

2022 年 05 月 18 日

# 一定間隔を開けた閉曲線の弧長の差

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

よく、以下のような問題を目にすることがある。

地球全体にロープを 1 周させるとその長さは 4 万 km ほどになる。さらにそのロープ全体を地表から 1m の高さに持ち上げた形にするには、ロープをどれくらい追加しないといけないか。

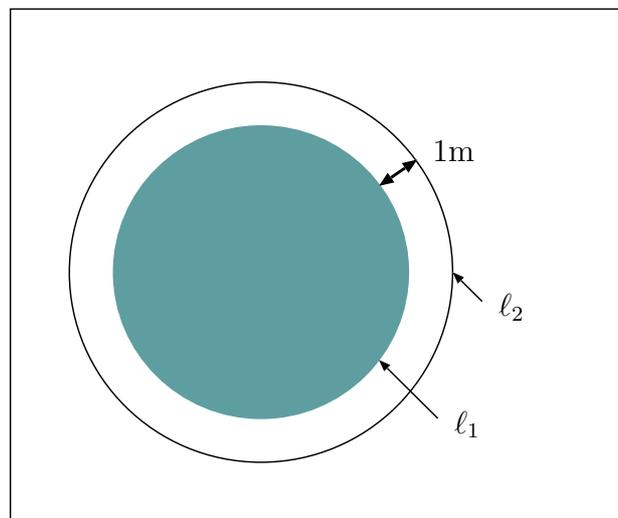


図 1: 地球とロープ

地球スケールだと一見何 km もつぎ足しが必要のように感じられるが、答えは地球の半径には無関係で、実はつぎ足しは  $2\pi \text{ m} = 6.3\text{m}$  ほどでよい。これはそういう意外性を目的とした問題である。

なぜそうなるかという説明は通常、半径  $r$  の円周  $l$  が  $l = 2\pi r$  であることを利用して、以下のように行われているように思う。

地球の半径を  $R \text{ m}$  とすると、最初のロープの長さ  $l_1$  は  $l_1 = 2\pi R \text{ m}$ 、それを 1m 持ちあげると半径が 1m 増えた円になるので、その円周

$l_2$  は  $l_2 = 2\pi(R+1)$  m、よってその差は  $l_2 - l_1 = 2\pi(R+1) - 2\pi R = 2\pi R + 2\pi - 2\pi R = 2\pi$  m となる。

これに対し、以下のような疑問を感じた。

1. 果たしてこの説明で多くの人が納得するのであろうか。
2. 円でない場合はどうなるだろうか。

本稿では、これらについて考察してみる。

## 2 円周の公式による説明

まずは、1. の円周の公式による説明で納得できるのかについて考えてみる。実は私自身あまりよくわかったような気にならないのであるが、そのあたりを考察したい。

まず、半径  $r$  の円  $C_1$  に対して、半径を  $a$  だけ増やした円  $C_2$  の円周の差  $l_2 - l_1$  が、

$$l_2 - l_1 = 2\pi(r+a) - 2\pi r = 2\pi a \quad (1)$$

のように  $r$  によらない値になる理由は、円周  $\ell = 2\pi r$  が  $r$  に比例するから、より正確には  $r$  の 1 次式だからである。

例えば、円周とは違い、 $r$  には比例しない「面積」 $S = \pi r^2$  の差は、

$$S_2 - S_1 = \pi(r+a)^2 - \pi r^2 = \pi(2ra + a^2) \quad (2)$$

のようになって  $r$  は消えず、よって  $r$  が大きくなれば  $(S_2 - S_1)$  も大きくなるので元の問題のような意外性は起きない。

また、次元をあげて円の代わりに球を考えても、球の表面積  $\bar{S} = 4\pi r^2$  はやはり  $r$  には比例しないから表面積の差は

$$\bar{S}_2 - \bar{S}_1 = 4\pi(r+a)^2 - 4\pi r^2 = 4\pi(2ra + a^2)$$

となってこれも  $r$  は消えない。

面積で無理矢理  $r$  を消そうとすれば、単純な差を考える代わりに  $\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}$  を考えれば  $r$  は消えるが、それでは複雑すぎ、作為的すぎて、やはり意外性のある問題にはならないだろう。よって、元の問題のように結果が  $r$  によらないという意外性は、 $r$  に比例する円周の場合だけに起こることになる。

そして、 $r$  によらないことが意外性を生むもうひとつの原因は、円であるがために (1) がわかりにくいことだと思う。すなわち、円周が半径に比例するために成立する式 (1) は、図形的に言えば、 $l_2 - l_1$  が半径  $a$  の円周 ( $l_a$ ) に一致する、ということの意味するが (図 2)、これが簡単には納得しづらい。

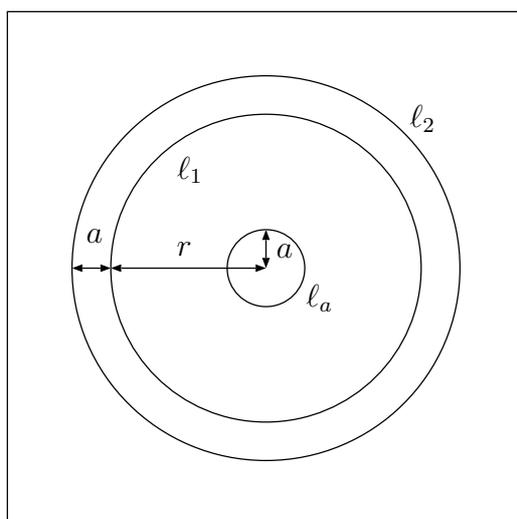


図 2: 円周の差に一致する円

逆にそれが図形的にすんなり受け入れられるのであれば、元の問題の意外性はなくなってしまって、面白い問題として成立しないはずである。では、なぜ (1) が図形的に納得しづらい、すなわち図 2 の一致がわかりにくいのかと言えば、曲率の違いに原因があるのではないかと思う。図 2 の 3 つの円は、曲率、すなわち曲り具合が違うため、ピッタリ重ねることができず、その長さの違いの視覚的な比較、感覚的な理解が容易ではない。

例えば、これが円ではなく、正方形の周長の比較であれば、重ねることが可能なので、容易に比較ができる (図 3)。一辺が  $2r$  の正方形の周長  $\bar{l}_1 = 8r$  に対し、その外側に  $a$  だけ広げた一辺  $(2r + 2a)$  の正方形の周長は  $\bar{l}_2 = 8r + 8a$  となり、その差は  $8a$ 、すなわち一辺  $2a$  の正方形の周長となるが、それは図 3 のように重なる部分の引き算が視覚的に行え、その残りの部分から小さい正方形を再構成できるため、そうなることが感覚的に理解できる。しかしこれと同じことは、曲率が異なる円同士では行えず、それが感覚的な理解をさまたげているのではないかと思う。

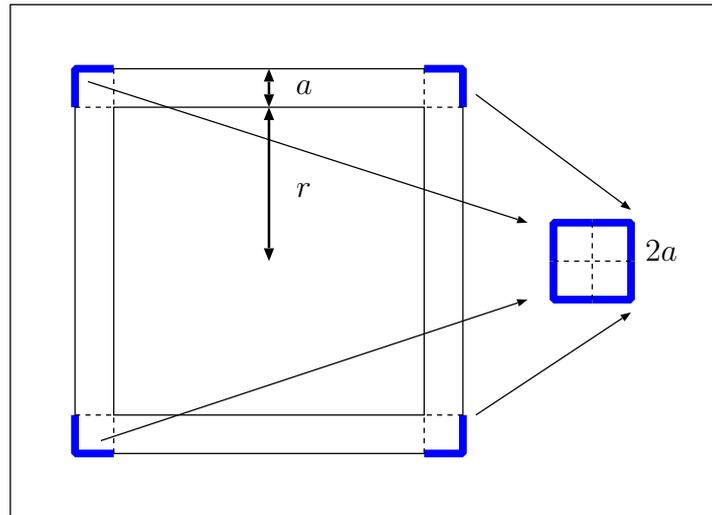


図 3: 正方形の周長の差

ただし、中心角が十分小さな扇形で考えれば (図 4)、円弧はほぼ直線化するので、差の部分と同じ中心角の半径  $a$  の小さい扇形の円弧にほぼ一致すると見ることは可能であるが、円弧は厳密には直線ではないことや、総和の際の誤差の問題、そしてなによりこういう微分的な考察は一般向きではないことを考えると、このような説明で感覚的に理解させるのはだいぶ無理があるように思う。

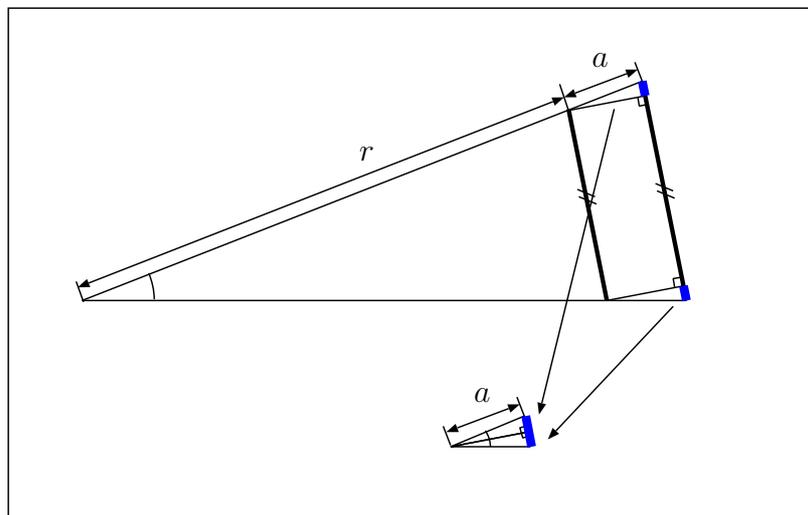


図 4: 中心角が小さな扇形を三角形で近似

となると、元の問題の説明としては、(1) のような計算で示してそれで終わり、というよりも、まず  $l = 2\pi r$  が  $r$  に比例すること、および円と同様に  $r$  に比例する図形である正方形の周長で、図 2 と同様のことが成立することを図 3 で図

形的に説明する方が、むしろ納得しやすいのではないだろうか。

### 3 一般の曲線の場合

次は、2. の一般の曲線の場合はどうなるかを、本節以降で考察する。

円の場合は、外に  $a (> 0)$  だけ距離をあけた曲線は、元の曲線に「相似」な円となるが、一般の曲線の場合は必ずしもそうではない。

例えば、正方形の場合でも、「 $a$  だけ距離を開けた曲線」は、実は前節の相似な正方形ではなく、四隅を円弧に置き換えたものになる (図 5)。

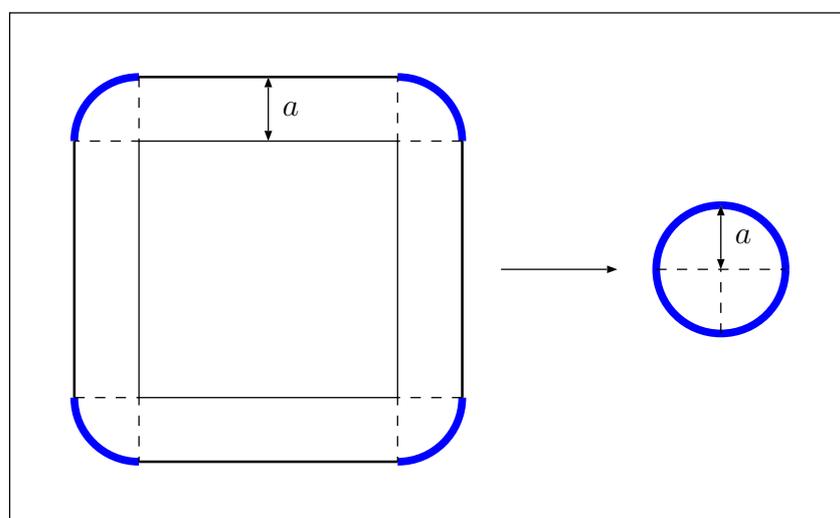


図 5: 正方形から  $a$  だけ距離を開けた曲線

ちなみに、この場合は 2 つの曲線の周長の差は、四隅の円弧の部分になり、そこから半径  $a$  の円が構成できるので  $2\pi a$  となり、円の場合の差 (1) に一致にする。そしてこの値は、実は正方形に限らず、一般の四角形でも、また三角形でも成立する (図 6)。

これがより一般の曲線の場合にも成立するのかを考えてみる。

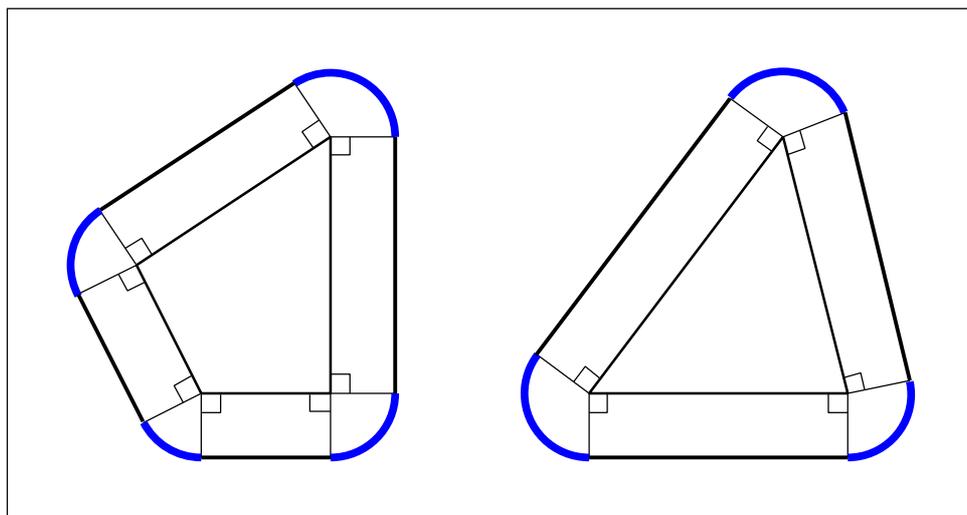


図 6: 一般の四角形、三角形の場合

## 4 元の曲線に対する設定

まず、ある曲線から外に  $a$  という一定間隔をあけた曲線を構成するため、元の曲線に対する設定を行う。

$(x, y)$  平面上の元の閉曲線を  $C_1$  とし、その上の点  $P = P(t)$  が以下のように表されているとする。

$$\overrightarrow{OP(t)} = (x(t), y(t)) = \mathbf{r}(t) \quad (c \leq t \leq d), \quad P(c) = P(d) \quad (3)$$

ここで、 $x(t), y(t)$  は十分滑らかで、

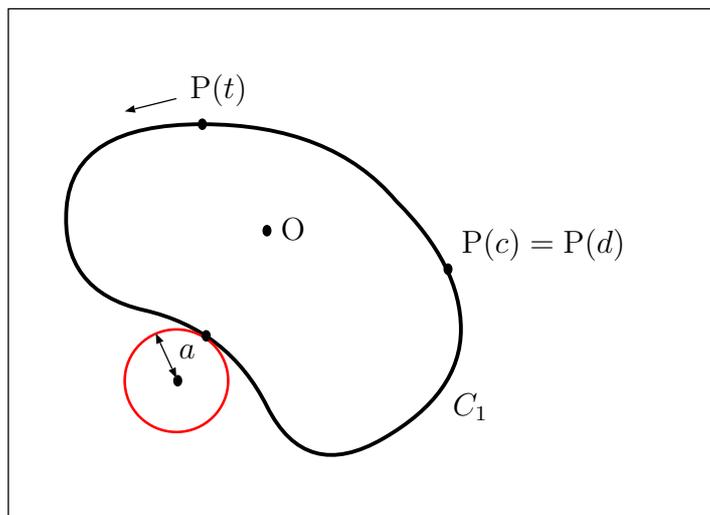
$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0 \quad (c \leq t \leq d) \quad (4)$$

でかつ  $\mathbf{r}'(c) = \mathbf{r}'(d)$  (始点と終点も滑らかにつながる) とする。また、 $C_1$  は交差のない閉曲線で、その内部に原点を含み、 $P(t)$  は  $t$  の増加にともない反時計回り、すなわち  $C_1$  の内部を左に見ながら進むとする。さらに、その曲率

$$\mu = \mu(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\{(x'(t))^2 + (y'(t))^2\}^{3/2}} \quad (5)$$

は、正、すなわち  $t$  の増加に伴ない左方向に曲るか、または負であってもその曲率半径  $-1/\mu$  は  $a$  より大、すなわち、

$$1 + a\mu(t) > 0 \quad (c \leq t \leq d) \quad (6)$$

図 7:  $C_1$ 

が成り立つとする。この条件により、 $C_1$  の外側に  $C_1$  上の点  $P$  で接するような半径  $a$  の円を書いても、その円は  $C_1$  と  $P$  以外では交わることはなく、また  $C_1$  の点から  $a$  の長さの法線を  $C_1$  の外側に伸ばしても、それが他の法線とぶつかることはないので、 $C_1$  から  $a$  だけ離れた曲線を交差のない状態で作ることができるようになる。

なお、 $x(t)$ ,  $y(t)$  が十分滑らかと仮定したが、それにより  $C_1$  として正方形や多角形のような角のある閉曲線は許されないことになるが、その角を小さく丸めることで、それらに十分近いものは含まれる。

## 5 一定間隔をあけた曲線

さて、元の曲線  $C_1$  に対する前節の設定のもとで、 $C_1$  から  $a$  だけ外側に離れた曲線  $C_2$  のパラメータ表示を考える。

まず、 $P(t)$  での外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$  を求める。 $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$  は  $C_1$  の接ベクトルで、 $P(t)$  の進行方向を向く。よって  $C_1$  の外側は  $\mathbf{r}'(t)$  の右側になり、 $\mathbf{n}(t)$  は  $\mathbf{r}'(t)$  を時計回りに  $90^\circ$  回転したベクトル  $\hat{\mathbf{r}}(t) = (y'(t), -x'(t))$  と同じ方向を向くので、

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\hat{\mathbf{r}}(t)}{|\hat{\mathbf{r}}(t)|} = \left( \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, -\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \quad (7)$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{OQ(t)} = \mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) + a\mathbf{n}(t) \quad (c \leq t \leq d) \quad (8)$$

によって定まる  $Q(t)$  の軌跡を  $C_2$  とすると (図 8)、これが  $C_1$  から  $a$  だけ離れた曲線の候補となる。あとは実際に  $C_1$  と  $C_2$  の距離がすべての点で  $a$  となることを示せばよい。

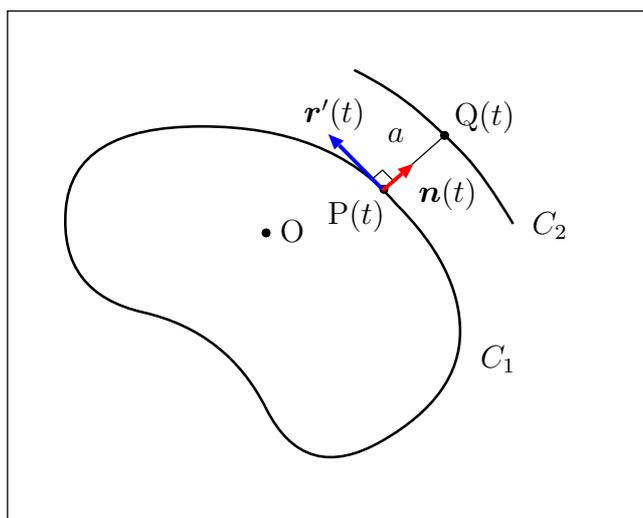


図 8:  $Q(t)$  の軌跡  $C_2$

まず、 $\overrightarrow{P(t)Q(t)} = a\mathbf{n}(t)$  が、 $P(t)$  で  $C_1$  に垂直だけでなく、 $Q(t)$  で  $C_2$  にも垂直であることを示す。そのためには、 $C_2$  の  $Q(t)$  での接ベクトル

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{r}'(t) + a\mathbf{n}'(t) \quad (9)$$

が  $\mathbf{n}(t)$  と垂直であることを示せばよい。

$\mathbf{n}$  と  $\mathbf{r}'$  は垂直なので、(9) よりあとは  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{n}'$  が垂直であることを示せばよいが、 $|\mathbf{n}|^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  なので、これを  $t$  で微分すれば、

$$0 = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$$

となり、よって  $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}'$  がわかる。これで、 $\overrightarrow{P(t)Q(t)}$  が、 $Q(t)$  で  $C_2$  にも垂直であることがわかった。

これを用いて、 $P(t)$  と  $C_2$  上の点で最短距離にあるのが  $Q(t)$  であることを示す。逆に、 $Q(t)$  以外に  $C_2$  上に  $P(t)$  との距離がより近い点  $Q(s)$  があつたとする ( $t \neq s$ )。もし、 $Q(s)$  で  $\overrightarrow{P(t)Q(s)}$  が  $C_2$  と垂直でなければ、 $Q(s)$  の付近で、より  $P(t)$  に近い点が取れることになるので、そのようにしてより近い点を探していけば、最後にその付近では  $P(t)$  と最も近い  $C_2$  上の点  $Q(s')$  が取れて、 $Q(s')$  では  $\overrightarrow{P(t)Q(s')}$  が  $C_2$  と垂直になるはずである。この  $s'$  を改めて  $s$  とする (図 9)。

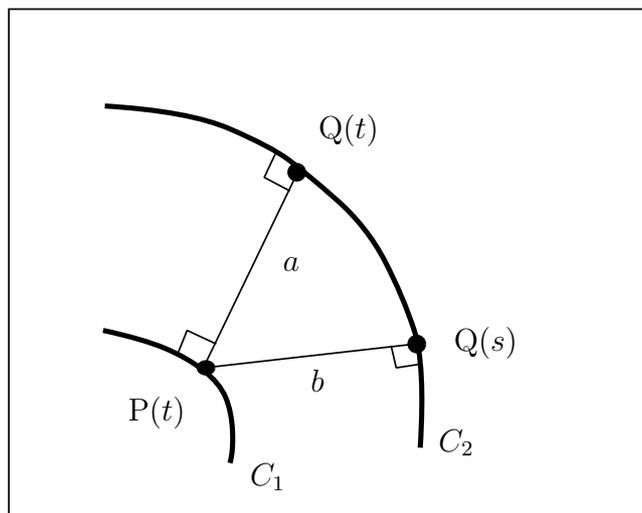


図 9:  $C_2$  の点  $Q(s)$

すなわち、

$$|\overrightarrow{P(t)Q(s)}| = b < a, \quad \overrightarrow{P(t)Q(s)} \perp C_2 \text{ (} Q(s) \text{ で)} \quad (10)$$

となる ( $t \neq s$ )。一方、前に示したことにより、 $Q(s)$  で  $\overrightarrow{P(s)Q(s)}$  と  $C_2$  は垂直なので、 $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $P(t)$  は一直線上にあることになるが、(10) および  $|\overrightarrow{P(s)Q(s)}| = a$  よりその位置関係は、 $P(t)$  が線分  $P(s)Q(s)$  の上にあるか、または  $Q(s)$  が線分  $P(s)P(t)$  の上にあるかのいずれかとなる。前者の場合は、 $P(t)$  が、 $P(s)$  で  $C_1$  に外接する半径  $a$  の円の中に含まれてしまうことになるので、それは曲率に関する仮定 (6) (の下に書いたこと) に反することになる。

また、後者の場合は、 $P(t)$  と  $P(s)$  の距離は  $a+b$  で、 $P(t)$  は  $P(s)$  での  $C_1$  の外向きの法線の上にあることになる。となればやはり  $P(t)$  が、 $P(s)$  で  $C_1$  に外接する半径  $a$  の円の中に含まれてしまうことになるので、同じ仮定 (6) (の下に書いたこと) に反することになる。よってそれらはいずれも起こりえず、結局  $P(t)$  と  $C_2$  上の点で最短距離にあるのが  $Q(t)$  であることがわかり、すなわちすべての点で  $C_1$  と  $C_2$  との最短距離が  $a$  であることが示されたことになる。

## 6 弧長の差

次は、 $C_1$  の弧長  $l_1$  と  $C_2$  の弧長  $l_2$  との差  $\Delta l = l_2 - l_1$  を計算する。

(3), (8) より、

$$\Delta l = \int_c^d |\mathbf{q}'(t)| dt - \int_c^d |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_c^d |\mathbf{r}'(t) + a\mathbf{n}'(t)| dt - \int_c^d |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (11)$$

となるが、(9) の下の議論で見たように  $\mathbf{q}'(t)$  は  $\mathbf{n}(t)$  と垂直、すなわち  $\mathbf{r}'(t)$  と平行になるので、 $\mathbf{q}'(t) = m(t)\mathbf{r}'(t)$  のように書けるはずである。この  $m(t)$  を求める。(7) より、

$$\mathbf{n}'(t) = \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}(t)}{|\hat{\mathbf{r}}(t)|} \right)' = \frac{\hat{\mathbf{r}}'|\hat{\mathbf{r}}| - \hat{\mathbf{r}}|\hat{\mathbf{r}}'|}{|\hat{\mathbf{r}}|^2}$$

であるが、

$$|\hat{\mathbf{r}}'| = \left( \sqrt{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}} \right)' = \frac{2\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}{2\sqrt{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}{|\hat{\mathbf{r}}|}$$

なので、

$$\mathbf{n}'(t) = \frac{\hat{\mathbf{r}}'|\hat{\mathbf{r}}| - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')/|\hat{\mathbf{r}}|}{|\hat{\mathbf{r}}|^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}}'|\hat{\mathbf{r}}|^2 - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')}{|\hat{\mathbf{r}}|^3}$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{r}} = (y', -x')$  より、

$$|\hat{\mathbf{r}}| = |\mathbf{r}'|, \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = (y', -x') \cdot (y'', -x'') = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''$$

となるので、 $\mathbf{n}'$  の分子を  $\hat{\mathbf{r}}'|\hat{\mathbf{r}}|^2 - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = (X, Y)$  とすると、

$$\begin{aligned} X &= |\mathbf{r}'|^2 y'' - y'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'') = ((x')^2 + (y')^2)y'' - y'(x'x'' + y'y'') \\ &= (x')^2 y'' - y'x'x'' = x'(x'y'' - x''y'), \\ Y &= -|\mathbf{r}'|^2 x'' + x'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'') = -((x')^2 + (y')^2)x'' + x'(x'x'' + y'y'') \\ &= -(y')^2 x'' + x'y'y'' = y'(x'y'' - x''y') \end{aligned}$$

となる。よって  $(X, Y) = (x'y'' - x''y')\mathbf{r}'$  となり、(5) より

$$\mathbf{n}'(t) = \frac{(X, Y)}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{|\mathbf{r}'|^3} \mathbf{r}' = \mu \mathbf{r}' \quad (12)$$

となることがわかる。よって、 $\mathbf{q}' = \mathbf{r}' + a\mathbf{n}' = (1 + a\mu)\mathbf{r}'$  となり、(6) より  $|\mathbf{q}'| = (1 + a\mu)|\mathbf{r}'|$  だから、結局 (11) は、

$$\Delta\ell = \int_c^d (1 + a\mu)|\mathbf{r}'|dt - \int_c^d |\mathbf{r}'|dt = a \int_c^d \mu|\mathbf{r}'|dt = a \int_c^d \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (13)$$

と書けることになる。

## 7 偏角積分

あとは、(13) より、

$$I = \int_c^d \mu(t)|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_c^d \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (14)$$

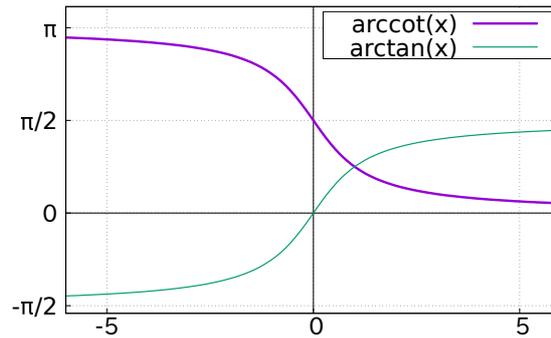
の積分を計算すればよい。この積分の不定積分を  $J$  と書くことにする。

仮定 (4) より、 $(x')^2 + (y')^2$  は常に正なので、 $x'(t) \neq 0$  である  $t$  の範囲  $U$  ( $[c, d]$  の開部分集合) と、 $y'(t) \neq 0$  である  $t$  の範囲  $V$  ( $[c, d]$  の開部分集合) は  $U \cup V = [c, d]$  となるが、 $t \in U$  の範囲で (14) を積分すると、

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} dt = \int \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2} \frac{1}{1 + (y'/x')^2} dt \\ &= \int \left(\frac{y'}{x'}\right)' \frac{1}{1 + (y'/x')^2} dt = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) + C \end{aligned} \quad (15)$$

となる。同様に、 $t \in V$  の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x'y'' - x''y'}{(y')^2} \frac{1}{1 + (x'/y')^2} dt = - \int \left(\frac{x'}{y'}\right)' \frac{1}{1 + (x'/y')^2} dt \\ &= \operatorname{arccot}\left(\frac{x'}{y'}\right) + C \end{aligned} \quad (16)$$

図 10:  $\operatorname{arccot} x$ ,  $\operatorname{arctan} x$ 

となる。ここで、 $\theta = \operatorname{arccot} x$  は値域は  $0 < \theta < \pi$ 、定義域は実数全体の減少関数で、 $\operatorname{arccot}(-\infty) = \pi$ 、 $\operatorname{arccot}(\infty) = 0$ 、 $\operatorname{arccot} 0 = \pi/2$  となる。 $\operatorname{arccot} x = \pi/2 - \operatorname{arctan} x$  となることも容易にわかる。

$x \neq 0$  に対し、 $\operatorname{arccot}(1/x) = \alpha$  とすると、 $\cot \alpha = 1/x$  より  $\tan \alpha = x$  となるが、 $x < 0$  では  $\pi/2 < \alpha < \pi$ 、 $x > 0$  では  $0 < \alpha < \pi/2$  なので、よって

$$\operatorname{arccot} \frac{1}{x} = \operatorname{arctan} x + \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ \pi & (x < 0) \end{cases} \quad (17)$$

となる。ただし、 $\operatorname{arctan}(y'(t)/x'(t))$  も  $\operatorname{arccot}(x'(t)/y'(t))$  も  $I$  の滑らかな原始関数にはならない。

今、 $\phi(t)$  をベクトル  $\mathbf{r}'(t)$  の偏角とする:

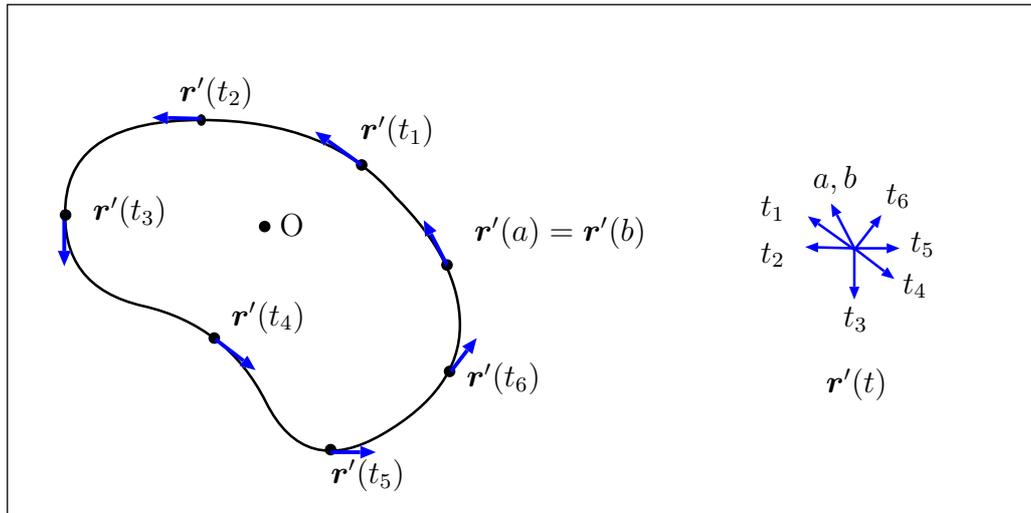
$$x'(t) = R(t) \cos \phi(t), \quad y'(t) = R(t) \sin \phi(t) \quad (R(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0) \quad (18)$$

ただし、 $\phi(t)$  は  $[0, 2\pi)$  の範囲には制限せず、 $c \leq t \leq d$  で滑らかに変化するように取り、よって  $2\pi$  を越えたり負になったりしてもよいとする。

$C_1$  に交差はなく、また  $t$  に伴って  $\mathbf{r}'(t)$  は  $C_1$  を左回りに進むので、終点では  $\mathbf{r}'(t)$  は始点より 1 回転反時計回りに回っていることになり (図 11)、よって始点と終点の偏角の差は

$$\phi(d) = \phi(c) + 2\pi \quad (19)$$

となる。

図 11:  $\mathbf{r}'$  の回転

(18) より  $U$  では  $\tan \phi(t) = y'(t)/x'(t)$ ,  $V$  では  $\cot \phi(t) = x'(t)/y'(t)$  なので、 $t \in U$  で  $-\pi/2 + n\pi < \phi(t) < \pi/2 + n\pi$  の範囲では

$$\phi(t) = \arctan \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) + n\pi$$

となり、 $t \in V$  で  $n\pi < \phi(t) < (n+1)\pi$  の範囲では

$$\phi(t) = \operatorname{arccot} \left( \frac{x'(t)}{y'(t)} \right) + n\pi$$

となる。よって、(15), (16) より、すべての  $t \in U \cup V = [c, d]$  に対して

$$\phi'(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} = \mu(t)|\mathbf{r}'(t)| \quad (20)$$

となり、よってこの偏角  $\phi(t)$  が (14) の  $I$  の滑らかな原始関数であることがわかる。よって、(19) より

$$I = [\phi(t)]_c^d = \phi(d) - \phi(c) = 2\pi$$

と  $I$  が求まり、結局 (13) の  $\Delta l$  は  $2\pi a$  となること、すなわち一般の閉曲線の場合でも  $a$  だけ離れた閉曲線との弧長の差は  $2\pi a$  となることがわかった。

## 8 最後に

本稿では、よく目にする  $a$  だけ離れた円周の弧長の差の問題について考察した。後半の  $\Delta l = 2\pi a$  の結果については、多分微分幾何学分野では良く知られている事実だと思う。

ただ、4, 5 節のような幾何学的な考察はあまり得意ではないので自信はなく、議論に穴があるような気がする。また、(19) で交差のない滑らかな閉曲線については  $r'$  の回転は 1 としたが、このあたりも詳しくはないので、もしかしたらそうでない場合もあるのかもしれない。もし誤りがあればご指摘頂ければと思う。

## 参考文献

- [1] 竹野茂治、「曲率半径について」 (2009)  
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/curve1.pdf>