2015 年 06 月 01 日

タンジェントのフーリエ級数について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日、ふとインターネット上で、「$\tan x$ はフーリエ級数に展開可能？」という質問を見つけた (`http://okwave.jp/qa/q1251359.html`、2005 年 3 月 5 日の書き込み)。以下に全文を引用する (数式は LaTeX 用に一部編集):

> L^2 に属する関数は L^2 ノルムの近似の意味でフーリエ級数展開ができるが、L^2 に属さない関数はフーリエ級数展開してはいけないということではないと思います。実際、クーロンポテンシャルの様に L^2 に属さない関数のフーリエ変換が必要になることはしばしばあります。区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ で形式的にフーリエ展開すると
>
> $$\tan x \sim 2(\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x - \sin 8x + \cdots) \tag{1}$$
>
> になると思います。右辺の関数のグラフを描いてみると振動が大きいが平均すれば $\tan x$ に近いようにも見えます。したがって $\tan x$ は L^2 の意味ではフーリエ展開できないが、振動を平均化する操作を行えばフーリエ展開可能とも考えられます。$\tan x$ は何らかの意味でフーリエ級数に展開可能と考えることはできるのでしょうか。

これに対して、「超関数 (distribution) の空間ならうまくいくのでは」という回答がついていた。

超関数 (distribution) の理論は、現在数学科で偏微分方程式を学ぶ大学院生はほぼ必須の学問なので、これに答えられる人は少なくないと思うが、実は最近ちゃんとした超関数の和書を手に入れにくく、例えば「超関数のフーリエ級数」といった話を調べることはあまり容易ではないように思う。

もちろん、洋書か、大学の数学科の図書室にはちゃんとした超関数の本があり、それで普通は足りているのであろうが、せっかくなので、少しこの問題を題材として、超関数のフーリエ級数の理論について紹介しておこうと思う。

なお、本稿では、超関数の基本 ($\mathscr{D}, \mathscr{S}, \mathscr{D}', \mathscr{S}'$ 等) やフーリエ級数の基本的な性質については既知のこととして話を進める。超関数については、例えば比較的新しい和書で

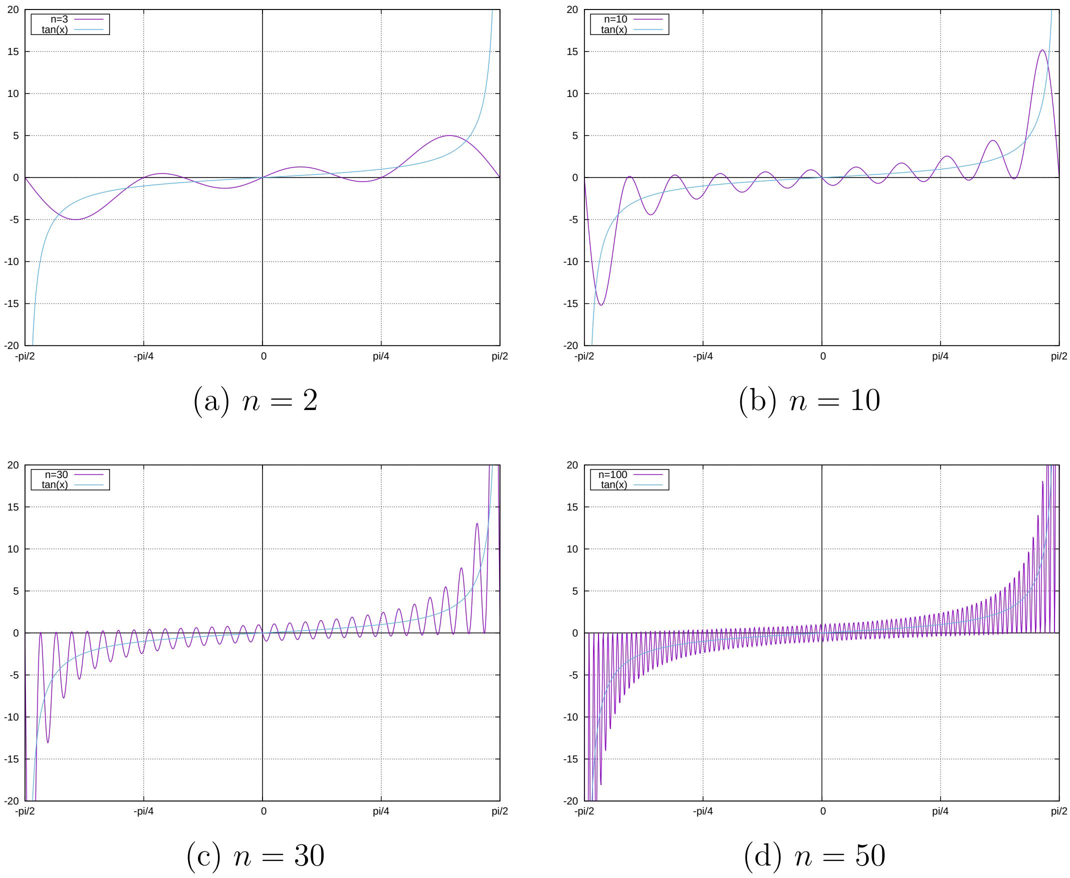
ある [1] や [2] 等を、フーリエ級数についてはたくさんあるフーリエ級数の入門書のいずれかを参照のこと。

2 グラフ

まず、質問者が述べている「グラフを描いてみると」の部分を確認する。$\tan x$ の形式的なフーリエ級数がどうなるかについては後で紹介するとして、(1) の右辺の部分和

$$f(x,n)=\sum_{k=1}^{n}2(-1)^{k-1}\sin 2kx \tag{2}$$

と $\tan x$ の $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ の範囲でのグラフを以下に示す。なお、これらのグラフ



(a) $n=2$ (b) $n=10$ (c) $n=30$ (d) $n=50$

図 1: $\tan x$ とフーリエ級数の n 項までの和のグラフ

は gnuplot で描いたものだが、最近の gnuplot は、このような和の関数を簡単に定義できる。gnuplot version 4.4 以前では、再帰関数として、

```
f(x, n) = (n>0) ? f(x, n-1) + 2*cos((n-1)*pi)*sin(2*n*x) : 0
```

のようにして定義でき、また gnuplot version 4.6 以降で導入された `sum` を使えばより自然に

```
f(x, n) = sum [i=1:n] 2*cos((i-1)*pi)*sin(2*i*x)
```

と定義できる。なお、上はいずれも $(-1)^{n-1}$ を $\cos(n-1)\pi$ で代用している。

y の最大値 (最小値) は、n を大きくするとそれに伴いかなり大きく (小さく) なっていくのであるが、縦軸の範囲を固定してその様子を示している。

グラフを見てわかる通り、形式的フーリエ級数の部分和は、n が増えると振動が激しくなるだけで振動の幅はあまり変わらず、$\tan x$ には普通の意味では近づいていかない。それは、$\tan x$ が、そのフーリエ級数が普通の意味で収束 (各点収束や L^2 収束) するための条件を満たさないからであるが、この様子は元の質問者が指摘している通りである。

また、これも質問者が指摘していることであるが、このような細かい振動の平均値のあたりに $\tan x$ のグラフがあるように見えるが、こういう振動は普通の意味では収束しなくても、弱収束の位相では収束する可能性があるので、回答者の述べている通り、確かに超関数の意味では収束しているかもしれない。

3 周期超関数

超関数のフーリエ級数を紹介するために、まず周期的超関数の空間 $\mathscr{D}'_T$ について説明する。なお、ここでは簡単のため 1 次元の超関数の話に限定するが、以降の話は容易に n 次元の話、すなわち n 変数の周期超関数に拡張することができる。

超関数 $f\in\mathscr{D}'(=\mathscr{D}'(\mathbf{R}))$ が**周期 T を持つ** $(T>0)$ とは、任意の x に対して $f(x+T)=f(x)$ となること、すなわち、任意の $\phi(x)\in\mathscr{D}$ に対して、

$$\langle\, f(x),\, \phi(x-T)\,\rangle = \langle\, f(x),\, \phi(x)\,\rangle \tag{3}$$

が成り立つこと、と定める。正の周期を持つ超関数を **周期超関数** と呼ぶ。

もちろん、普通の $f\in L^1_{loc}$ で周期 T を持つ関数は、超関数としても周期 T を持つ。

逆に、L^1_{loc} でない代表的な周期超関数としては、

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x+nT) \tag{4}$$

がある。$T(>0)$ を周期とする超関数全体を $\mathscr{D}'_T$ で表す。次の命題 1 は、$\mathscr{D}'_T$ として自然に予想される性質である。

命題 1 $\mathscr{D}'_T \subset \mathscr{S}'$

この定理の証明は少し細かいし、本稿ではそれほど使うわけでもないので、後で紹介する (9 節)。

4 周期超関数のフーリエ級数

この節では、周期超関数のフーリエ級数を紹介する。

普通の関数の場合、周期 T のフーリエ級数は、以下のようになる。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x\right) \tag{5}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx,\ \ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx \tag{6}$$

なお、複素形式のフーリエ級数にした方が式は易しくなるが、今回は目的が $\tan x$ なので、実形式で話を進める。

ここにあるように、フーリエ係数は周期区間 $(0,T)$ での積分であるが、一方超関数のテスト関数との内積も普通の関数の積分に対応しているので、$f \in \mathscr{D}'_T$ に対しても、

$$\frac{2}{T}\left\langle f(x),\,\cos\frac{2n\pi}{T}x\right\rangle \tag{7}$$

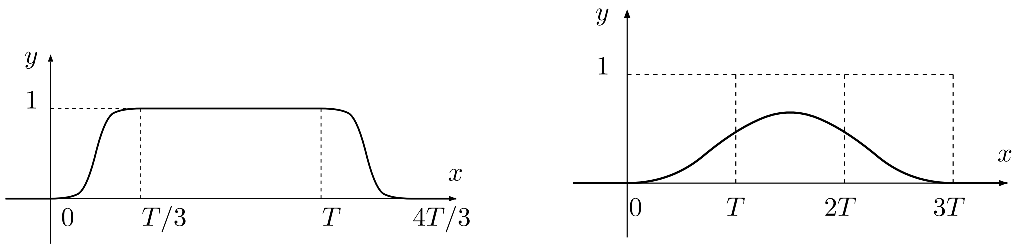
でフーリエ係数が定義できるように思うかもしれない。しかし、$f \in \mathscr{D}'$、あるいは $f \in \mathscr{S}'$ のテスト関数は $\mathscr{D}, \mathscr{S}$ の関数でなければいけないが、$\cos(2n\pi x/T)$ はもちろんそうではなく、そもそも (7) は $(0,T)$ の積分ではなく $\mathbf{R}$ 全体の積分に対応するので、いずれにしても (7) では (6) には合わない。

$\mathscr{D}$ や $\mathscr{S}$ をテスト関数 (内積の対象) とする $\mathscr{D}'_T$ の元に対して、$(0,T)$ での積分を行うために用いられるのが、f の周期性と「1 の分解」である。

ここでは、次のような性質を持つ関数 $e_T(x)\in\mathscr{D}$ を **1 の分解** と呼ぶ。

$$e_T(x)\geq 0\ (x\in\mathbf{R}),\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}e_T(x+nT)\equiv 1 \tag{8}$$

この 1 の分解は、一意に決まるわけではなく色々ある。図 2 (a) は、$(0,T/3)$ の範囲



(a) (b)

図 2: 1 の分解の例

で 0 から 1 に滑らかにつなぐ関数を使い、$(T,4T/3)$ の範囲では、それを 1 から引いたものを使えばよい。

また、図 2 (b) は、3 つ以上の e_T の値が重なって 1 となるようなものを示しているが、そのような e_T は、以下のようにして構成できる。まず $e_0(x)\in\mathscr{D}$ を、$e_0\geq 0$ で [T,2T] では $e_0(x)>0$ であるようなものと取る。そして、

$$e_1(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e_0(x+nT)$$

とすると、$e_0\in\mathscr{D}$ なのでこの和は各 x に対し有限和で、$e_1\in C^\infty$, $e_1>0$ で周期 T を持つ有界な関数であることがわかる。そこで、

$$e_T(x)=\frac{e_0(x)}{e_1(x)}$$

とすれば、$e_T(x)\in\mathscr{D}$, $e_T(x)\geq 0$ で、

$$\sum_n e_T(x+nT)=\sum_n\frac{e_0(x+nT)}{e_1(x+nT)}=\sum_n\frac{e_0(x+nT)}{e_1(x)}=\frac{e_1(x)}{e_1(x)}=1$$

となる。

1 の分解は、e_T を T の幅で切って積み上げると丁度 1 になる、という形になっている。これを利用すれば、周期 T の普通の関数 $g(x)$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} g(x)e_T(x)dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} g(x)e_T(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^T g(x)e_T(x+nT)dx \\
&= \int_0^T g(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_T(x+nT)dx = \int_0^T g(x)dx
\end{aligned}
$$

となり、$e_T(x)$ との積の実数全体での積分が $(0,T)$ での $g(x)$ の積分となる。なお、上の式の中で、和と積分の順序交換の部分は、$e_T(x+nT)$ が $(0,T)$ では 有限個の n を除いて 0 であるので実際は有限和であり、問題はない。

これと同様に $f \in \mathscr{D}'_T$ に対して、**周期積分** $\langle f, \phi\rangle_T$ を

$$
\langle f, \phi\rangle_T = \langle f, \phi e_T\rangle \tag{9}
$$

で定義する。ここで、ϕ は周期 T を持つ C^∞ の関数とする。なお、以後そのような ϕ の集合を C_T^∞ と書くことにする。

$\phi e_T \in \mathscr{D}$ なので、(9) の右辺の値は決まるが、この右辺の値が 1 の分解 e_T の選び方によらないことを示す必要がある。

今、e_T とは別の 1 の分解 $\hat{e}_T$ を取ると、$f \in \mathscr{D}'_T$, $\phi \in C_T^\infty$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\langle f, \phi\hat{e}_T\rangle &= \left\langle f(x), \phi(x)\hat{e}_T(x)\sum_n e_T(x+nT)\right\rangle \\
&= \left\langle f(x), \sum_n \phi(x)\hat{e}_T(x)e_T(x+nT)\right\rangle \\
&= \sum_n \langle f(x), \phi(x)\hat{e}_T(x)e_T(x+nT)\rangle \\
&= \sum_n \langle f(x), \phi(x-nT)\hat{e}_T(x-nT)e_T(x)\rangle \qquad ((3)\text{ より}) \\
&= \sum_n \langle f(x), \phi(x)\hat{e}_T(x-nT)e_T(x)\rangle \qquad (\phi \in C_T^\infty) \\
&= \left\langle f(x), \phi(x)e_T(x)\sum_n \hat{e}_T(x-nT)\right\rangle = \langle f(x), \phi(x)e_T(x)\rangle
\end{aligned}
$$

となり、これにより (9) が e_T の取り方によらない値となることがわかる。なお、$\sum_n \phi(x)\hat{e}_T(x)e_T(x+nT)$, および $\sum_n \phi(x)\hat{e}_T(x-nT)e_T(x)$ は、$\hat{e}_T \in \mathscr{D}$, $e_T \in \mathscr{D}$ により関数として実際には有限和となる (前者は $\hat{e}_T$ のサポートだけに制限されるし、公社は e_T のサポートだけに制限される) ので、和と $\langle\,,\,\rangle$ の計算は順序交換は問題ない。

一つ小さな命題を紹介する。

命題 2

任意の $f \in \mathscr{D}'_T$, $\phi \in \mathscr{D}$ に対し、その内積は周期積分を用いて

$$\langle\, f,\, \phi\,\rangle = \langle\, f,\, \phi_T\,\rangle_T \tag{10}$$

と表される。ここで、ϕ_T は、

$$\phi_T(x) = \phi * \delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x+nT) \tag{11}$$

で定義される C_T^∞ の関数。

これは、さきほどのものとほぼ同様の議論により、

$$\begin{aligned}
\langle\, f,\, \phi_T\,\rangle_T &= \langle\, f(x),\, \phi_T(x)e_T(x)\,\rangle = \left\langle\, f(x),\, e_T(x)\sum_n \phi(x+nT)\,\right\rangle \\
&= \sum_n \langle\, f(x),\, e_T(x)\phi(x+nT)\,\rangle = \sum_n \langle\, f(x),\, e_T(x-nT)\phi(x)\,\rangle \\
&= \left\langle\, f(x),\, \phi(x)\sum_n e_T(x-nT)\,\right\rangle = \langle\, f,\, \phi\,\rangle
\end{aligned}$$

と示される。また、ここから次のこともすぐにわかる。

命題 3

$f_n \in \mathscr{D}'_T$ が $\mathscr{D}'$ で $f_n \to f$ となる場合は $f \in \mathscr{D}'_T$ である。また、$\mathscr{D}'$ で $f_n \to 0$ であることと、任意の $\phi \in C_T^\infty$ に対して $\langle\, f_n,\, \phi\rangle_T \to 0$ となることは同値。

証明

まず $f \in \mathscr{D}'_T$ は、

$$\begin{aligned}\langle\, f(x),\, \phi(x+T)\,\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle\, f_n(x),\, \phi(x+T)\,\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\, f_n(x),\, \phi(x)\,\rangle \\ &= \ \langle\, f(x),\, \phi(x)\,\rangle\end{aligned}$$

より OK. また、$\mathscr{D}'$ で $f_n \to 0$ であれば、任意の $\phi \in C_T^\infty$ に対し

$$\langle\, f_n,\, \phi\,\rangle_T = \langle\, f_n,\, e_T\phi\,\rangle \to 0$$

となるし、逆に $\langle\, f_n,\, \phi\,\rangle_T \to 0$ ($\phi \in C_T^\infty$) であれば、命題 2 より任意の $\phi \in \mathscr{D}$ に対し、

$$\langle\, f_n,\, \phi\,\rangle = \langle\, f_n,\, \phi_T\,\rangle_T \to 0$$

となる。■

この周期積分により、$f \in \mathscr{D}'_T$ に対するフーリエ係数 $a_n(f), b_n(f)$ が以下のように定義される。

$$a_n(f) = \left\langle\, f(x),\, \frac{2}{T}\cos\frac{2n\pi}{T}x\,\right\rangle_T,\ \ b_n(f) = \left\langle\, f(x),\, \frac{2}{T}\sin\frac{2n\pi}{T}x\,\right\rangle_T \tag{12}$$

そして、これら対する (5) の右辺が f に対するフーリエ級数となる。例を一つ紹介する。

例 4

$\delta_T \in \mathscr{D}'_T$ に対しては、

$$\begin{aligned}a_n(\delta_T) &= \left\langle\, \delta_T(x),\, \frac{2}{T}\cos\frac{2n\pi}{T}x\,\right\rangle_T = \left\langle\, \delta_T(x),\, e_T(x)\frac{2}{T}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right\rangle \\ &= \sum_k e_T(kT)\frac{2}{T}\cos(2nk\pi) = \frac{2}{T}\sum_k e_T(kT) = \frac{2}{T}\end{aligned}$$

となる。同様に $b_n(\delta_T)$ は $\sin 2nk\pi = 0$ より 0 となるので、よって δ_T のフーリエ級数は

$$\delta_T \sim \frac{1}{T} + \sum_{n\geq 1}\frac{2}{T}\cos\frac{2n\pi}{T}x \qquad \left(= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{2n\pi ix/T}\right) \tag{13}$$

となる。

5 周期超関数のフーリエ級数の収束性

周期超関数のフーリエ級数の収束性は、実は次のことが知られている。

定理 5

$f \in \mathscr{D}'_T$ に対するフーリエ級数の部分和

$$F_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f) \cos \frac{2k\pi}{T} x + b_k(f) \sin \frac{2k\pi}{T} x \right) \tag{14}$$

は、$\mathscr{D}'$ で f に収束する。

本節では、この定理の証明を紹介する。

補題 6

任意の $f \in \mathscr{D}'_T, \phi \in C^\infty_T$ に対し、$f' \in \mathscr{D}'_T$ で、次が成り立つ。

1. $\langle\, f,\, \phi e'_T \,\rangle = 0$
2. $\langle\, f',\, \phi \,\rangle_T = -\langle\, f,\, \phi' \,\rangle_T$

証明

$f' \in \mathscr{D}'_T$ となることは容易にわかる。まず 1. から考える

$$\begin{aligned}
\langle\, f,\, \phi e'_T \,\rangle &= \left\langle\, f(x),\, \phi(x) e'_T(x) \sum_n e_T(x+nT) \,\right\rangle \\
&= \sum_n \langle\, f(x),\, \phi(x) e'_T(x) e_T(x+nT) \,\rangle = \sum_n \langle\, f(x),\, \phi(x) e'_T(x-nT) e_T(x) \,\rangle \\
&= \left\langle\, f(x),\, \phi(x) e_T(x) \sum_n e'_T(x-nT) \,\right\rangle
\end{aligned}$$

となるが、

$$\sum_n e'_T(x-nT) = \left(\sum_n e_T(x-nT) \right)' = (1)' = 0$$

より 0 となる。

また、2. の方は 1. より、

$$\langle\, f',\, \phi\,\rangle_T = \langle\, f',\, \phi e_T\,\rangle = -\langle\, f,\, \phi' e_T\,\rangle - \langle\, f,\, \phi e_T'\,\rangle = -\langle\, f,\, \phi' e_T\,\rangle = -\langle\, f,\, \phi'\,\rangle_T$$

となって示される。■

補題 7

任意の $f \in \mathscr{D}_T'$ に対し、$a_n(f') = \dfrac{2n\pi}{T} b_n(f),\ \ b_n(f') = -\dfrac{2n\pi}{T} a_n(f)$,
$\{F_n(f)\}' = F_n(f')$.

証明

補題 6 より、

$$\begin{aligned} a_n(f') &= \left\langle f',\, \frac{2}{T}\cos\frac{2n\pi}{T}x \right\rangle_T = -\left\langle f,\, -\frac{2}{T}\frac{2n\pi}{T}\sin\frac{2n\pi}{T}x \right\rangle_T = \frac{2n\pi}{T} b_n(f), \\ b_n(f') &= \left\langle f',\, \frac{2}{T}\sin\frac{2n\pi}{T}x \right\rangle_T = -\left\langle f,\, \frac{2}{T}\frac{2n\pi}{T}\cos\frac{2n\pi}{T}x \right\rangle_T = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f) \end{aligned}$$

よって、$a_0(f') = 0$ であり、これらを用いると、

$$\begin{aligned} \{F_n(f)\}' &= \left\{ \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos\frac{2k\pi}{T}x + b_k(f)\sin\frac{2k\pi}{T}x \right) \right\}' \\ &= \sum_k \left(-\frac{2k\pi}{T} a_k(f)\sin\frac{2k\pi}{T}x + \frac{2k\pi}{T} b_k(f)\cos\frac{2k\pi}{T}x \right) \\ &= \sum_k \left(b_k(f')\sin\frac{2k\pi}{T}x + a_k(f')\cos\frac{2k\pi}{T}x \right) = F_n(f') \end{aligned}$$

となる。■

さて、定理 5 は、任意の $\phi \in \mathscr{D}$ に対して、

$$\langle\, F_n(f),\, \phi\,\rangle \to \langle\, f,\, \phi\,\rangle$$

であることを意味するが、命題 2 よりこの左辺は $\langle\, F_n(f),\, \phi_T \,\rangle_T$ に等しく、そして (6) を用いると以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&\langle\, F_n(f),\, \phi_T \,\rangle_T \\
&= \left\langle \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos\frac{2k\pi}{T}x + b_k(f)\sin\frac{2k\pi}{T}x \right),\, \phi_T \right\rangle_T \\
&= \frac{a_0(f)}{2}\int_0^T \phi_T(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\int_0^T \phi_T(x)\cos\frac{2k\pi}{T}x\,dx \right. \\
&\qquad \left. + b_k(f)\int_0^T \phi_T(x)\sin\frac{2k\pi}{T}x\,dx \right) \\
&= \frac{T}{4}a_0(f)a_0(\phi_T) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T}{2}a_k(f)a_k(\phi_T) + \frac{T}{2}b_k(f)b_k(\phi_T) \right) \\
&= \left\langle f,\, \frac{a_0(\phi_T)}{2} \right\rangle_T + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f,\, a_k(\phi_T)\cos\frac{2k\pi}{T}x + b_k(\phi_T)\sin\frac{2k\pi}{T}x \right\rangle_T \\
&= \langle\, f,\, F_n(\phi_T) \,\rangle_T = \langle\, f,\, e_T F_n(\phi_T) \,\rangle = \langle\, f,\, F_n(\phi_T) \,\rangle_T
\end{aligned}$$

このように、フーリエ級数の計算が、超関数からテスト関数へ移動できる。

さて、次は良く知られている。

命題 8

$f \in \mathscr{D}'_T$ が C^1 級 ($f,\, f'$ が連続) であれば、$F_n(f)$ は f に一様収束する。

この証明は 9 節で紹介する。

この命題 8 により、$F_n(\phi_T)$ は ϕ_T に一様収束することがわかるが、補題 7 より $D^k F_n(\phi_T) = F_n(D^k \phi_T)$ であり、これも命題 8 により $D^k \phi_T$ に一様収束することになる。これにより、$e_T F_n(\phi_T)$ は、$\mathscr{D}$ で $e_T \phi_T$ に収束することがわかる。実際、$e_T F_n(\phi_T)$ のサポートは n にかかわらず e_T のサポートに含まれ、

$$\begin{aligned}
D^k(e_T F_n(\phi_T)) &= \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j D^{k-j} e_T D^j F_n(\phi_T) \rightrightarrows \sum_{j=0}^{k} {}_kC_j D^{k-j} e_T D^j \phi_T \\
&= D^k(e_T \phi_T)
\end{aligned}$$

となるからである。

よって、$\langle f, e_T F_n(\phi_T) \rangle$ は $\langle f, e_T \phi_T \rangle$ に収束し、結局、

$$\langle F_n(f), \phi \rangle = \langle f, e_T F_n(\phi_T) \rangle \to \langle f, e_T \phi_T \rangle = \langle f, \phi_T \rangle_T = \langle f, \phi \rangle$$

となり、定理 5 が示されたことになる。

つまり、周期超関数のフーリエ級数の収束は、テスト関数のフーリエ級数の収束に帰着されて示されることになる。なお、この定理 5 により、(13) も $\mathscr{D}'$ ($\mathscr{D}'_T$) では等号になる。

6 任意のフーリエ級数

ついでにもう一つ、周期超関数空間でのフーリエ級数の収束性に関する定理を紹介する。

命題 1 より周期超関数 f は緩増加超関数なので、ある自然数 m, 正の定数 C_f があって、任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対し

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq C_f \|\phi\|_m \tag{15}$$

が成り立つ。ここで、$\|\cdot\|_m$ は $\mathscr{S}$ のセミノルム

$$\|\phi\|_m = \max_{0\leq k\leq m} \sup_x (1+|x|)^m |D^k \phi(x)|$$

である。よって、f のフーリエ級数 $a_n(f)$ の n に関する大きさを考えると、

$$\begin{aligned} |a_n(f)| &= \left| \left\langle f, \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi}{T} x \right\rangle_T \right| = \left| \left\langle f, e_T \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi}{T} x \right\rangle \right| \\ &\leq C_f \frac{2}{T} \left\| e_T(x) \cos \frac{2n\pi}{T} x \right\|_m \\ &\leq \frac{2C_f}{T} \max_{0\leq k\leq m} \sup_x (1+|x|)^m \left| D^k \left(e_T \cos \frac{2n\pi}{T} x \right) \right| \end{aligned}$$

となるが、e_T は $\mathscr{D}$ の元であるからその微分も含めて $(1+|x|)^m$ をかけても有界 (m, e_T に依存する定数で評価できる) で、結局

$$|a_n(f)| \leq C_1 n^m$$

の形の式で評価できることがわかる。ここで C_1 は f, T, e_T, m に依存する定数である。$b_n(f)$ も同様なので、結局次が言える。

補題 9

$f \in \mathscr{D}'_T$ のフーリエ係数 $a_n(f), b_n(f)$ は、n に関して高々多項式オーダー、すなわち n によらないある自然数 m とある定数 C_0 があって

$$|a_n(f)| \leq C_0 n^m,\ \ |b_n(f)| \leq C_0 n^m \tag{16}$$

とできる。

もちろん、このような大きなオーダーの係数のフーリエ級数は普通の意味では収束しないが、$\mathscr{D}'_T$ では収束することになる。

逆に、高々多項式オーダーであるようなフーリエ係数を持つフーリエ級数は、$\mathscr{D}'$ ($\mathscr{D}'_T$) で常に収束するだろうか。これについては次のことが言える。

定理 10

α_n, β_n が多項式オーダー、すなわち $|\alpha_n| \leq C_0 n^m, |\beta_n| \leq C_0 n^m$ であるとき、それらを係数とするフーリエ級数

$$f_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos\frac{2k\pi}{T}x + \beta_k \sin\frac{2k\pi}{T}x\right) \tag{17}$$

は、$\mathscr{D}'_T$ のある周期超関数 f に $\mathscr{D}'$ で収束する。

この証明には、2 通りの方法があるが、一つはその極限の周期超関数を具体的に構成する方法である。m は $m \geq 2$ と仮定し (そうしてよい)、$f_n(x)$ から $\alpha_0/2$ を取り除いたものを形式的に $2m$ 回積分すると

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^m\left(\frac{T}{2k\pi}\right)^{2m}\left(\alpha_k \cos\frac{2k\pi}{T}x + \beta_k \sin\frac{2k\pi}{T}x\right)$$

が得られるが、このフーリエ級数の係数は $O(k^{-m})$ なので、$m \geq 2$ より、ある連続関数 $F_0(x)$ に一様収束する。もちろん、$F_0 \in \mathscr{D}'_T$ であり、超関数での導関数 $D^{2m}F_0$ も $\mathscr{D}'_T$ に入る。よって f_n の極限は、$\alpha_0/2 + D^{2m}F_0$ となる、という論法である。

もう一つの方法は、任意の $\phi \in \mathscr{D}$ に対して $\langle f_n(x), \phi(x) \rangle$ が収束列 (コーシー列) となることを言い、$\mathscr{D}'$ の弱完備性 (例えば [2] 定理 3.4.6) により、その極限が $\mathscr{D}'$ に存在し、それも $\mathscr{D}'_T$ に入ることが示される、という方法である。こちらの方法の場合、$\langle f_n(x), \phi(x) \rangle$ が収束列となることを示す必要があるが、これは、次のようにして示される。

$$\begin{aligned}
&\langle f_n(x), \phi(x) \rangle = \langle f_n(x), \phi_T(x) \rangle_T \\
&= \frac{\alpha_0}{2}\int_0^T \phi_T dx + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \int_0^T \phi_T \cos\frac{2k\pi}{T}x\,dx + \beta_k \int_0^T \phi_T \sin\frac{2k\pi}{T}x\,dx\right) \\
&= \frac{\alpha_0 T}{4}a_0(\phi_T) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k T}{2}a_k(\phi_T) + \frac{\beta_k T}{2}b_k(\phi_T)\right)
\end{aligned}$$

なるが、$\phi_T \in C_T^\infty$ のフーリエ係数 $a_k(\phi_T), b_k(\phi_T)$ は以下のように早く減衰することが知られている。

命題 11

$\phi \in C_T^\infty$ のフーリエ係数 $a_n(\phi), b_n(\phi)$ は、任意の自然数 p に対し

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n(\phi) = \lim_{n\to\infty} n^p b_n(\phi) = 0 \tag{18}$$

この証明にはベッセルの不等式を用いるが、それは 9 節で紹介する。

この命題 11 の p を $m+2$ と取れば、級数

$$\langle f_n(x), \phi(x) \rangle = \frac{\alpha_0 T}{4}a_0(\phi_T) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k T}{2}a_k(\phi_T) + \frac{\beta_k T}{2}b_k(\phi_T)\right)$$

の k 項は、ある定数 C に対し C/k^2 以下となるので、$\langle f_n(x), \phi(x) \rangle$ は絶対収束する。よって、f_n の極限が $\mathscr{D}'_T$ 内に存在することになる。

この定理 10 から、超関数の範疇でフーリエ級数が収束する必要十分条件は、そのフーリエ係数が高々多項式オーダーであることがわかる。

7 タンジェントの主値積分

さて元の問題に戻るが、$\tan x$ は L^1_{loc} ではなく、$x = n\pi + \pi/2$ に 1 位の極があるのでこのままでは超関数とはならない。しかし、この特異点での積分は主値積分 (principal value) を考えることで超関数と見なすことができる。これを本稿では $\mathrm{pTan}x$ と書くことにする。$\mathrm{pTan}x$ は、次のような超関数となる ($\phi \in \mathscr{D}$)。

$$
\begin{aligned}
\langle\, \mathrm{pTan}x,\, \phi\,\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{p.v.} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \phi(x) \tan x \, dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi-\varepsilon} + \int_{(n+1/2)\pi+\varepsilon}^{(n+1)\pi} \right) \phi(x) \tan x \, dx
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\left(\int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi-\varepsilon} + \int_{(n+1/2)\pi+\varepsilon}^{(n+1)\pi} \right) \tan x \, dx = 0
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \mathrm{pTan}x,\, \phi\,\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi-\varepsilon} + \int_{(n+1/2)\pi+\varepsilon}^{(n+1)\pi} \right) \left(\phi(x) - \phi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \tan x \, dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(\phi(x) - \phi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \tan x \, dx \qquad (19)
\end{aligned}
$$

と表されることになる。これは、$\mathrm{supp}\,\phi \subset [-N\pi, N\pi]$ とすると (N: 自然数)、

$$
\begin{aligned}
|\langle\, \mathrm{pTan}x,\, \phi\,\rangle| &\le \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \phi(x) - \phi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| |\tan x| dx \\
&\le \|\phi\|_{C^1} \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \left(x - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \tan x \right| dx \\
&= 2N\|\phi\|_{C^1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |t \cot t| dt \le N\pi \|\phi\|_{C^1}
\end{aligned}
$$

となるので、$\mathrm{pTan}x$ は確かに超関数となる ($\mathrm{pTan}x \in \mathscr{D}'_\pi$)。

次に、pTan$x$ の周期積分を計算してみる。$\phi \in C_\pi^\infty$ とすると、(19) と ϕ の周期性により

$$\begin{aligned}
&\langle\, \mathrm{pTan}x,\, \phi\,\rangle_\pi = \langle\, \mathrm{pTan}x,\, e_\pi(x)\phi(x)\,\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left((e_\pi\phi)(x) - (e_\pi\phi)\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \tan x\, dx \\
&= \sum_n \int_0^\pi \left(e_\pi(x+n\pi)\phi(x) - e_\pi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \tan x\, dx \\
&= \int_0^\pi \sum_n \left(e_\pi(x+n\pi)\phi(x) - e_\pi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \tan x\, dx \\
&= \int_0^\pi \left(\phi(x) - \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \tan x\, dx \qquad (20)
\end{aligned}$$

が得られる。

8 タンジェント超関数のフーリエ級数

ではいよいよ pTan$x$ の周期超関数としてのフーリエ級数を計算する。(20) より、

$$\begin{aligned}
a_n(\mathrm{pTan}x) &= \left\langle \mathrm{pTan}x,\, \frac{2}{\pi}\cos 2nx \right\rangle_\pi \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi}\cos 2nx - \frac{2}{\pi}\cos n\pi \right) \tan x\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2nt + n\pi) - \cos n\pi)(-\cot t)\, dt \\
&= (-1)^n \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 2nt)\cot t\, dt
\end{aligned}$$

となるので、結局 $a_n(\mathrm{pTan}x) = 0$ となる。一方、

$$b_n(\mathrm{pTan}x) = \left\langle \mathrm{pTan}x,\, \frac{2}{\pi}\sin 2nx \right\rangle_\pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2nx \tan x\, dx \qquad (21)$$

となるが、これらはまさに $\tan x$ の形式的なフーリエ係数に他ならない。

$a_n = 0$ は $\tan x$ が奇関数であるから、b_n については $\tan x$ の特異性と $\sin 2nx$ の零点がたまたま一致するために普通に積分できるわけである。

よって、あとは (21) を計算して、それが $2(-1)^{n-1}$ に等しいことを示せば $\mathrm{pTan}x$ のフーリエ級数が (1) の右辺に等しいことになる。

$$
\begin{aligned}
b_n(\mathrm{pTan}x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2nx \tan x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2nt+n\pi)(-\cot t)\, dt \\
&= \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\cos t\, dt
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin 2nt}{\sin t} &= \frac{e^{2int}-e^{-2int}}{e^{it}-e^{-it}} = e^{(2n-1)it}+e^{(2n-3)it}+e^{(2n-5)it}+\cdots+e^{-(2n-1)it} \\
&= 2\cos(2n-1)t + 2\cos(2n-3)t + \cdots + 2\cos t
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\cos t\, dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos(2n-1)t + \cdots + 2\cos t)\cos t\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\, dt = \pi
\end{aligned}
$$

よって、確かに $b_n(\mathrm{pTan}x) = 2(-1)^{n-1}$ となる。

つまり、(1) は、左辺を $\mathrm{pTan}x$ と見れば、超関数の範囲では収束して等号が成り立つことが言えることになる。

9 いくつかの証明

この節では、いくつかの命題の証明を紹介する。

まず、命題 1 を証明する。それには、$\mathscr{D}$ は $\mathscr{S}$ で稠密なので、$f \in \mathscr{D}'_T$ に対し、ある自然数 m_0 とある正数 C_0 があり、

$$
|\langle f, \phi \rangle| \le C_0 \|\phi\|_{m_0} \tag{22}
$$

がすべての $\phi \in \mathscr{D}$ に対して成り立つことを示せばよい。

まず、4 節の 1 の分割 e_T に対し、

$$\operatorname{supp} e_T \subset (-N_0T, N_0T)$$

となる自然数 N_0 を取る。$f \in \mathscr{D}'$ であるから、この N_0 に対し、ある自然数 m_1 と正数 C_1 があり、任意の $\phi \in \mathscr{D}(-N_0T, N_0T)$ に対して

$$|\langle f, \phi \rangle| \le C_1 \max_{k \le m_1} \sup_{|x| \le N_0T} \left| D^k \phi(x) \right| \tag{23}$$

とできる。なお、この m_1 は、必要ならば取り直して 2 以上であるとしてよい。

さて、任意の $\phi \in \mathscr{D}$ に対し、命題 2 により

$$\langle f, \phi \rangle = \langle f, \phi_T \rangle_T = \langle f, e_T\phi_T \rangle \tag{24}$$

であり、$\operatorname{supp}(e_T\phi_T) \subset (-N_0T, N_0T)$ であるから、(23) より

$$|\langle f, e_T\phi_T \rangle| \le C_1 \max_{k \le m_1} \sup_{|x| \le N_0T} \left| D^k(e_T\phi_T)(x) \right| \tag{25}$$

とできる。ここで、

$$\begin{aligned} D^k(e_T\phi_T)(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D^k(e_T(x)\phi(x+nT)) \\ &= \sum_n \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j D^{k-j} e_T(x) D^j \phi(x+nT) \\ &= \sum_n \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j \frac{D^{k-j} e_T(x)}{(1+|x+nT|)^{m_1}} (1+|x+nT|)^{m_1} D^j \phi(x+nT) \end{aligned}$$

とすると、$k \le m_1$ より

$$|D^k(e_T\phi_T)(x)| \le \|\phi\|_{m_1} \sum_n \frac{\psi_k(x)}{(1+|x+nT|)^{m_1}} \tag{26}$$

となることがわかる。ここで、$\psi_k(x)$ は

$$\psi_k(x) = \sum_{j=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_j |D^{k-j} e_T(x)|$$

としたが、これは $\operatorname{supp}\psi_k(x) \subset (-N_0T, N_0T)$ で非負の有界な関数である。

(24), (25), (26) を合わせると結局

$$|\langle f, \phi\rangle| \le C_1\|\phi\|_{m_1}\sum_n \frac{\psi_0(x)}{(1+|x+nT|)^{m_1}} \tag{27}$$

となる。ここで、$\psi_0(x) = \max\limits_{k\le m_1}\psi_k(x)$ とした。(27) の n に関する和の部分を、$|n| \le N_0$ に対するものと、$|n| > N_0$ に関するものに分けると、$|n| > N_0$ のときは $|x| \le N_0T$ より

$$|x+nT| \ge |n|T - |x| \ge (|n|-N_0)T$$

なので、$m_1 \ge 2$ より、

$$\begin{aligned}\sum_n \frac{\psi_0(x)}{(1+|x+nT|)^{m_1}} &= \sum_{|n|\le N_0}\frac{\psi_0(x)}{(1+|x+nT|)^{m_1}} + \sum_{|n|>N_0}\frac{\psi_0(x)}{(1+|x+nT|)^{m_1}}\\ &\le \sum_{|n|\le N_0}\psi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\psi_0(x)}{(1+jT)^{m_1}} \le \psi_0(x)\left(2N_0+1+\frac{\pi^2}{3T^2}\right)\end{aligned}$$

でおさえられる。$\psi_0(x)$ は有界なので、これで (22) が成り立つこと ($m_0 = m_1$) が示された。

次は、命題 8 を示す。それには、次のベッセルの不等式を用いる。

命題 12

$f \in \mathscr{D}'_T$ が $f \in L^2(0,T)$ ならば、すべての n について次が成り立つ。

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)^2 + b_k(f)^2) \le \frac{2}{T}\int_0^T |f|^2dx \tag{28}$$

証明

不等式 (28) の左辺を I_n とすると、フーリエ級数の部分和 $F_n(f)$ ((14)) は、

$$\int_0^T |F_n(f)(x)|^2dx = \frac{T}{2}I_n,\ \int_0^T f(x)F_n(f)(x)dx = \frac{T}{2}I_n$$

となり (計算は略)、よって

$$\|f - F_n(f)\|_{L^2(0,T)}^2 = \|f\|_{L^2(0,T)}^2 - \frac{T}{2} I_n \geq 0$$

となるので、

$$I_n \leq \frac{2}{T} \|f\|_{L^2(0,T)}^2$$

が言える。■

命題 8 の証明に戻る。今、$f \in \mathscr{D}'_T$ が C^1 級である場合は $f' \in L^2(0,T)$ なので、これにベッセルの不等式を適用すると、

$$\frac{a_0(f')^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f')^2 + b_k(f')^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f'|^2 dx$$

となるが、補題 7 よりこれは

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k\pi}{T} \right)^2 (a_k(f)^2 + b_k(f)^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f'|^2 dx \tag{29}$$

を意味する。よって、

$$\left| a_k(f) \cos \frac{2k\pi}{T} x + b_k(f) \sin \frac{2k\pi}{T} x \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2k\pi}{T} \right)^2 \left(a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right) + \left(\frac{T}{2k\pi} \right)^2$$

より、(29) によりこの右辺の和が $F_n(f)$ に対する収束する優級数を作るので、結局 $F_n(f)$ が一様収束することになる。

最後は命題 11。$\phi \in C_T^\infty$ とすると、$D^m \phi$ にベッセルの不等式を適用すれば、(11) と同様にして

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k\pi}{T} \right)^{2m} (a_k(\phi)^2 + b_k(\phi)^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |D^m \phi|^2 dx \tag{30}$$

が得られ、左辺は $n \to \infty$ のときに右辺でおさえられて有界なので、

$$\lim_{k \to \infty} k^p a_k(\phi) = \lim_{k \to \infty} k^p b_k(\phi) = 0$$

が $p < m$ に対して言えることになる。m はいくらでも大きくとれるので、これで命題 11 も成り立つことが示された。

10 最後に

本稿ではインターネット上の質問を題材に超関数のフーリエ級数に関する解説を行った。フーリエ変換に関する話は超関数の多くの本に書かれているが、フーリエ級数については省略されているものも多いので、本稿も多少は意味があるだろう。

最後に、私が知る (記憶している) 超関数の参考文献を、和書を中心に一通り紹介しておく。

[1] は、偏微分方程式の現代的な入門書で、超関数についてもコンパクトに説明している。[2] は、雑誌「数理科学」の「臨時別冊 SGC ライブラリ」というシリーズの 1 冊で、例などを上げながら偏微分方程式への応用を丁寧に紹介している。いずれも超関数の入門としては適当だろうと思う。しかし、いずれも超関数の「フーリエ変換」は取り上げているものの、超関数の「フーリエ級数」については書いていない。

本稿は、主に [3] に従って書いたが、短く説明するため、話の流れや証明は、[3] とはだいぶ変えている。[4] は、現物は持っていないが、目次を見た感じでは [3] とほぼ同じで、多分 [3] の改訂版のようなものだろう。[5] は、これらの和訳ではないが、超関数についても触れていて、その部分は [3] とかなり共通する (と記憶している)。ただし、[5] は現在は手に入れるのはかなり難しい。

[6] から [11] までは、多分大学数学科の図書室にはあるだろうが、現在一般に手に入れるのはかなり難しい。[6], [7] は、超関数を数学的に定式化したシュワルツの本であり、[6] はタイトルは超関数ではないが、超関数の計算方法などが丁寧に書かれていて、周期超関数のフーリエ級数についても章を作って解説している。

[8] は、超関数の空間の位相を丁寧に解説したもの、[9] は、前半が超関数と関数空間、後半が偏微分方程式 (だったと思う) の演習書で、いずれも現在手に入りにくいのが非常に残念である。

[10] は、岩波基礎数学シリーズの中から成書化されたもので、前半はフーリエ級数と常微分方程式と超関数、後半がルベーグ積分で、とてもわかりやすい本であるが、超関数のフーリエ級数については触れていない。

[11] は、超関数のしっかりした本であり、一度 1999 年に復刊されたようであるが、また現在は入手できないようである。今手元にはないので、超関数のフーリエ級数について書いてあるかはよくわからない。

ところで、最近 (といってももう何年も経つが)、かなり古い (1956 年) 超関数の本 [12] が復刊されたようである。記号や書き方などが少し現在からすると学びにくいだろうし、入門向きではないと思うが、超関数のそれなりにちゃんとした本が手に入るのはありがたいことだと思う。超関数のフーリエ級数も書かれているようである。

参考文献

[1] 堤誉志雄、「偏微分方程式論」、培風館 (2004)

[2] 磯崎洋、「超関数・フーリエ変換入門」、サイエンス社 (2010)

[3] V.S.Vladimirov, "Generalized functions in mathematical physics", Mir Publishers, (1979)

[4] V.S.Vladimirov, "Methods of the theory of generalized function", Taylor & Francis, (2002).

[5] V.S.Vladimirov (飯野理一訳) 「応用偏微分方程式」(1, 2)、文一総合出版 (1977) "Methods of the theory of generalized function", Taylor & Francis, (2002).

[6] L. シュワルツ (吉田耕作、渡辺二郎訳)、「物理数学の方法」、岩波書店 (1966)

[7] L. シュワルツ (岩村聯、石垣春夫、鈴木文夫訳)、「超函数の理論」(原書第 3 版)、岩波書店 (1971)

[8] 山中健、「線形位相空間と一般関数」、共立出版 (1966)

[9] 吉田耕作、伊藤 清三、「函数解析と微分方程式」、岩波書店 (1976)

[10] 藤田宏、吉田耕作、「現代解析入門」、岩波書店 (1991)

[11] 垣田高夫、「シュワルツ超関数入門」、日本評論社 (1985)

[12] 吉田耕作、「超函数論」、共立出版 (2009)