平成 13 年 6 月 08 日

連続分布の確率変数の独立性条件

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

連続分布の場合、次の 3 つは同値

定理 1

(1) x と y は独立

(2) $F(x,y)=G(x)H(y)$ $\quad$ ($F(x,y),G(x),H(y)$: それぞれ $(x,y),x,y$ の分布関数)

(3) $f(x,y)=g(x)h(y)$ $\quad$ ($f(x,y),g(x),h(y)$: それぞれ $(x,y),x,y$ の密度関数)

なお、(1) の定義は次の通り。

定義 2

連続分布に従う x と y が **独立** であるとは、任意の実数 $a\leq b,\ c\leq d$ に対して

$$\mathrm{Prob}\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}=\mathrm{Prob}\{a\leq x\leq b\}\mathrm{Prob}\{c\leq y\leq d\}$$

となること。

証明
(1) $\Longrightarrow$ (2)
任意の $a\leq b,\ c\leq d$ に対して

$$\mathrm{Prob}\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}=\mathrm{Prob}\{a\leq x\leq b\}\mathrm{Prob}\{c\leq y\leq d\}$$

であり、一方、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}\{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)\\&\mathrm{Prob}\{a\leq x\leq b\}=G(b)-G(a)\\&\mathrm{Prob}\{c\leq y\leq d\}=H(d)-H(c)\end{aligned}$$

なので

$$F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)=\{G(b)-G(a)\}\{H(d)-H(c)\}$$

ここで $a\rightarrow-\infty$ とすると

$$\begin{aligned}&G(a)=\mathrm{Prob}\{x\leq a\}\rightarrow 0,\\&F(a,d)=\mathrm{Prob}\{x\leq a,\ y\leq d\}\leq\mathrm{Prob}\{x\leq a\}\rightarrow 0\ \text{より}\ F(a,d)\rightarrow 0,\\&F(a,c)=\mathrm{Prob}\{x\leq a,\ y\leq c\}\leq\mathrm{Prob}\{x\leq a\}\rightarrow 0\ \text{より}\ F(a,c)\rightarrow 0\end{aligned}$$

となるので

$$F(b,d)-F(b,c)=G(b)\{H(d)-H(c)\}$$

となる。同様に $c \to -\infty$ とすると $H(c) \to 0$, $F(b,c) \le H(c)$ より $F(b,c) \to 0$ となり、結局

$$F(b,d) = G(b)H(d)$$

となる。b, d は任意なので (2) がいえたことになる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)

$$f(x,y) = F_{xy}(x,y) = \{G(x)H(y)\}_{xy} = \{G'(x)H(y)\}_y = G'(x)H'(y) = g(x)h(y)$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}\{a \le x \le b,\ c \le y \le d\} \\
&\quad = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \\
&\quad = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)dxdy \quad (h(y) \text{ は } x \text{ に関して定数}) \\
&\quad = \int_c^d h(y)\left\{\int_a^b g(x)dx\right\}dy \quad \left(\int_a^b g(x)dx \text{ は } y \text{ に関して定数}\right) \\
&\quad = \left\{\int_a^b g(x)dx\right\}\left\{\int_c^d h(y)dy\right\} \\
&\quad = \mathrm{Prob}\{a \le x \le b\}\mathrm{Prob}\{c \le y \le d\}
\end{aligned}$$

∎