

2017年08月01日

# 地中最速降下線と内サイクロイド

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 1 はじめに

以前、[3] で、地球の中心からの重力を考えた場合の地中の最速降下線を考察し、特に地中が均質である場合は、それが以下のような極座標形式の式で与えられることを示した。

$$\begin{cases} x = Y \cos H(Y) \\ y = Y \sin H(Y) \end{cases} \quad (R/k_2 \leq Y \leq R), \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = Y \cos(\phi_0 - H(Y)) \\ y = Y \sin(\phi_0 - H(Y)) \end{cases} \quad (R/k_2 \leq Y \leq R) \quad (2)$$

ここで、 $R$  は地球の半径、経路は地表の  $A(R, 0)$  から  $B(R \cos \phi_0, R \sin \phi_0)$  に至る地中の経路であり、 $0 < \phi_0 < \pi$  とし、それに対する  $\phi_0/2$  以下の偏角の部分の曲線が (1)、 $\phi_0/2$  以上の部分の曲線が (2) であった。 $H(Y)$  は、

$$H(Y) = \arctan \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}} - \frac{1}{k_2} \arctan k_2 \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}} \quad (3)$$

であり、 $k_2$  は

$$k_2 = \frac{\pi}{\pi - \phi_0} \quad (> 1) \quad (4)$$

である。

そして、[3] の最後に、「この曲線はサイクロイドではないし、具体的な名前がついている曲線なのかわからない」と書いたが、[4] によれば、この均質な場合の地中の最速降下線は内サイクロイドであるようなので、本稿ではそれを確認してみる。

なお、[3] では、(1), (2), (3) に代わる、 $\arcsin$  による特異性のない式 ( $\bar{H}(\xi)$ ) も紹介したが、どちらで考えてもほぼ同等であるので、今回は (1), (2), (3) で考えることにする。

## 2 内サイクロイド

内サイクロイドは、半径  $R$  の円内に、半径  $\lambda R$  ( $0 < \lambda < 1$ ) の小円が内接しながらすべらずにころがるときの、小円の円周上の点が描く軌跡である (図 1)。最初に  $A(R, 0)$

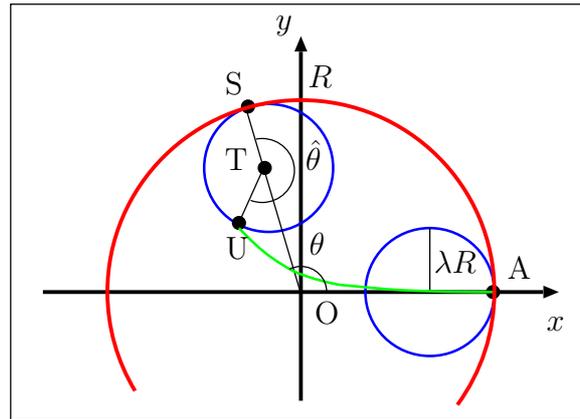


図 1: 内サイクロイド

で接していた小円がころがって  $S(R \cos \theta, R \sin \theta)$  まで接点が進んだときの小円の中心を  $T$ 、元々  $A$  にあった小円の円周上の点が回転した移動先、すなわち内サイクロイド上の点を  $U(x, y)$  とし、その小円の接点に対する回転角を  $\hat{\theta}$  とすると、

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TU}, \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OT} = (1 - \lambda)R(\cos \theta, \sin \theta) \quad (6)$$

$$\overrightarrow{TU} = \lambda R(\cos(\theta - \hat{\theta}), \sin(\theta - \hat{\theta})) \quad (7)$$

となる。大円の弧  $AS$  は  $R\theta$  に等しいが、小円はすべらずにころがるので、これは小円の弧  $SU = \lambda R\hat{\theta}$  に等しくなり、

$$\hat{\theta} = \frac{R\theta}{\lambda R} = \frac{\theta}{\lambda} \quad (8)$$

となる。よって

$$\theta - \hat{\theta} = -\frac{1 - \lambda}{\lambda} \theta$$

となり、結局内サイクロイドは以下のように媒介変数表示される。

$$\begin{cases} \frac{x}{R} = (1 - \lambda) \cos \theta + \lambda \cos \frac{1 - \lambda}{\lambda} \theta \\ \frac{y}{R} = (1 - \lambda) \sin \theta - \lambda \sin \frac{1 - \lambda}{\lambda} \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi\lambda) \quad (9)$$

なお、 $U$  が再び大円に接するのは  $\hat{\theta} = 2\pi$  のときだから、滑らかな内サイクロイドを与える  $\theta$  の範囲は (8) より  $0 \leq \theta \leq 2\pi\lambda$  となる。これをいくつかの  $\lambda$  に対してグラフにすると図 2 のようになる。このグラフでは、 $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  の内サイクロイドを描いているが、 $\lambda = 0.5$  のときは  $x$  軸の一部である直径に一致し、 $x$  軸より下の部分は  $\lambda > 0.5$  の場合に対応する。

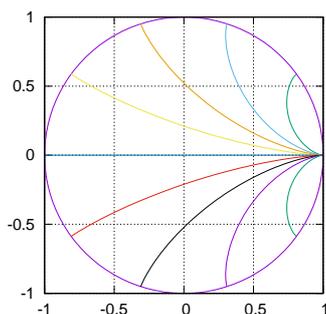


図 2: 内サイクロイドのグラフ ( $\lambda = 0.1, \dots, 0.9$ )

なお、この内サイクロイドのグラフは、以下の図 3 のように (9) を  $\theta > 2\pi\lambda$  の方にも延長して星形に描いたりするグラフも良く見られる。この方法を応用した幾何学文様

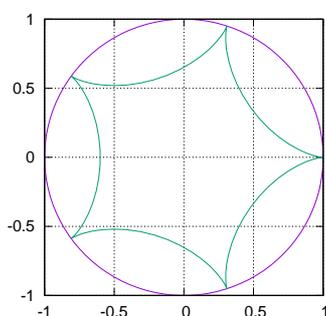


図 3: 星形に延長した内サイクロイド ( $\lambda = 0.2$ )

を描くスピログラフという道具もあるが、スピログラフは厳密には小円の円周上の点の軌跡ではなく、小円板内部の点の軌跡であり、それは内サイクロイドではなく、尖りのないトロコイドという曲線になる。

### 3 パラメータ変換による変形

本節では (1) の式を変形して、それが 2 節で紹介した内サイクロイドになるかどうかを考えてみる。

今、

$$\mu = \arctan \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}}, \quad \nu = \arctan k_2 \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}} \quad (10)$$

とすると、(3) より

$$H(Y) = \mu - \frac{\nu}{k_2} \quad (11)$$

となる。(10) より

$$\tan \mu = \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}}, \quad \tan \nu = k_2 \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos^2 \mu &= \frac{1}{1 + \tan^2 \mu} = \frac{1}{1 + (R^2 - Y^2)/(k_2^2 Y^2 - R^2)} = \frac{k_2^2 Y^2 - R^2}{(k_2^2 - 1)Y^2}, \\ \cos^2 \nu &= \frac{1}{1 + \tan^2 \nu} = \frac{1}{1 + (k_2^2 R^2 - k_2^2 Y^2)/(k_2^2 Y^2 - R^2)} = \frac{k_2^2 Y^2 - R^2}{(k_2^2 - 1)R^2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\left(\frac{\cos \mu}{\cos \nu}\right)^2 = \left(\frac{R}{Y}\right)^2$$

となることがわかる。(10) より  $0 \leq \mu < \pi/2$ ,  $0 \leq \nu < \pi/2$  なので、よって

$$Y \cos \mu = R \cos \nu \tag{12}$$

が得られる。同様にして、

$$\sin^2 \mu = 1 - \cos^2 \mu = \frac{R^2 - Y^2}{(k_2^2 - 1)Y^2}, \quad \sin^2 \nu = 1 - \cos^2 \nu = \frac{k_2^2 R^2 - Y^2}{(k_2^2 - 1)R^2}$$

より

$$Y \sin \mu = \frac{R}{k_2} \sin \nu \tag{13}$$

が得られる。さて、(12), (13) と (1), (11) により、

$$\begin{aligned} x &= Y \cos H = Y \cos \left( \mu - \frac{\nu}{k_2} \right) = Y \cos \mu \cos \frac{\nu}{k_2} + Y \sin \mu \sin \frac{\nu}{k_2} \\ &= R \cos \nu \cos \frac{\nu}{k_2} + \frac{R}{k_2} \sin \nu \sin \frac{\nu}{k_2} \\ &= \frac{R}{2} \left\{ \cos \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu + \cos \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu \right\} \\ &\quad + \frac{R}{2k_2} \left\{ \cos \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu - \cos \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu \right\} \end{aligned}$$

となり、結局

$$x = \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \cos \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu + \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \cos \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu \tag{14}$$

が得られる。同様に  $y$  は、

$$\begin{aligned}
 y &= Y \sin H = Y \sin \left( \mu - \frac{\nu}{k_2} \right) = Y \sin \mu \cos \frac{\nu}{k_2} - Y \cos \mu \sin \frac{\nu}{k_2} \\
 &= \frac{R}{k_2} \sin \nu \cos \frac{\nu}{k_2} - R \cos \nu \sin \frac{\nu}{k_2} \\
 &= \frac{R}{2k_2} \left\{ \sin \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu + \sin \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu \right\} \\
 &\quad - \frac{R}{2} \left\{ \sin \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu - \sin \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu \right\}
 \end{aligned}$$

より、

$$y = \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \sin \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu - \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \sin \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu \quad (15)$$

と変形できる。

$R/k_2 \leq Y \leq R$  に対して

$$0 \leq \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}} \leq \infty$$

であり、よって  $0 \leq \nu \leq \pi/2$  であるから、

$$\tau = \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu \quad (16)$$

とすると、その範囲は

$$0 \leq \tau \leq \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \frac{\pi}{2} = \left( 1 - \frac{\pi - \phi_0}{\pi} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\phi_0}{2}$$

となる。また、

$$\lambda = \frac{\phi_0}{2\pi} \quad (17)$$

とすると、 $0 < \phi_0 < \pi$  より  $0 < \lambda < 1/2$  で、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k_2} &= \frac{\pi - \phi_0}{\pi} = 1 - \frac{\phi_0}{\pi} = 1 - 2\lambda, \\
 \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) \nu &= \frac{1 + 1/k_2}{1 - 1/k_2} \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) \nu = \frac{1 + (1 - 2\lambda)}{1 - (1 - 2\lambda)} \tau = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \tau, \\
 \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{k_2} \right) &= \frac{1}{2} (1 + 1 - 2\lambda) = 1 - \lambda, \\
 \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right) &= \frac{1}{2} (1 - 1 + 2\lambda) = \lambda
 \end{aligned}$$

となるので、これらにより (14), (15) は

$$\begin{cases} x = R(1 - \lambda) \cos \tau + R\lambda \cos \frac{1 - \lambda}{\lambda} \tau \\ y = R(1 - \lambda) \sin \tau - R\lambda \sin \frac{1 - \lambda}{\lambda} \tau \end{cases}$$

と書け、これは確かに (9) に一致する。

なお、これは (1) の  $0 \leq \tau \leq \phi_0/2 = \lambda\pi$  の部分であるが、もう半分の  $\lambda\pi \leq \tau \leq 2\lambda\pi$  の方は、(2) により、ここまでと全く同様にして得られる。

以上により、均質な場合の地中最速降下線 (1), (2), (3) が、確かに内サイクロイドに等しいことが確かめられたことになる。

そして、その小円の半径と大円の半径の比である  $\lambda$  は、(17) より出発点と終点とが作る中心角  $\phi_0$  と、 $2\pi$  との比に等しいこともわかったことになる。これは実際に 2 点が与えられたときに内サイクロイドを用いて具体的な解を求めるのに役に立つだろう。

## 4 最後に

今回は、[4] に書かれていた、地中が均質の場合の地中最速降下線が、実は簡単な 2 円の内サイクロイドになることを確認した。[3] を書いたときは、(1), (2), (3) の式からそのような結果を想像することはできなかったが、目標がわかればやることははっきりするので、今回式変形によりそれを示すことはそう難しくはなかった。

これで、真下の重力の場合、及び中心重力の場合の最速降下線が、いずれも円をころがしてできるサイクロイドであることになるが、そのことは大変興味深い。より一般の状況でも同様のことが言えるのかはわからないが、もしかすると変分法とは別な方法の考察、例えばベルヌーイが行った幾何学的な方法などを用いることで、サイクロイドと最速降下線が自然につながることが易しくわかり、今回の結果なども簡単に示されるのかもしれないが、残念ながら私にはよくわからない。

## 参考文献

- [1] 竹野茂治、「最速降下線について」、<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#cycloid1> (2016)
- [2] 竹野茂治、「等時降下曲線」、<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#cycloid2> (2017)
- [3] 竹野茂治、「地中の最速降下線」、<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#cycloid3> (2016)

- 
- [4] 斎藤基彦、「重力利用の交通」、<http://www.geocities.jp/saitohmoto/physics/tunnel/tunnel.pdf> (2006)