2009 年 02 月 02 日

ラプラシアンの極座標表示の計算について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

偏微分に関する合成関数の微分法の典型的な応用問題の一つに

> ラプラス微分作用素
>
> $$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
>
> を極座標 (r, ϕ, θ) で表現せよ

というものがある。これは、それなりに計算が大変なのであるが、少し簡単な計算法に気がついたので本稿ではそれを紹介する。ただし、それは特に新しい方法というわけでもなく、実質的には例えば [1] 6.1–6.3 節に書かれている内容を極座標に特化して書いているだけにすぎないが、初等的な解析の本でそれほど広く紹介されてもいないようなので、ここにまとめておく。

2 通常の計算方法

まずこの節では、通常の偏微分の合成関数の微分による計算方法を紹介する。

2.1 方針

3 次元の極座標は、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (r\cos\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\theta) \\ &\quad \left(r = |\boldsymbol{r}| \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

のように r, ϕ, θ で表現する方法である。地球表面の座標で言えば、ϕ は経度、θ は緯度に対応する (例えば [1] 6.3 節参照。ただし本稿は、この本の $\pi/2-\theta$ を θ としている)。

この (x,y,z) と (r,ϕ,θ) の関係を変数変換と考え、(x,y,z) の関数 f を

$$f(x,y,z)=f(r\cos\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, r\sin\theta)=g(r,\phi,\theta)$$

によって (r,ϕ,θ) の関数 g と見たときに、「$\triangle f$ を g の微分で表現するとどうなるか」というのが元の問題である。

この場合、(x,y,z) が (r,ϕ,θ) の式で表されているので、x,y,z を r,ϕ,θ で微分するのはやさしいが、その逆は難しい。よって、この問題は通常以下のような方針によって求められる。

1. 極座標の微分 g_r, g_ϕ, g_θ を 合成関数の微分を用いて f_x, f_y, f_z で表す (2.2 節)。
2. そこから逆に f_x, f_y, f_z を g_r, g_ϕ, g_θ で表す (2.3 節)。
3. それを用いて $\triangle f$ を g の微分で表現する (2.4, 2.5 節)。

2.2 合成関数の微分法

3 変数関数の合成関数の微分は次のようになる。

命題 1

(u,v,w) の 3 変数関数 $F(u,v,w)$ に $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$ を代入して得られる (x,y,z) の 3 変数関数

$$h=h(x,y,z)=F(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$$

を x, y, z で偏微分すると、それぞれ以下のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},\\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

この命題 1 を用いると、$x = r\cos\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = f_x\cos\phi\cos\theta+f_y\sin\phi\cos\theta+f_z\sin\theta, && (2)\\ \frac{\partial g}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \phi} = f_x(-r\sin\phi\cos\theta)+f_y r\cos\phi\cos\theta, && (3)\\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}\\ &= f_x(-r\cos\phi\sin\theta)+f_y(-r\sin\phi\sin\theta)+f_z r\cos\theta && (4)\end{aligned}$$

が得られる。

2.3 極座標の微分での表現

次は (2), (3), (4) を f_x, f_y, f_z の連立方程式とみて解くことで、f_x, f_y, f_z を極座標の微分 g_r, g_ϕ, g_θ で表現する。

まず、(3) より

$$-f_x\sin\phi+f_y\cos\phi = g_\phi\frac{1}{r\cos\theta} \tag{5}$$

(4) より

$$-f_x\cos\phi\sin\theta-f_y\sin\phi\sin\theta+f_z\cos\theta = g_\theta\frac{1}{r} \tag{6}$$

となるので、$\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$ を用いれば $(2)\times\cos\theta-(6)\times\sin\theta$ により、

$$f_x\cos\phi+f_y\sin\phi = g_r\cos\theta-g_\theta\frac{\sin\theta}{r} \tag{7}$$

となる。よって、(7)$\times\cos\phi-$(5)$\times\sin\phi$ により

$$f_x = g_r\cos\phi\cos\theta - g_\phi\frac{\sin\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\cos\phi\sin\theta}{r} \tag{8}$$

と f_x が得られ、(7)$\times\sin\phi+$(5)$\times\cos\phi$ により

$$f_y = g_r\sin\phi\cos\theta + g_\phi\frac{\cos\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\sin\phi\sin\theta}{r} \tag{9}$$

と f_y が得られる。f_z は、(2)$\times\sin\theta+$ (6)$\times\cos\theta$ により

$$f_z = g_r\sin\theta + g_\theta\frac{\cos\theta}{r} \tag{10}$$

となる。これで f の微分が g の微分で表されたことになる。

2.4 2 階微分の計算

次はラプラシアン

$$\triangle f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

の計算のために、(8), (9), (10) を繰り返し用いることで 2 階微分を計算する。

例えば f_{xx} は、f_x を r,ϕ,θ の関数と見たものを $\hat{f}_x$ と書けば、(8) より

$$(f_x)_x = (\hat{f}_x)_r\cos\phi\cos\theta - (\hat{f}_x)_\phi\frac{\sin\phi}{r\cos\theta} - (\hat{f}_x)_\theta\frac{\cos\phi\sin\theta}{r}$$

と書けることになるが、$\hat{f}_x$ 自体が (8) の右辺そのものなので、

$$\begin{aligned}(f_x)_x \;\; = \;\; & \left(g_r\cos\phi\cos\theta - g_\phi\frac{\sin\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\cos\phi\sin\theta}{r}\right)_r\cos\phi\cos\theta \\ & -\left(g_r\cos\phi\cos\theta - g_\phi\frac{\sin\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\cos\phi\sin\theta}{r}\right)_\phi\frac{\sin\phi}{r\cos\theta}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(g_r \cos\phi\cos\theta - g_\phi \frac{\sin\phi}{r\cos\theta} - g_\theta \frac{\cos\phi\sin\theta}{r}\right)_\theta \frac{\cos\phi\sin\theta}{r} \\
= \;& g_{rr}\cos^2\phi\cos^2\theta - g_{\phi r}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} + g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2} - g_{\theta r}\frac{\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r} \\
& + g_\theta\frac{\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r^2} - g_{r\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} + g_r\frac{\sin^2\phi}{r} + g_{\phi\phi}\frac{\sin^2\phi}{r^2\cos^2\theta} \\
& + g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2\cos^2\theta} + g_{\theta\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} - g_\theta\frac{\sin^2\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} \\
& - g_{r\theta}\frac{\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r} + g_r\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{r} + g_{\phi\theta}\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} \\
& - g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta} + g_{\theta\theta}\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{r^2} + g_\theta\frac{\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

となり、これを整理して、

$$
\begin{aligned}
f_{xx} = \;& g_{rr}\cos^2\phi\cos^2\theta + g_{\phi\phi}\frac{\sin^2\phi}{r^2\cos^2\theta} + g_{\theta\theta}\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{r^2} \\
& -2g_{r\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} - 2g_{r\theta}\frac{\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r} + 2g_{\phi\theta}\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} \\
& + g_r\frac{\sin^2\phi + \cos^2\phi\sin^2\theta}{r} + 2g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2} \\
& + g_\theta\frac{2\cos^2\phi\cos^2\theta\sin\theta - \sin^2\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta}
\end{aligned} \tag{11}
$$

が得られる。

同様に (9) より、

$$
\begin{aligned}
(f_y)_y = \;& (\hat{f}_y)_r\sin\phi\cos\theta + (\hat{f}_y)_\phi\frac{\cos\phi}{r\cos\theta} - (\hat{f}_y)_\theta\frac{\sin\phi\sin\theta}{r} \\
= \;& \left(g_r\sin\phi\cos\theta + g_\phi\frac{\cos\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\sin\phi\sin\theta}{r}\right)_r \sin\phi\cos\theta \\
& + \left(g_r\sin\phi\cos\theta + g_\phi\frac{\cos\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\sin\phi\sin\theta}{r}\right)_\phi \frac{\cos\phi}{r\cos\theta} \\
& - \left(g_r\sin\phi\cos\theta + g_\phi\frac{\cos\phi}{r\cos\theta} - g_\theta\frac{\sin\phi\sin\theta}{r}\right)_\theta \frac{\sin\phi\sin\theta}{r} \\
= \;& g_{rr}\sin^2\phi\cos^2\theta + g_{\phi r}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} - g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2} - g_{\theta r}\frac{\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r} \\
& + g_\theta\frac{\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r^2} + g_{r\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} + g_r\frac{\cos^2\phi}{r} + g_{\phi\phi}\frac{\cos^2\phi}{r^2\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-g_\phi \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2\cos^2\theta} - g_{\theta\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} - g_\theta\frac{\cos^2\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} \\
&-g_{r\theta}\frac{\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r} + g_r\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{r} - g_{\phi\theta}\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} \\
&+g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta} + g_{\theta\theta}\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{r^2} + g_\theta\frac{\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

となるので、これを整理して、

$$
\begin{aligned}
f_{yy} &= g_{rr}\sin^2\phi\cos^2\theta + g_{\phi\phi}\frac{\cos^2\phi}{r^2\cos^2\theta} + g_{\theta\theta}\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{r^2} \\
&\quad +2g_{r\phi}\frac{\cos\phi\sin\phi}{r} - 2g_{r\theta}\frac{\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r} - 2g_{\phi\theta}\frac{\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta} \\
&\quad +g_r\frac{\cos^2\phi+\sin^2\phi\sin^2\theta}{r} - 2g_\phi\frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2} \\
&\quad +g_\theta\frac{2\sin^2\phi\cos^2\theta\sin\theta - \cos^2\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となる。

そして最後に (10) より、

$$
\begin{aligned}
(f_z)_z &= (\hat{f}_z)_r\sin\theta + (\hat{f}_z)_\theta\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \left(g_r\sin\theta + g_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)_r\sin\theta + \left(g_r\sin\theta + g_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)_\theta\frac{\cos\theta}{r} \\
&= g_{rr}\sin^2\theta + g_{\theta r}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} - g_\theta\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2} + g_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} \\
&\quad +g_r\frac{\cos^2\theta}{r} + g_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} - g_\theta\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
f_{zz} = g_{rr}\sin^2\theta + g_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + 2g_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + g_r\frac{\cos^2\theta}{r} - 2g_\theta\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2} \tag{13}
$$

となる。

2.5 ラプラシアン

(11), (12), (13) の和が f のラプラシアン $\triangle f$ となるが、それぞれの式はだいぶ長いので、一気に全部加えてしまう代わりに g の各導関数の係数を順番に見ていくことにする。まず g_{rr} の係数は

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\phi\cos^2\theta+\sin^2\phi\cos^2\theta+\sin^2\theta=(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\cos^2\theta+\sin^2\theta\\
=&\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1,
\end{aligned}
$$

$g_{\phi\phi}$ の係数は

$$
\frac{\sin^2\phi}{r^2\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\phi}{r^2\cos^2\theta}=\frac{1}{r^2\cos^2\theta},
$$

$g_{\theta\theta}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}=\frac{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r^2}\\
=&\ \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r^2}=\frac{1}{r^2},
\end{aligned}
$$

$g_{r\phi}$ の係数は

$$
-\frac{2\cos\phi\sin\phi}{r}+\frac{2\cos\phi\sin\phi}{r}=0,
$$

$g_{r\theta}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r}-\frac{2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}{r}+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\\
=&\ \frac{-2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\cos\theta\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}{r}=\frac{-2\cos\theta\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}{r}\\
=&\ 0,
\end{aligned}
$$

$g_{\phi\theta}$ の係数は

$$
\frac{2\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta}-\frac{2\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta}=0,
$$

g_r の係数は

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2\phi+\cos^2\phi\sin^2\theta}{r}+\frac{\cos^2\phi+\sin^2\phi\sin^2\theta}{r}+\frac{\cos^2\theta}{r}\\
=&\frac{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)(1+\sin^2\theta)+\cos^2\theta}{r}=\frac{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r}=\frac{2}{r},
\end{aligned}$$

g_ϕ の係数は

$$\frac{2\cos\phi\sin\phi}{r^2}-\frac{2\cos\phi\sin\phi}{r^2}=0,$$

g_θ の係数は

$$\begin{aligned}
&\frac{2\cos^2\phi\cos^2\theta\sin\theta-\sin^2\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta}+\frac{2\sin^2\phi\cos^2\theta\sin\theta-\cos^2\phi\sin\theta}{r^2\cos\theta}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\\
=&\frac{2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\cos^2\theta\sin\theta-(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\sin\theta}{r^2\cos\theta}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\\
=&\frac{2\cos^2\theta\sin\theta-\sin\theta-2\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{r^2\cos\theta}
\end{aligned}$$

となる。

よってこれらを総合すれば、結局

$$\triangle f=g_{rr}+g_{\phi\phi}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}+g_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}+g_r\frac{2}{r}-g_\theta\frac{\sin\theta}{r^2\cos\theta} \tag{14}$$

となる。これが、ラプラシアンの極座標での表現式である。

見てわかる通りかなり大変な計算であるが、実際にはその途中の式 (11), (12), (13) に比べて結果の式 (14) はかなりシンプルな式になる。以前から、何らかの方法でこの計算を楽にできないかと思っていたが、これとは別の計算を行っていたときにある方法に気がついた。

それを $\triangle f$ の計算に応用した例を次の 3 節に示す。

3 ベクトル解析などを用いる方法

この節では、2 節の計算をもう少し楽にする、見通しをよくするような、ベクトル解析などを用いる方法について紹介する。

3.1 微分演算子ナブラ

ベクトル解析では、ラプラス演算子は形式的な微分演算子である ∇ (ナブラ)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

を用いて、

$$\triangle = \nabla \bullet \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

のように書かれる。ここで、$\bullet$ はベクトルの内積を表すこととする。もちろん、これらは本来、

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad \triangle f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f$$

のように、右側に関数がついて初めて意味をなす記号である。詳しくはベクトル解析の教科書 (例えば [1]) を参照のこと。

3.2 極座標に付随する基本ベクトル

次に、極座標 (1) に対するひとつの命題を示す。ここで、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は、(x, y, z) のベクトル関数ともみれるし、(1) による (r, ϕ, θ) のベクトル関数とも見れるが、それらを同じ $\boldsymbol{r}$ で書くこととする。また、行列演算においては $\boldsymbol{r}$, ∇ はいずれも行ベクトルと考え、また行ベクトル $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルにしたもの、すなわち $\boldsymbol{b}$ の転置 ${}^T\boldsymbol{b}$ を、大文字を使って $\boldsymbol{B}$ のように書くことにする。

命題 2

1. $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_\phi$, $\boldsymbol{r}_\theta$ のスカラー倍である以下の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{r\cos\theta}\boldsymbol{r}_\phi, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}_\theta$$

は、互いに垂直な単位ベクトルである (極座標に付随する基本ベクトル)。

2. 3×3 行列

$$A = [\boldsymbol{E}_1\ \boldsymbol{E}_2\ \boldsymbol{E}_3]$$

は直交行列、すなわち以下が成り立つ。

$$A^{-1} = {}^{T}A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

証明

2. は 1. から一般的に言える性質 (詳しくは線形代数の教科書、例えば [2] 参照) なので、1. のみを言えばよい。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{r}\boldsymbol{r} = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta) \tag{15}$$

であるから、これを ϕ で微分すれば

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{r}_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0)$$

となるので、よって

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{r\cos\theta}\boldsymbol{r}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \tag{16}$$

となる。また、(15) を θ で微分すれば

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}_\theta = (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\theta) \tag{17}$$

となるので、内積、長さを計算すれば容易に

$$\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \bullet \boldsymbol{e}_3 = 0, \quad |\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$$

が得られる。■

3.3 極座標の微分とベクトルによる表現

今、

$$\nabla_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \nabla_{(r,\phi,\theta)} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

と書くことにすると、命題 1 により、g_r, g_ϕ, g_θ はベクトル、および行列の積を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \boldsymbol{r}_r = \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \frac{\boldsymbol{r}}{r} \\
&= \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \boldsymbol{e}_1 = \nabla_{(x,y,z)} f \ \boldsymbol{E}_1, \\
\frac{\partial g}{\partial \phi} &= \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \boldsymbol{r}_\phi = \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \boldsymbol{e}_2 r\cos\theta = \nabla_{(x,y,z)} f \ \boldsymbol{E}_2 r\cos\theta, \\
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \boldsymbol{r}_\theta = \nabla_{(x,y,z)} f \bullet \boldsymbol{e}_3 r = \nabla_{(x,y,z)} f \ \boldsymbol{E}_3 r
\end{aligned}$$

よって、

$$\nabla_{(r,\phi,\theta)} g = \nabla_{(x,y,z)} f \,[\boldsymbol{E}_1 \ \boldsymbol{E}_2 r\cos\theta \ \boldsymbol{E}_3 r] \tag{18}$$

となるが、この最後の行列は、

$$[\boldsymbol{E}_1 \ \boldsymbol{E}_2 r\cos\theta \ \boldsymbol{E}_3 r] = [\boldsymbol{E}_1 \ \boldsymbol{E}_2 \ \boldsymbol{E}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

と変形でき、命題 2 より、

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{E}_1 \ \boldsymbol{E}_2 r\cos\theta \ \boldsymbol{E}_3 r]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}^{-1} A^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(r\cos\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2/(r\cos\theta) \\ \boldsymbol{e}_3/r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。よって、(18) より、

$$
\begin{aligned}
\nabla_{(x,y,z)} f &= \nabla_{(r,\phi,\theta)} g \left[\boldsymbol{E}_1\ \boldsymbol{E}_2 r\cos\theta\ \boldsymbol{E}_3 r\right]^{-1} = \nabla_{(r,\phi,\theta)} g \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2/(r\cos\theta) \\ \boldsymbol{e}_3/r \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

となる。なおこれは、f, g を略して書けば、

$$
\nabla_{(x,y,z)} = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{r}_\phi}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\boldsymbol{r}_\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{19}
$$

となる。今後 f と g を区別せず、この式 (19) のようにこれらを省略した形、すなわち微分作用素の形で計算を進めることにする。

3.4 ラプラシアンの計算

(19) により、

$$
\begin{aligned}
\triangle &= \nabla_{(x,y,z)} \bullet \nabla_{(x,y,z)} \\
&= \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \bullet \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)
\end{aligned} \tag{20}
$$

となるが、これを次の命題、および (15), (16), (17) を用いて展開する。

命題 3

任意のベクトル値関数 $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{B}(x_1, x_2, x_3)$、および任意の i, j に対して次が成り立つ。

$$
\left(\boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \bullet \left(\boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \boldsymbol{A} \bullet \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\} = \boldsymbol{A} \bullet \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \boldsymbol{B}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)
$$

なお、2 番目の式の右側のベクトルは、$h = h(x_1, x_2, x_3)$ に対して

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) h = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{B}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)
$$

を意味することとする。

証明

左辺に h をつけると

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\bullet\left(\boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)h=\left(A_x\frac{\partial}{\partial x_i},A_y\frac{\partial}{\partial x_i},A_z\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\bullet\left(B_x\frac{\partial}{\partial x_j},B_y\frac{\partial}{\partial x_j},B_z\frac{\partial}{\partial x_j}\right)h\\
&= A_x\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_x\frac{\partial}{\partial x_j}h\right)+A_y\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_y\frac{\partial}{\partial x_j}h\right)+A_z\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_z\frac{\partial}{\partial x_j}h\right)\\
&= \boldsymbol{A}\bullet\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{B}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となる。■

この命題 3 は、$\partial/\partial x_i$ が形式的にスカラーであるとみて、内積の左側のベクトルから右側のベクトルに移動できることを意味しているので、それなりに自然なものに見える (もちろん前後の入れ換えは不可)。

さて、まずは (20) の、左のベクトルの r での微分の項を考えると、$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の成分には r は含まれないので、命題 3 より

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}\bullet\nabla_{(x,y,z)}=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}\bullet\left(\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \boldsymbol{e}_1\bullet\frac{\partial}{\partial r}\left(\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \boldsymbol{e}_1\bullet\left\{\boldsymbol{e}_1\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

と変形され、よって命題 2 により後ろの 2 つの項は内積により消えて、

$$
\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}\bullet\nabla_{(x,y,z)}=\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tag{21}
$$

となる。

次に、ϕ での微分の項を考えるとこれは

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\bullet\nabla_{(x,y,z)} &= \frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\bullet\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\bullet\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_1\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r}+\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\phi}\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_2\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\boldsymbol{e}_3}{\partial\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}\right)
\end{aligned}
$$

となるが、(15), (16), (17) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\phi} &= (-\sin\phi\cos\theta,\cos\phi\cos\theta,0)=\boldsymbol{e}_2\cos\theta,\\
\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\phi} &= (-\cos\phi,-\sin\phi,0)\quad\perp\boldsymbol{e}_2,\\
\frac{\partial\boldsymbol{e}_3}{\partial\phi} &= (\sin\phi\sin\theta,-\cos\phi\sin\theta,0)=-\boldsymbol{e}_2\sin\theta
\end{aligned}
$$

となるので、よって、

$$
\frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\bullet\nabla_{(x,y,z)}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-\frac{\sin\theta}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{22}
$$

となることがわかる。

最後に θ での微分の項であるが、

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\bullet\nabla_{(x,y,z)} &= \frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\bullet\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\
&= \frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\bullet\left\{\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_1\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\theta}\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\boldsymbol{e}_3}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}
\end{aligned}
$$

となり、(15), (16), (17) より、

$$
\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\theta}=\boldsymbol{e}_3,\quad\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\theta}=0,\quad\frac{\partial\boldsymbol{e}_3}{\partial\theta}=-\boldsymbol{e}_1
$$

なので、

$$\frac{\boldsymbol{e}_3}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\bullet\nabla_{(x,y,z)}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{23}$$

となる。

結局、(21), (22), (23) より、

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\sin\theta}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{24}$$

が得られる。これが 2 節の (14) である。

こちらの方もそれなりに手間はかかるのであるが、2 節のやみくもな計算に比べると内積で多くの項を消せる分楽であり、見通しも立てやすいだろうと思う。

4 最後に

2 節の方法は、何回計算してもうんざりするくらい単調で長く、実際本稿を書くにあたっても数カ所計算間違いをしたほどであり、2.5 節の最後に書いたように昔からもっと楽な方法はないものかと思っていたが、これまで特にそれをかえりみることはなかった。

それが、先日 3 次元のある微分方程式の極座標変換の計算をしているときに、たまたま 3 節の方法を思いつき、そして本稿をまとめるにあたってベクトル解析の講義で使用している教科書 [1] をよく見たら、より一般性のある証明がちゃんと書いてあった、というのが実情である。

そのベクトル解析の講義では例年そこまでは進まないので、教科書のその辺りはちゃんと読んでいなかったが、ベクトル解析はありがたいものだという認識を新たにした次第である。是非 [1] のより一般的な命題とその証明 (6.1–6.3 節) も参照していただきたい。

参考文献

[1] 石原繁「ベクトル解析」裳華房 (1985)

[2] 石原繁、浅野重初「理工系の基礎 線形代数」裳華房 (1995)