqrt[3]{r}\,e^{i(\theta+4\pi)/3}=\sqrt[3]{r}\,e^{i\theta/3},\sqrt[3]{r}\,e^{i\theta/3}\omega,\sqrt[3]{r}\,e^{i\theta/3}\omega^2$$

と表される。これが z の 3 乗根であり、複素数では 3 つあることになる。

今、(17) の λ_1 を $\lambda_1=Re^{i\phi}$ $(R\geq 0)$ と極座標表示すると、(12) より

$$R=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{-D_1}{4}}=\sqrt{-\frac{a^3}{27}} \tag{18}$$

となる。また、λ_2 は λ_1 の共役であるから $\lambda_2=Re^{-i\phi}$ となり、よって u,v はそれぞれ

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{R}\,e^{i\phi/3},\sqrt[3]{R}\,e^{i\phi/3}\omega,\sqrt[3]{R}\,e^{i\phi/3}\omega^2,\\ v &= \sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3},\sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3}\omega,\sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3}\omega^2 \end{aligned}$$

となる。この中で (10) の $uv=-a/3$ となるのは、(18) より $\sqrt[3]{R}=\sqrt{-a/3}$ なので、

$$\begin{aligned} (u,v) &= \left(\sqrt[3]{R}\,e^{i\phi/3},\ \sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3}\right),\ \left(\sqrt[3]{R}\,e^{i\phi/3}\,\omega,\ \sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3}\,\omega^2\right),\\ &\quad \left(\sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3}\,\omega^2,\ \sqrt[3]{R}\,e^{-i\phi/3}\,\omega\right) \end{aligned}$$

の 3 種類となる。これらはいずれも $v=\bar{u}$ となっているので、結局

$$x=u+v=2\sqrt[3]{R}\cos\frac{\phi}{3},\ \ 2\sqrt[3]{R}\cos\frac{\phi+2\pi}{3},\ \ 2\sqrt[3]{R}\cos\frac{\phi+4\pi}{3} \tag{19}$$

のように表されることになる。よって、この $D_1<0$ の場合は 3 つの実数解が得られる。

なお、この 3 つの実数解 (19) については、最初から方程式を cos の 3 倍角の公式と比較して解を三角関数 (と逆三角関数) で表現する方法もあるが ([1] 参照)、それは結果的に (19) とほぼ同等である。

本稿で必要となる、「実数の範囲での 3 乗根と平方根の 2 重根号」が現れるのは、結局 $D_1>0$ の場合の唯一の実数解となる。

4 6 次方程式への帰着

今、例えば 2 重根号

$$x = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}} \tag{20}$$

を外すために、普通にこの x が満たす代数方程式を求めると、(20) をまず 3 乗して

$$x^3 = 3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}$$

となり、3 を移項して 2 乗すれば

$$(x^3 - 3)^2 = \frac{11^2 \times 6}{3^4}$$

が得られ、よって有理数係数の 6 次方程式

$$x^6 - 6x^3 + \frac{1}{27} = 0$$

が得られる。もし、この方程式の 2 次式の因数をなんらかの方法で見つけて

$$x^6 - 6x^3 + \frac{1}{27} = \left(x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right)\left(x^4 + 2x^3 + \frac{11}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) \tag{21}$$

と因数分解とし、そして x が

$$x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

の解で、よって $x = 1 + \sqrt{6}/3$ であることを知る方法があれば、このような手順でも 2 重根号を外すことができるかもしれないが、この道筋には、以下のような難点がある。

- 6 次式の 2 次因数を見つけることが困難
- x がその 2 次方程式の解であることを示すことが困難

前者も易しくはないが、後者は x が残りの 4 次方程式の解ではないことを示す必要があり、(21) の場合にはその 4 次方程式が実数解を持たないことから示されるのであるが、それをちゃんと示すのは易しくない。

よって、この 6 次方程式を経由する方法は良い方法ではなく、次節では 3 節で紹介した 3 次方程式の解を利用する方法を紹介する。

5 3 次方程式の利用

本節で、3 乗根と平方根の 2 重根号 (1) を、3 次方程式を利用して外す方法を紹介する。基本的には、(7) のように

$$a+b\sqrt{c}=\gamma(\alpha+\beta\sqrt{c})^3 \quad (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}) \tag{22}$$

となる α,β,γ を見つけることが目標となるが、(22) がもし成り立てば、$\sqrt{c}\notin\mathbb{Q}$ であることから、

$$a-b\sqrt{c}=\gamma(\alpha-\beta\sqrt{c})^3 \tag{23}$$

となることもわかる (補題 9)。γ は、$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}$ と $\sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}$ の積を考えると、(22), (23) より

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}\,\sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}=\sqrt[3]{a^2-b^2c}=\sqrt[3]{\gamma^2}\,(\alpha^2-\beta^2c)$$

となるので、この積に現れる 3 乗根を消すようにその値を決めればよい。このとき、(22), (23) より

$$\sqrt[3]{\frac{a+b\sqrt{c}}{\gamma}}+\sqrt[3]{\frac{a-b\sqrt{c}}{\gamma}}=\alpha+\beta\sqrt{c}+\alpha-\beta\sqrt{c}=2\alpha$$

となるが、この左辺が 3 次方程式の解の形をしているので、これを解に持つ 3 次方程式を作り、その解を 3 次式の因数分解で求め、そこから α を定め、それを手掛かりに β を求める、という方向で 2 重根号を外すことができる。

その手順を具体的な例で 2, 3 示す。まずは、

$$x_1=\sqrt[3]{3+\frac{11}{9}\sqrt{6}}$$

を考える。これに対して、

$$x_2=\sqrt[3]{3-\frac{11}{9}\sqrt{6}}$$

とすると、

$$x_1x_2=\sqrt[3]{\left(3+\frac{11}{9}\sqrt{6}\right)\left(3-\frac{11}{9}\sqrt{6}\right)}=\sqrt[3]{9-\frac{11^2\times 6}{3^4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$$

となって 3 乗根が残らないので、この場合は γ は必要ない ($\gamma=1$)。また、

$$x_1^3+x_2^3=3+3=6$$

なので、$z=x_1+x_2$ とすると、

$$z^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=6+3\times\frac{1}{3}\times z$$

となり、z は 3 次方程式

$$z^3-z-6=0 \tag{24}$$

を満たすことがわかる。この式の左辺に $z=2$ を代入すると 0 になるので、(24) の左辺は

$$z^3-z-6=(z-2)(z^2+2z+3) \tag{25}$$

と因数分解され、よって (24) の解は $z=2,-1\pm\sqrt{2}\,i$ となり、実数である $z=x_1+x_2$ は 2 に等しいことがわかる。$\gamma=1$ だったので、

$$x_1+x_2=\alpha+\beta\sqrt{6}+\alpha-\beta\sqrt{6}=2\alpha=2$$

より $\alpha=1$ となる。よって、

$$x_1^3=3+\frac{11}{9}\sqrt{6}=(1+\beta\sqrt{6})^3=1+3\beta\sqrt{6}+18\beta^2+6\beta^3\sqrt{6}$$

と展開すると、

$$1+18\beta^2=3,\quad 3\beta(1+2\beta^2)=\frac{11}{9}$$

となり、前者より

$$\beta=\sqrt{\frac{3-1}{18}}=\frac{1}{3}$$

と求まるが、これは後者も確かに満たしている。これで、

$$x_1=\sqrt[3]{3+\frac{11}{9}\sqrt{6}}=1+\frac{\sqrt{6}}{3}$$

と 2 重根号が外せることになる。ついでに、x_2 も

$$x_2 = \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

となることがわかる。

例えば、$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ なども同様にして 2 重根号を外すことができる。

次は、γ が必要な場合として、今の x_1 の分母を払った、

$$x_3 = \sqrt[3]{27 + 11\sqrt{6}} \tag{26}$$

を考える。この場合、

$$x_4 = \sqrt[3]{27 - 11\sqrt{6}}$$

とすると、

$$x_3x_4 = \sqrt[3]{3^6 - 11^2 \times 6} = \sqrt[3]{729 - 726} = \sqrt[3]{3}$$

と 3 乗根が残るが、これを消すように γ を設定する。この場合は

$$x_5 = \sqrt[3]{3}\,x_3 = \sqrt[3]{81 + 33\sqrt{6}}, \quad x_6 = \sqrt[3]{3}\,x_4 = \sqrt[3]{81 - 33\sqrt{6}}$$

あるいは、

$$x_5' = \frac{x_3}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}} \ (= x_1), \quad x_6' = \frac{x_4}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}} \ (= x_2)$$

を x_3, x_4 の代わりに考えればよい。こうすれば、

$$x_5x_6 = \sqrt[3]{9}\,x_3x_4 = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \left(x_5'x_6' = \frac{x_3x_4}{\sqrt[3]{3^4}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{1}{3}\right)$$

となって 3 乗根が消えるからである。x_5', x_6' の方はこの先の計算は x_1, x_2 と同じなので、ここでは x_5, x_6 で計算してみる。

$x_5^3 + x_6^3 = 81 + 81 = 162$ なので、$z = x_5 + x_6$ とすると

$$z^3 = x_5^3 + x_6^3 + 3x_5x_6(x_5 + x_6) = 162 + 9z$$

より、

$$z^3 - 9z - 162 = 0 \tag{27}$$

を得る。なお、これは

$$z^3 - 1 \times 3^2 z - 6 \times 3^3 = 0$$

の形をしているので、$z = 3t$ として両辺を 3^3 で割ると

$$t^3 - t - 6 = 0 \tag{28}$$

と直すことができる。(27) が有理数の範囲で因数分解できることと、(28) が有理数の範囲で因数分解できることは同等であり、よって因数分解は後者を考えればよい。(25) により、結局 $t = 2$ で、

$$z = x_5 + x_6 = 3t = 6$$

であることがわかる。よってこの場合は $\alpha = 3$ であり、

$$x_5 = \sqrt[3]{81 + 33\sqrt{6}} = 3 + \beta\sqrt{6}$$

より、

$$81 + 33\sqrt{6} = (3 + \beta\sqrt{6})^3 = 27 + 54\beta^2 + \beta(27 + 6\beta^2)\sqrt{6}$$

から $\beta = 1$ が得られる。これで、$x_5 = 3 + \sqrt{6}$ となり、結局

$$x_3 = \frac{x_5}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt[3]{3}} \left(= \sqrt[3]{9} + \sqrt[6]{24}\right) \tag{29}$$

の形に (26) の 2 重根号が外せたことになる。

例えば、$\sqrt[3]{5 + 3\sqrt{3}}$ なども同様にして 2 重根号を外すことができる。

最後に、2 重根号が外せない例も紹介しておく。

$$x_7 = \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}}$$

とする。これに対して

$$x_8 = \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$$

とすると、

$$x_7x_8 = \sqrt[3]{9-5} = \sqrt[3]{4}$$

となるので、

$$x_9 = \sqrt[3]{4}\,x_7 = \sqrt[3]{12+4\sqrt{5}},\quad x_{10} = \sqrt[3]{4}\,x_8 = \sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$$

(あるいは $x'_9 = x_7/\sqrt[3]{2}$, $x'_{10} = x_8/\sqrt[3]{2}$ でもよい) とすると

$$x_9x_{10} = \sqrt[3]{16}\,x_7x_8 = 4,\quad x_9^3 + x_{10}^3 = 24$$

なので、$z = x_9 + x_{10}$ とすると

$$z^3 = x_9^3 + x_{10}^3 + 3x_9x_{10}(x_9+x_{10}) = 24 + 12z$$

より

$$z^3 - 12z - 24 = 0 \tag{30}$$

となり、$z = 2t$ として 8 で割れば

$$t^3 - 3t - 3 = 0 \tag{31}$$

が得られる ($t = x'_9 + x'_{10}$ に対応する)。

この (31) の左辺を有理数の範囲で因数分解するのであるが、それは整数係数の多項式で因数分解される必要があり (6.1 節、補題 5 参照)、よって 1 次因数として $t-n$ ($n = \pm 1, \pm 3$) の形の式を持たなければならない (6.3 節参照)。ところが、n として $\pm 1, \pm 3$ のいずれを (31) の左辺に代入しても 0 にはならないので、このような因数はないことがわかる。よって (31)、そして (30) は有理数の範囲では因数分解ができないことになる。

これにより、$z = x_9 + x_{10}$ は 3 乗根が外れることはなく (外れれば z は有理数になるはず)、よって、x_7, x_8 の 2 重根号も外すことができないことがわかる。

ここまでの方法をまとめると、以下のようになる。

1. $X = \sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}$ に対して $Y = \sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}$ とし、XY を計算する
2. XY に 3 乗根 $\sqrt[3]{p}$ が残る場合は、X, Y の代わりに $X' = \sqrt[3]{p}X$, $Y' = \sqrt[3]{p}Y$ を考える (それを改めて X, Y とする)
3. $z = X + Y$ として、$z^3 = X^3 + Y^3 + 3XYz$ により z が満たす有理数係数の 3 次方程式を求める
4. それが有理数の範囲で因数分解できなければ X の 2 重根号は外すことができず、因数分解できればその実数解が 2α となる
5. $X = \alpha + \beta\sqrt{c}$ として、これを 3 乗して係数比較することで β を求め、これで X の 2 重根号が外される
6. 2. を行った場合は、5. の結果を $\sqrt[3]{p}$ で割ることで X が求まる

6 補題の証明

この節では、前節までに用いたいくつかの事項 (補題) について説明や証明を行う。

6.1 有理数の範囲での因数分解

まずは、5 節の最後で使用した、多項式の有理数の範囲での因数分解が整数の範囲での因数分解に帰着される、という事実を示す。

以後、$\mathbb{Z}[x]$ を整数係数の多項式全体の集合、$\mathbb{Q}[x]$ を有理数係数の多項式全体の集合であるとし、$\mathbb{Q}_+$ を正の有理数全体の集合とする。

また、整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ に対して、その **最大公約数** を $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と書き、$a_1, a_2, \ldots, a_n$ すべてを割り切る (割った値が整数になる) 自然数のうち最大のもの、と定める。$a_1, a_2, \ldots, a_n$ のうち、0 でないものが 1 つでもあれば、$\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は有限な値として 1 つに定まる。

さらに、$f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[z]$ が $\gcd(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$ を満たすとき、$f(x)$ を **原始多項式** と呼ぶ。

補題 1. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ に対して、$pf(x) \in \mathbb{Z}[x]$ でかつ $pf(x)$ が原始多項式となる $p \in \mathbb{Q}_+$ が存在する。

証明

$f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_j x^j \quad (a_j \in \mathbb{Q},\ a_n \neq 0)$$

とする。まず、$ra_0, ra_1, \ldots, ra_n$ がすべて整数となるような自然数 r が存在することに注意する。例えば a_j の分母の積とでもすればよい。

次に、$q = \gcd(ra_0, ra_1, \ldots, ra_n)$ とすれば、ra_j/q はすべて整数で、それらの最大公約数は 1 になる。よって $p = r/q$ とすればよい。 ∎

補題 2. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が原始多項式で、$p \in \mathbb{Q}_+$ に対して $pf(x) \in \mathbb{Z}[x]$ でかつ $pf(x)$ も原始多項式のとき、$p = 1$ となる。

証明

p の規約表現を

$$p = \frac{r}{q} \quad (r, q \in N,\ \gcd(r, q) = 1)$$

とし、$f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \ (a_j \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0,\ \gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1)$$

とする。今、$q > 1$ と仮定する。このとき、すべての a_j が q で割り切れる $(a_j/q \in \mathbb{Z})$ と、$\gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1$ に反するので、q で割り切れない a_j が少なくとも 1 つ存在する。それを a_{j_0} とする。このとき、

$$pa_{j_0} = \frac{ra_{j_0}}{q}$$

は、$\gcd(r, q) = 1$ より r と q では約分はできず、よって $pa_{j_0} \notin \mathbb{Z}$ となるが、これは $pf(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に反する。よって $q = 1$ となる。

これで $p = r \in \mathbb{N}$ となるが、$p > 1$ ならば $pf(x)$ の係数はすべて p で割り切れることになり、$pf(x)$ が原始多項式であることに反する。ゆえに $p = 1$。

∎

補題 3. $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$ に対して、次は同値。

1. $f(x)$ は原始多項式。
2. 任意の素数 p に対し、p で割り切れない a_j が少なくとも 1 つ存在する。

証明

[2] による。

1. $\Longrightarrow$ 2.

すべての j に対して $a_j/p \in \mathbb{Z}$ となる素数 p があると、$\gcd(a_0, \ldots, a_n)$ も p で割り切れるが、これは $f(x)$ が原始多項式であることに反する。よって 1. ならば 2. となる。

2. $\Longrightarrow$ 1.

$\gcd(a_0, \ldots, a_n) = r > 1$ とする。このとき、r の素因数を 1 つとって p とすると、a_j はすべて p で割り切れるのでこれは 2. の仮定に反する。よって 2. ならば $r = 1$ となる。 $\blacksquare$

補題 4. $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ がともに原始多項式ならば、積 $f(x)g(x)$ も原始多項式となる。

証明

これも [2] による。補題 3 を利用する。

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

とすると、

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} x^i \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

となる。素数 p を任意に取ると、$f(x)$ は原始多項式なので、補題 3 により $a_0, \ldots, a_m$ のうち少なくとも 1 つは p で割り切れない。その最初のものを a_{j_0} とする $(0 \leq j_0 \leq m)$:

$$\frac{a_0}{p}, \ldots, \frac{a_{j_0-1}}{p} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{a_{j_0}}{p} \notin \mathbb{Z} \tag{32}$$

同様に $g(x)$ は原始多項式なので、$b_0, \dots, b_n$ のうち少なくとも 1 つは p で割り切れない。その最初のものを b_{k_0} とする $(0 \le k_0 \le n)$:

$$\frac{b_0}{p}, \dots, \frac{b_{k_0-1}}{p} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{b_{k_0}}{p} \notin \mathbb{Z} \tag{33}$$

このとき、$f(x)g(x)$ の $x^{j_0+k_0}$ の係数は

$$c_{j_0+k_0} = \sum_{j+k=j_0+k_0} a_j b_k = \sum_{\substack{j+k=j_0+k_0,\\ j<j_0}} a_j b_k + a_{j_0} b_{k_0} + \sum_{\substack{j+k=j_0+k_0,\\ j>j_0}} a_j b_k$$

であり、$j < j_0$ ならば (32) より a_j が p で割り切れ、$j > j_0$ ならば $k < k_0$ なので (33) より b_k が p で割り切れるから、$c_{j_0+k_0}$ は $a_{j_0} b_{k_0}$ 以外の項はすべて p で割り切れる。一方、p は素数で、(32), (33) より $a_{j_0} b_{k_0}$ は p を素因数に持たず、よって p で割り切れない。よって $c_{j_0+k_0}$ は p で割り切れないことになり、結局 $f(x)g(x)$ は p で割り切れない係数 $c_{j_0+k_0}$ を持つことがわかる。

p は任意だったので、補題 3 より $f(x)g(x)$ も原始多項式となる。∎

補題 5. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が有理数の範囲で因数分解されたとする。すなわち、$g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が $f(x) = g(x)h(x)$ となったとする。このとき、$f(x)$ は整数の範囲でも因数分解できる。より詳細には、$pg(x), h(x)/p \in \mathbb{Z}[x]$ となる $p \in \mathbb{Q}_+$ が存在する。

証明

まず $f(x)$ の係数の最大公約数を $k \in \mathbb{N}$ とすると、$f(x)/k$ は原始多項式となることに注意する。

補題 1 より、$pg(x), qh(x)$ が共に整数係数でかつ原始多項式となるような $p, q \in \mathbb{Q}_+$ が存在する。このとき、補題 4 より $(pg(x))(qh(x))$ も原始多項式で、

$$(pg(x))(qh(x)) = pqg(x)h(x) = pqf(x) = pqk\frac{f(x)}{k}$$

であり、$f(x)/k$ も原始多項式なので、補題 2 より $pqk = 1$ となる。よって $q = 1/(pk)$ で、

$$pg(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad \frac{h(x)}{p} = \frac{kh(x)}{pk} = k(qh(x)) \in \mathbb{Z}[x]$$

となり、この補題が証明された。∎

6.2 平方根に関する性質

次は、平方根に関する性質をいくつか説明し、それにより、例えば $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のような値が、有理数係数の 3 次方程式の解にはなりえないことを示すことを目標とする。

以後、$p,q\in\mathbb{Q}_+$ を

$$\sqrt{p}\notin\mathbb{Q},\ \ \sqrt{q}\notin\mathbb{Q},\ \ \sqrt{pq}\notin\mathbb{Q} \tag{34}$$

となるものとする。

補題 6. (34) のとき、$1,\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{pq}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立、すなわちこの 4 つのいずれの 1 つも、他の 3 つの有理数倍の和 (一次結合) として表すことはできない。

証明

まず、$\sqrt{q}$ を 1 と $\sqrt{p}$ の一次結合として表せないことを示す。もし、

$$\sqrt{q}=a+b\sqrt{p}\quad (a,b\in\mathbb{Q}) \tag{35}$$

となったとすると、両辺を 2 乗すれば

$$q=a^2+2ab\sqrt{p}+b^2p$$

となるので、$\sqrt{p}\notin\mathbb{Q}$ より $ab=0$ でなければならない。$b=0$ だと (35) より $\sqrt{q}=a$ となり $\sqrt{q}\notin\mathbb{Q}$ に反するので、$a=0$ となる。

よって、$\sqrt{q}=b\sqrt{p}$ となるが、これを $\sqrt{p}$ 倍すれば $\sqrt{pq}=bp\in\mathbb{Q}$ となり、$\sqrt{pq}\notin\mathbb{Q}$ に反する。よって (35) のように表すことはできない。

この議論の p,q を入れかえれば、$\sqrt{p}$ を 1 と $\sqrt{q}$ の一次結合として表せないこともわかる。そして、1 を $\sqrt{p}$ と $\sqrt{q}$ の一次結合として表せないこともわかる。それは、もし

$$1=a\sqrt{p}+b\sqrt{q}\quad (a,b\in\mathbb{Q})$$

と表せたとすると、a,b のいずれかは 0 でないので、例えば $a\neq 0$ ならば、

$$\sqrt{p}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}\sqrt{q}$$

となり、$\sqrt{p}$ が 1 と $\sqrt{q}$ の一次結合として表せることになってしまうからである。$b \neq 0$ の場合も同様。

次は、$\sqrt{pq}$ が $1, \sqrt{p}, \sqrt{q}$ の一次結合として表せないことを示す。なお、もしこれが成り立てば、上と同じ議論により、1 や $\sqrt{p}, \sqrt{q}$ を他の 3 つの一次結合で表すことができないことも示される。今、

$$\sqrt{pq} = a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}) \tag{36}$$

となったとする。このとき、

$$\sqrt{q}(\sqrt{p} - c) = a + b\sqrt{p}$$

となるが、$\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ より $\sqrt{p} - c \neq 0$ なので、これで割れば

$$\sqrt{q} = \frac{a + b\sqrt{p}}{\sqrt{p} - c} = \frac{(a + b\sqrt{p})(\sqrt{p} + c)}{p - c^2}$$

と書ける。この最後の式を展開すれば $d + e\sqrt{p}$ $(d, e \in \mathbb{Q})$ の形にできるので、$\sqrt{q}$ が 1 と $\sqrt{p}$ の一次結合として表せることになり前の結論に反する。よって、(36) の形に表すことはできない。 ■

補題 7. (34) のとき、$A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathbb{Q}$ により

$$A + B\sqrt{p} + C\sqrt{q} + D\sqrt{pq} = A' + B'\sqrt{p} + C'\sqrt{q} + D'\sqrt{pq}$$

となったとすると、$A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$ となる。

証明

移項すれば、

$$(A - A') + (B - B')\sqrt{p} + (C - C')\sqrt{q} + (D - D')\sqrt{pq} = 0$$

となるが、この係数の 1 つでも 0 でないものがあれば、それで割り算することでその項が他の 3 項の一次結合で表されることになり、補題 6 に反する。 ■

補題 8. (34) のとき、$1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}$ の有理数係数の一次結合

$$a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Q}) \tag{37}$$

の形の式同士の四則演算は、いずれもまたこの形で一意的に表される。

証明

和、差、積がまたこの形になることは容易にわかる。商は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq}} \\ &\quad = \frac{1}{a + b\sqrt{p} + \sqrt{q}(c + d\sqrt{p})} = \frac{(a + b\sqrt{p}) - \sqrt{q}(c + d\sqrt{p})}{(a + b\sqrt{p})^2 - q(c + d\sqrt{p})^2} \end{aligned}$$

と変形すると、分母の $\sqrt{q}$ を消せるので、さらに有理化して分母の $\sqrt{p}$ も消せることが容易にわかる。よって $1/(a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq})$ も (37) の形に表すことができるので、それらの商も (37) の形に表せる。

その表現の一意性については、補題 7 で保証される。 ∎

補題 9. (34) のとき、

1. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ に対し、

$$f(a + b\sqrt{p}) = A + B\sqrt{p} \quad (A, B \in \mathbb{Q}) \tag{38}$$

のとき、

$$f(a - b\sqrt{p}) = A - B\sqrt{p} \tag{39}$$

となる。

2. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ に対し、

$$\begin{aligned} &f(a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q}) = A + B\sqrt{p} + C\sqrt{q} + D\sqrt{pq} \\ &\quad (A, B, C, D \in \mathbb{Q}) \end{aligned} \tag{40}$$

のとき、$\theta = \pm 1$, $\phi = \pm 1$ に対して (複合は同順でなくてよい)、

$$f(a + \theta b\sqrt{p} + \phi c\sqrt{q}) = A + \theta B\sqrt{p} + \phi C\sqrt{q} + \theta\phi D\sqrt{pq} \tag{41}$$

となる。

証明

1.

多項式の展開の計算で $\sqrt{p}$ が残る (B の方) のは、$b\sqrt{p}$ の奇数乗と有理数との積で、$\sqrt{p}$ が残らない (A の方) は、$b\sqrt{p}$ の偶数乗か $b\sqrt{p}$ が含まれない項と有理数との積。よって A, B を b の多項式と見れば、A は b の偶数次の項からなる多項式で、B は b の奇数次の項からなる多項式 (いずれも有理数係数) となり、B には定数項はなく、すべての項が少なくとも b を 1 つ含む。よって (38) の b の代わりに $-b$ を代入すれば (39) が得られる。

2.

1. と同様に考え、A, B, C, D を b, c の有理数係数の多項式と考えると、A には b の偶数乗と c の偶数乗しか現れない。また、B には b の奇数乗と c の偶数乗のみが現れてすべての項が b を少なくとも 1 つ持ち、C には b の偶数乗と c の奇数乗のみが現れてすべての項が c を少なくとも 1 つ持つ。また、D には b の奇数乗と c の奇数乗のみが現れてすべての項が bc を因数に持つ。これらのことから b の代わりに θb、c の代わりに ϕc を代入すれば、$\theta^2 = \phi^2 = 1$ より (41) が得られる。 ∎

補題 10. (34) のとき、

1. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ が

$$f(a + b\sqrt{p}) = 0$$

を満たす、すなわち $x = a + b\sqrt{p}$ が $f(x) = 0$ の解であれば、

$$f(a - b\sqrt{p}) = 0$$

も成り立つ。

2. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ が

$$f(a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q}) = 0$$

を満たす、すなわち $x = a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q}$ が $f(x) = 0$ の解であれば、

$$f(a + \theta b\sqrt{p} + \phi c\sqrt{q}) = 0 \quad (\theta = \pm 1, \phi = \pm 1)$$

も成り立つ。

証明

1.

$f(a+b\sqrt{p})=0$ ならば (38) の A, B が いずれも 0 となる ($\sqrt{p}\notin\mathbb{Q}$) ので、よって補題 9 の 1. より $f(a-b\sqrt{p})=A-B\sqrt{p}=0$ となる。

2.

$f(a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q})=0$ ならば、補題 7 より (40) の A, B, C, D がいずれも 0 となるので、よって補題 9 の 2. より

$$f(a+\theta b\sqrt{p}+\phi c\sqrt{q})=A+\theta B\sqrt{p}+\phi C\sqrt{q}+\theta\phi D\sqrt{pq}=0$$

となる。∎

この補題 10 より、$f(a+b\sqrt{p})=0$ で $b\neq 0$ ならば、$f(x)$ は少なくとも 2 次式の因数

$$(x-a-b\sqrt{p})(x-a+b\sqrt{p})$$

を持つことがわかる。

同様に、$f(a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q})=0$ で $b\neq 0, c\neq 0$ ならば、$f(x)$ は少なくとも 4 次式の因数

$$\prod_{\theta=\pm 1,\phi=\pm 1}(x-a-\theta b\sqrt{p}-\phi c\sqrt{q})$$

を持つことがわかる。そしてこれは、(34) で $b\neq 0, c\neq 0$ ならば、$x=a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}$ は有理数係数の 3 次方程式の解にはなりえないことも意味する (最低でも 4 次の方程式でなければならない)。

本節の議論と同様にして、2 重根号が解消できない形の

$$x=\sqrt{a+\sqrt{b}}\quad (a,b\in\mathbb{Q},\ \sqrt{a^2-b}\notin\mathbb{Q})$$

も、3 次方程式の解にはなり得ず、4 次以上の方程式の解にしかならないことがわかる。

つまり、3 次方程式の解である

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}$$

として、$s+t\sqrt{p}+u\sqrt{q}$ $(s,t,u\in\mathbb{Q},\ t\neq 0,\ q\neq 0)$ のような形は想定しなくてよいことになる。

また、5 節では、(1) の形の 2 重根号を、

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}=\alpha+\beta\sqrt{c},\ \ \sqrt[3]{\gamma}(\alpha+\beta\sqrt{c})\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q})$$

の形に表すことを考えたが、以下も容易に示すことができる。

補題 11. (34) のとき、$a,b,c\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{c}\notin\mathbb{Q}$ である a,b,c に対して、(1) の 2 重根号は、

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}} = \alpha+\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q} \tag{42}$$

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}} = \sqrt[3]{\delta}(\alpha+\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q}) \tag{43}$$

のいずれかの形に表すことはできない。ただし、$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$ で、$\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\delta\neq 0$ とする。

証明

(43) が成り立つ場合は、a/δ, b/δ を a, b と考えれば (42) の形になるので、もし (42) の形が不可能であれば (43) も不可能となる。よって (42) の不可能性のみを示せばよい。

もし (42) が成り立つとすると、補題 8 により

$$\begin{aligned}&a+b\sqrt{c}=(\alpha+\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q})^3=A+B\sqrt{p}+C\sqrt{q}+D\sqrt{pq}\\&(A,B,C,D\in\mathbb{Q})\end{aligned} \tag{44}$$

と書ける。実際これを展開して、A,B,C,D を求めてみると、

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q})^3\\&= \alpha^3+3\alpha^2(\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q})+3\alpha(\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q})^2+(\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q})^3\\&= \alpha^3+3\alpha^2(\beta\sqrt{p}+\gamma\sqrt{q})+3\alpha(\beta^2p+2\beta\gamma\sqrt{pq}+\gamma^2q)\\&\quad+(\beta^3p\sqrt{p}+3\beta^2p\gamma\sqrt{q}+3\beta\sqrt{p}\,\gamma^2q+\gamma^3q\sqrt{q})\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}&A=\alpha(\alpha^2+3\beta^2p+3\gamma^2q),\quad B=\beta(3\alpha^2+\beta^2p+3\gamma^2q),\\&C=\gamma(3\alpha^2+3\beta^2p+\gamma^2q),\quad D=6\alpha\beta\gamma\end{aligned} \tag{45}$$

となる。ここで、$p>0, q>0, \beta\neq 0, \gamma\neq 0$ なので、少なくとも (45) の B, C は 0 になることはなく、よって (44) の右辺の $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ は消えることはないが、補題 6 よりその両方が同時に $\sqrt{c}$ の有理数倍になることはできない。よって、(42) の形は起こり得ない。 ∎

6.3 1 次因数を持つかどうかの判別

最後に、$f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$ $(a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0)$ が有理数の範囲で 1 次因数を持つかどうかの判別について説明する。

有理数の範囲で 1 次因数を持てば、補題 5 によりそれは整数の範囲でも 1 次因数を持つことになる。その因数を $bx+c$ とすると、

$$f(x)=(bx+c)g(x) \quad (g(x)\in\mathbb{Z}[x],\ b\in\mathbb{N},\ c\in\mathbb{Z})$$

となるから、その最高次の係数と最低次の係数を比較すれば、b は a_n の約数、c の絶対値は a_0 の約数であることがわかる。よって、その組み合わせは $|a_n|$ の約数の個数 N と、$|a_0|$ の約数の個数 M の 2 倍 ($\pm$ の符号の分) だけあり、すなわち $2NM$ 通りになる。それらが実際に因数であるかは、因数定理により $x=-c/b$ を $f(x)$ に代入して 0 になるかを確認すればよいので、それで確実に 1 次因数の存在が判別できることになる。

3 次式の場合には、それが有理数の範囲で因数分解できれば、必ず有理数係数の 1 次因数があることになるので、3 次式が有理数の範囲で因数分解できるかどうかは有限回の手続きで容易に確認できることになる。

7 最後に

本稿では、(1) の形の 3 乗根と平方根による 2 重根号を外す方法を紹介した。こういった話は代数分野では良く知られたことかもしれないが、私は代数の専門家ではなく、あまり見たことがなかったので、少しは楽しく計算できた。ただし本稿の内容は、専門家から見ればだいぶ中途半端なもの、不十分なものであろう。

なお、6 節の補題の証明は、一応高校の知識で読めるようにと意識し、代数の専門用語はなるべく使わないようにした。しかし、これも代数方面ではごく基本的なものばかりで、もっとすっきりまとめることもできるだろうし、より的確に深められる話だろうと思う。

特に、6.3 節は、高校生も高次式の因数分解では当たり前に使っていることだと思うが、うちの学生は意外に知らかったりもしたので、蛇足かとは思ったが一応上げておいた。より深い話については、代数方程式論について詳しい代数の本を当たってもらいたい。易しく、そして高度な内容につながる本として、例えば [3] を上げておく。

参考文献

[1] Wikipedia、「三次方程式」https://ja.wikipedia.org/wiki/**三次方程式**

[2] 守屋美賀雄、「代数学」(下)、朝倉書店 (1950)

[3] 志賀浩二、「方程式」(数学が育っていく物語 第 5 週)、岩波書店 (1994)