

2025 年 05 月 29 日

周期関数に関する補足・証明

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

講義のフーリエ級数で周期関数について説明したが、それに関する補足や省略した命題の証明などをここに記す。

2 周期関数の定義について

講義のフーリエ級数では、周期関数を以下のように定義した。

定義 1

実数全体で定義された区分的連続関数 $f(x)$ が周期 T ($T \neq 0$) を持つ周期関数であるとは、すべての x に対して $f(x+T) = f(x)$ が成り立つこと。

なお、 $f(x)$ が区分的連続関数とは、 $f(x)$ の不連続点集合 A が離散的、すなわち集積点を持たず (収束する点列を含まない)、 A の各点 x で、両側の極限值

$$f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$$

が存在するような関数のことを言う。

しかし、定義 1 は、通常の周期関数の定義とは若干異なる部分もあるので、注意が必要。

[ア] 定義 1 は「実数全体で定義された」「区分的連続関数」と断わっているので、例えば通常は周期関数として扱う $\tan x$ のような、定義できない点を含むような関数や有界でない関数が含まれないことになる。

[イ] 定義 1 は「すべての x に対して」 $f(x+T) = f(x)$ が成り立つことを要請しているが、区分的連続関数を含む不連続関数では、不連続点での値は定義しない (あまり考えない) ことも少なくない。特にルベグ積分で周期関数を扱う場合は、区分的連続関数であっても不連続点での値を定めることはあまり意味がない。

まず、[ア] の $\tan x$ に関しては、定義 1 を以下のいずれかのように変えれば解消できる。

定義 2

実数全体から離散的な点を除いて定義された関数 $f(x)$ が周期 T ($T \neq 0$) を持つ周期関数であるとは、すべての x に対して $f(x+T) = f(x)$ が成り立つこと。ただし、左辺か右辺の一方が定義されない場合は、両辺ともに定義されない状態であることとし、その意味で等号が成立すると見る。

定義 3

実数全体から離散的な点を除いて定義された関数 $f(x)$ が周期 T ($T \neq 0$) を持つ周期関数であるとは、ある離散的な集合外のすべての x に対して $f(x+T) = f(x)$ が成り立つこと。ただし、前者の「離散的」な集合と後者の「離散的」な集合は一致する必要はない (後者が前者を含む)。

$\tan x$ が周期 π の周期関数である、というのは、多分通常は暗黙のうちに定義 2 を採用しているのではないかとと思われる。

定義 2 と定義 3 は同値ではなく、定義 2 の意味の周期関数は、定義 3 でも周期関数となるが、定義 3 の意味の周期関数は、定義 2 では周期関数となるとは限らない。例えば $\tan x$ に対して $x = \pi/2$ でのみ 0 と定義し改変した関数は定義 3 は満たすが、定義 2 は満たさない。

当然定義 1 の方が、定義 2、定義 3 よりも課する条件が強いので、定義 1 の意味の周期関数は、定義 2、定義 3 でも周期関数となる。

また、[イ] の不連続点の扱いについては、定義 2 のようにその点では不連続という状態が同じとみたり、定義 3 のようにその点を除外して定義するという手がある。

定義 4

実数全体から離散的な点を除いて定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ が周期 T ($T \neq 0$) を持つ周期関数であるとは、すべての x に対して $f(x+T) = f(x)$ が成り立つこと。ただし、不連続点では両辺ともに不連続、という状態であることとし、その意味で等号が成立すると見る。

定義 5

実数全体から離散的な点を除いて定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ が周期 T ($T \neq 0$) を持つ周期関数であるとは、ある離散的な集合外のすべての x に対して $f(x+T) = f(x)$ が成り立つこと。ただし、前者の「離散的」な集合と後者の「離散的」な集合は一致する必要はない (後者が前者を含む)。

これらのように定義すれば、 $\tan x$ は含まないが、不連続点での値は考える必要はなくなる（定義もしなくてよい）。なおこれも、定義 4 の方が定義 5 よりも若干条件が強いので、定義 5 は満たすが、定義 4 は満たさない関数が存在する。

なお、ルベーグ積分で考える場合は、いっそ「0 集合を除いて $f(x+T) = f(x)$ が成立」としてしまふのが楽であるが、それは本稿の範囲を越えるので省略する。

3 基本周期が存在しない関数

周期関数 $f(x)$ の基本周期は以下のように定義した。

定義 6

周期関数 $f(x)$ の正の周期のうち最小値 $T_0(> 0)$ が存在する場合、それを $f(x)$ の基本周期と呼び、 $\text{Per}(f) = T_0$ と書く。

この「存在する」とは、「正の周期のうちの最小値」の存在のことを指している。例えば $f(x) = \sin x$ であれば、正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ なので、最小値は 2π となる。

逆にその最小値が存在しない状態とは、正だがいくらでも小さい周期が存在する、という状態を指す。そのような例は、区分的連続関数の範疇には存在しないが、区分的連続性を除いた定義 2 の元では、正のいくらでも小さい周期を持つ関数を作ることができる。

例

関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数のとき}) \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

とし（ディリクレの関数とも呼ばれる）、 T を任意の 0 でない有理数とすると、 x が有理数なら $x+T$ も有理数なので $f(x) = f(x+T) = 1$ 、 x が無理数なら $x+T$ も無理数なので $f(x) = f(x+T) = 0$ となり、よって定義 2 の元では、任意の有理数 T がこの関数の周期となるので、正のいくらでも小さい周期が存在し、この $f(x)$ が定数ではないが、基本周期を持たない例となる。

なお、この $f(x)$ はすべての x で連続ではなく、0 と 1 の値を非常に激しく振動しながら取る関数になる。

このように一般の不連続関数まで許せば、定義 2 の元では基本周期が存在しない関数が作れるが、一方で区分的連続性を課した定義 1 の元では、このようなことは起きないことが示される。

命題 3.1

定義 1 の元では、基本周期を持たない周期関数は、実質的に定数、すなわち離散的な点を除いてある定数関数に一致する。

証明

$f(x)$ が区分的に連続で、 $T_1 > T_2 > T_3 > \dots$ が $f(x)$ の周期であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$ とする。

$f(x)$ の連続点 a, b ($a < b$) を任意に取る。 $(b-a)/T_n$ の整数部分を m_n 、小数部分を p_n とする ($0 \leq p_n < 1$)。このとき $b-a = m_n T_n + p_n T_n$ で、 T_n は $f(x)$ の周期だから

$$f(b) = f(a + m_n T_n + p_n T_n) = f(a + p_n T_n)$$

となる。ここで、 $0 \leq p_n < 1$ より $0 \leq p_n T_n < T_n$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n T_n = 0$ となり、 $f(x)$ は a で連続なので、

$$f(b) = f(a + p_n T_n) \rightarrow f(a)$$

となる。よって $f(b) = f(a)$ が成り立ち、 $f(x)$ は連続点ですべて同じ値を取ることであり、よって、離散的な点を除いて $f(x)$ は定数となる。■

なお、この証明では、 $f(x+T) = f(x)$ の成立をすべての x で、と見たが、定義 4, 定義 5 のように $f(x)$ の連続点でのみ成立する、としても同じことが示される。それは、上の証明の

$$f(a + m_n T_n + p_n T_n) = f(a + p_n T_n)$$

の箇所で、 $b = a + m_n T_n + p_n T_n$ は $f(x)$ の連続点であり、よって、 $a + p_n T_n$ が $f(x)$ の連続点でないような n を除外して考えればよいからである。それにより除外されない n が無限個存在する必要があるが、 $B = \{a + p_n T_n\}$ とすると

- ひとつでも $p_n = 0$ となる n がある場合、その n に対し $a + p_n T_n = a$ だから $f(b) = f(a)$ が成立する。

- すべての n で $p_n \neq 0$ の場合、 B は (重複はあるかもしれないが) 無限集合で a に収束する点列なので、区分的連続の仮定によりその中に $f(x)$ の不連続点が無限個含まれることはない。よって a に収束し $f(x)$ の連続点であるような B の無限部分列を取ることができ、その n に対しては $f(b) = f(a + p_n T_n)$ が成立し、よってその極限により $f(b) = f(a)$ が得られる。

よって、定義 4, 定義 5 の元でも命題 3.1 が成立することがわかる。

4 周期の構造

基本周期を持つ周期関数の周期全体は、次のような形になる。

命題 4.1

$\text{Per}(f) = T_0 > 0$ のとき、 f の周期全体の集合 $A = \{T; T \text{ は } f \text{ の周期}\}$ は、 $A = \{nT_0; n \text{ は整数}\}$ となる。

証明

T_0 は f の周期なので、 T_0 の整数倍も f の周期であり、よって T_0 の整数倍はすべて A に含まれる。

逆に、 T_0 の整数倍ではない周期 T が存在すると、 T/T_0 は整数ではないので、

$$\frac{T}{T_0} = m + q, \quad m \text{ は整数}, \quad 0 < q < 1$$

と書けるが、 $T = mT_0 + qT_0$ となり、 T, T_0 は f の周期なので、

$$f(x + qT_0) = f(x + T - mT_0) = f(x - mT_0) = f(x)$$

となり、よって qT_0 も f の周期になる。 $0 < qT_0 < T_0$ なので、これは T_0 が f の最小の正の周期であることに反する。よって、 T_0 の整数倍ではない周期 T は存在せず、 $A = \{nT_0; n \text{ は整数}\}$ となる。■

5 周期関数の導関数

周期関数 $f(x)$ が微分可能なとき、その導関数も周期関数となり、次のことも言える。

命題 5.1

基本周期を持つ周期関数 $f(x)$ が微分可能で、その導関数 $f'(x)$ がまた区分的連続であるとき、 $f'(x)$ も周期関数で、 $\text{Per}(f') = \text{Per}(f)$ となる。

証明

$T_0 = \text{Per}(f) > 0$ とする。 $f(x + T_0) = f(x)$ がすべての x について成り立つので、この両辺を微分すれば $f'(x + T_0) = f'(x)$ となり、よって $f'(x)$ も周期関数で T_0 は $f'(x)$ の周期のひとつであることがわかる。

次に $\text{Per}(f')$ を考える。まず $f'(x)$ の基本周期がないとすると、命題 3.1 より $f'(x)$ は定数でなくてはならず、よって $f(x)$ は定数かまたは 1 次関数となるが、そのいずれも基本周期を持つ周期関数にはならず、仮定に反する。よって $f'(x)$ は基本周期を持つ。

今、 $\text{Per}(f') = T > 0$ とすると、 T_0 も $f'(x)$ の正の周期だから、命題 4.1 より T_0/T は正の整数となり、 $T_0 = mT$ と書ける (m は自然数)。すべての x に対し $f'(x + T) = f'(x)$ なので、この両辺を積分すると、 $f(x + T) = f(x) + a$ (a は定数) となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x + T_0) &= f(x + mT) = f(x + (m-1)T) + a = f(x + (m-2)T) + 2a \\ &= \cdots = f(x) + ma \end{aligned}$$

となるが、 $f(x + T_0) = f(x)$ なので、 $ma = 0$ となり、よって $a = 0$ となるから、すべての x で $f(x + T) = f(x)$ が成り立つことになる。

つまり $T(> 0)$ は f の周期となり、命題 4.1 より $T/T_0 = 1/m$ は整数になるから $m = 1$ であることがわかり、よって $T = T_0$ 、すなわち $\text{Per}(f') = \text{Per}(f)$ が示された。■