平成 15 年 7 月 22 日

ある定積分について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

広義積分

$$Z(t)=2\pi\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{(\omega^2+\gamma^2)\omega^2+\gamma^4}d\omega \tag{1}$$

について考えてみます。分母は ω の 4 次式で因数分解して考えると公式 (cf.[1])

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|} \tag{2}$$

が使えるのではないかと予想されるのですが、以下に述べるやや微妙な事情があり注意が必要です。

- 広義積分は発散して無限大になることもあるので、簡単に和や差を行うことができず、常に個々の積分が有限であるかどうかを確認し、例えば $\infty-\infty=3$ のような式にならないように注意する必要がある
- 公式 (2) は数学辞典 [1] に載っているし、

  $$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|} \tag{3}$$

  という公式は載っているものの

  $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+1}dx \tag{4}$$

  に関する公式は載っていない

公式 (2),(3) はいずれも複素関数の留数計算などから導かれるのですが、(4) はそれにはうまく載らない形で、きれいな式で表すことはできない (あるいは知られていない) のではないかと思われます。よってこの式が出てきたら、少なくとも私の手元の数学辞典 [1] よりもう少し詳しい公式集が必要かもしれませんし、もしかしたら簡単な式で表すのは無理なのかも知れません。

2 置換積分と部分分数分解

まず、置換積分と部分分数分解を行います。なお、元の式 (1) は分母が 4 次式、分子は有限な関数なので、ちゃんと積分は有限な値に収束します。

$\omega=\gamma y$ とすると、

$$\begin{aligned}Z(t)&=2\pi\int_0^\infty \frac{\cos\gamma yt}{\gamma^4(y^4+y^2+1)}\gamma dy=\pi\gamma^{-3}W(\gamma t),\\ W(x)&=\int_0^\infty \frac{2\cos xy}{y^4+y^2+1}dy\end{aligned}$$

とすることができます。以後この $W(x)$ を考えます。

分母 y^4+y^2+1 は

$$y^4+y^2+1=(y^2+1)^2-y^2=(y^2+y+1)(y^2-y+1)$$

と因数分解され、よって $2/(y^4+y^2+1)$ を部分分数分解すると

$$\frac{2}{y^4+y^2+1}=\frac{1-y}{y^2+y+1}+\frac{1+y}{y^2-y+1}$$

となります (計算は略)。ということで

$$W(x)=\int_0^\infty\left\{\frac{(1-y)\cos xy}{y^2+y+1}+\frac{(1+y)\cos xy}{y^2-y+1}\right\}dy$$

となるのですが、この和をそれぞれの積分に分けることが可能かどうかは実は微妙です。それは $\cos xy$ を除くといずれも (1 次式)/(2 次式) で、その広義積分は一般には発散してしまうからで、しかし三角関数がつくと収束する場合もあり (例えば (3) のように) かなり微妙です。よって、有限な値をそっと引いて行くことにします。

3 有限部分の引き算

$W(x)$ の式のうち、

$$\int_0^\infty\frac{\cos xy}{y^2+y+1}dy,\quad\int_0^\infty\frac{\cos xy}{y^2-y+1}dy$$

などは (0 次式)/(2 次式) なのでちゃんと収束しますので、これをまず分けます。

$$\begin{aligned}W(x)&=I(x)+J(x),\\ I(x)&=\int_0^\infty\frac{\cos xy}{y^2+y+1}dy+\int_0^\infty\frac{\cos xy}{y^2-y+1}dy,\\ J(x)&=\int_0^\infty\left(-\frac{y\cos xy}{y^2+y+1}+\frac{y\cos xy}{y^2-y+1}\right)dy\end{aligned}$$

$W(x)$, $I(x)$ は有限なので、$J(x)$ も一応有限ですが、これは 2 つに分けるのは危険です。

$I(x)$ は、

$$I(x)=\int_0^\infty\left(\frac{\cos xy}{y^2+y+1}+\frac{\cos xy}{y^2-y+1}\right)dy$$

と一つにしてみると分かりますが、被積分関数は偶関数なので

$$I(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\cos xy}{y^2+y+1}+\frac{\cos xy}{y^2-y+1}\right)dy$$

とでき、よって

$$I(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos xy}{y^2+y+1}dy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos xy}{y^2-y+1}dy$$

となります (この計算はすべて有限の範囲なので問題はありません)。

分母をそれぞれ $y^2+y+1=(y+1/2)^2+3/4$, $y^2-y+1=(y-1/2)^2+3/4$ と標準変形し、$y+1/2$, $y-1/2$ を u と置換積分すると (このために $-\infty$ から ∞ の積分に変えてあります)

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x(u-1/2)}{u^2+3/4}du+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x(u+1/2)}{u^2+3/4}du \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x(u-1/2)+\cos x(u+1/2)}{u^2+3/4}du=\cos\frac{x}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xu}{u^2+3/4}du \\
&= \cos\frac{x}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(xv\sqrt{3}/2)}{v^2+1}\frac{2}{\sqrt{3}}dv \quad (u=\frac{\sqrt{3}}{2}v) \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\cos\frac{x}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(xv\sqrt{3}/2)}{v^2+1}dv=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-|x|\sqrt{3}/2}\cos\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

となります。最後の式には公式 (2) を使いました。

後は残りの $J(x)$ の計算です。

4 $J(x)$ の計算

$J(x)$ 自体は前に述べたようにかなり微妙なので、広義積分の極限を取る前の式で考えてみることにします。

$$\begin{aligned}
J(x) &= \lim_{N\to\infty}J_N(x), \\
J_N(x) &= \int_0^N\left(-\frac{y\cos xy}{y^2+y+1}+\frac{y\cos xy}{y^2-y+1}\right)dy
\end{aligned}$$

とします。この $J_N(x)$ を 2 つに分けて I のようにそれぞれの分母を標準変形して置換積分してみます。まず、$J_N(x)$ の被積分関数が偶関数であることに注意して $-N$ から N までの積分に直してからそれを行います。

$$\begin{aligned}
J_N(x) &= \frac{1}{2}\int_{-N}^{N}\left(-\frac{y\cos xy}{y^2+y+1}+\frac{y\cos xy}{y^2-y+1}\right)dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-N}^{N}\frac{y\cos xy}{(y+1/2)^2+3/4}dy+\frac{1}{2}\int_{-N}^{N}\frac{y\cos xy}{(y-1/2)^2+3/4}dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-N+1/2}^{N+1/2}\frac{(u-1/2)\cos x(u-1/2)}{u^2+3/4}du+\frac{1}{2}\int_{-N-1/2}^{N-1/2}\frac{(u+1/2)\cos x(u+1/2)}{u^2+3/4}du \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{-N+1/2}^{N-1/2}+\int_{N-1/2}^{N+1/2}\right)du+\frac{1}{2}\left(\int_{-N-1/2}^{-N+1/2}+\int_{-N+1/2}^{N-1/2}\right)du \\
&= P_N(x)+Q_N(x), \\
P_N(x) &= \frac{1}{2}\int_{-N+1/2}^{N-1/2}\frac{-(u-1/2)\cos x(u-1/2)+(u+1/2)\cos x(u+1/2)}{u^2+3/4}du, \\
Q_N(x) &= -\frac{1}{2}\int_{N-1/2}^{N+1/2}\frac{(u-1/2)\cos x(u-1/2)}{u^2+3/4}du+\frac{1}{2}\int_{-N-1/2}^{-N+1/2}\frac{(u+1/2)\cos x(u+1/2)}{u^2+3/4}du
\end{aligned}$$

さてこの P_N ですが、加法定理により

$$-(u-1/2)\cos x(u-1/2)+(u+1/2)\cos x(u+1/2)=-2u\sin xu\sin\frac{x}{2}+\cos xu\cos\frac{x}{2}$$

となり、偶関数なので 0 から $N-1/2$ の積分に直すと $N\to\infty$ に対し

$$
\begin{aligned}
P_N(x) &= -2\sin\frac{x}{2}\int_0^{N-1/2}\frac{u\sin xu}{u^2+3/4}du+\cos\frac{x}{2}\int_0^{N-1/2}\frac{\cos xu}{u^2+3/4}du \\
&\to -2\sin\frac{x}{2}\int_0^{\infty}\frac{u\sin xu}{u^2+3/4}du+\cos\frac{x}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos xu}{u^2+3/4}du \\
&= -2\sin\frac{x}{2}\int_0^{\infty}\frac{v\sin(xv\sqrt{3}/2)}{v^2+1}dv+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{x}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos(xv\sqrt{3}/2)}{v^2+1}dv \\
&= -\pi e^{-|x|\sqrt{3}/2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-|x|\sqrt{3}/2}\cos\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

となります。後の残りの $Q_N(x)$ ですが、実はこれは 0 に収束します。それは、

$$
\int_{N-1/2}^{N+1/2}\frac{1}{u}du=\log\frac{N+1/2}{N-1/2}\to\log 1=0
$$

とほぼ同様に示すことができます。

よって、結局

$$
J(x)=\lim_{N\to\infty}\{P_N(x)+Q_N(x)\}=\pi e^{-|x|\sqrt{3}/2}\left(-\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{x}{2}\right)
$$

となります。故に

$$
\begin{aligned}
W(x) &= I(x)+J(x) \\
&= \pi e^{-|x|\sqrt{3}/2}\left(-\sin\frac{x}{2}+\frac{3}{\sqrt{3}}\cos\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\pi e^{-|x|\sqrt{3}/2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
Z(t)=2\pi^2\gamma^{-3}e^{-|\gamma t|\sqrt{3}/2}\sin\left(\frac{\gamma t}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)
$$

となるようです。γ も t も正ならば、絶対値はなくても結構です。

多分、元の式がきれいな形なのでそう面倒ではなくうまく求めることができました。

参考文献

[1] 「岩波数学辞典 第 3 版」公式 9 V (p1376-1377) 、日本数学会編集、岩波書店