

2025 年 07 月 25 日

フーリエ変換の離散化が逆変換対応となる条件

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

フーリエ解析の講義で、フーリエ変換とフーリエ逆変換の離散化

$$F(s_n) = \alpha \sum_{k=0}^{L-1} f(x_k) e^{-s_n x_k} \Delta x \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (1)$$

$$f(x_k) = \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} F(s_n) e^{s_n x_k} \Delta s \quad (0 \leq k \leq L-1) \quad (2)$$

$$(s_n = n\Delta s, x_k = k\Delta x, \alpha > 0, \Delta s > 0, \Delta x > 0)$$

に対して、 $\{f(x_k)\}$ から (1) で $\{F(s_n)\}$ を計算し、(2) で更に $\{f(x_k)\}$ を計算したときに元の $\{f(x_k)\}$ に戻る条件 I、及び $\{F(s_n)\}$ から (2) で $\{f(x_k)\}$ を計算し、(1) で更に $\{F(s_n)\}$ を計算したときに元の $\{F(s_n)\}$ に戻る条件 II を証明なしで紹介したが、本稿でそれらの証明を行う。

2 行列化

まずは (1), (2) を行列化する。

$$X = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{L-1}) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} F(s_0) \\ F(s_1) \\ \vdots \\ F(s_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

に対し、(1), (2) は、

$$Y = \alpha \Delta x A X, \quad X = \frac{\Delta s}{2\pi\alpha} B Y \quad (4)$$

と書ける。ここで、 A, B は、

$$A = \begin{bmatrix} e^{-s_0 x_0 i} & \dots & e^{-s_0 x_{L-1} i} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-s_{N-1} x_0 i} & \dots & e^{-s_{N-1} x_{L-1} i} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e^{s_0 x_0 i} & \dots & e^{s_{N-1} x_0 i} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{s_0 x_{L-1} i} & \dots & e^{s_{N-1} x_{L-1} i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

であり、 $B = {}^t \overline{A}$ でもある。

これにより条件 I は、任意の X に対し、

$$\left(\frac{\Delta s}{2\pi\alpha} B \right) (\alpha \Delta x A X) = X$$

となること、すなわち

$$BA = \frac{2\pi}{\Delta s \Delta x} E \quad (E \text{ は単位行列}) \quad (6)$$

となることを意味し、条件 II は、任意の Y に対して

$$(\alpha \Delta x A) \left(\frac{\Delta s}{2\pi\alpha} B Y \right) = Y$$

すなわち

$$AB = \frac{2\pi}{\Delta x \Delta s} E \quad (7)$$

となることを意味する。

3 条件 I

線形代数学で、次の事が知られている。

定理 1. A が $m \times n$ 行列、 B が $n \times m$ 行列のとき、 AB は $m \times m$ 行列で、その行列式は

$$|AB| = \begin{cases} 0 & (m > n \text{ のとき}) \\ |A||B| & (m = n \text{ のとき}) \\ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} |A_{(j_1, \dots, j_m)}| |B^{(j_1, \dots, j_m)}| & (m < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。ここで、 $A_{(j_1, \dots, j_m)}$ は A の $j_1, \dots, j_m$ 列からなる小行列、 $B^{(j_1, \dots, j_m)}$ は B の $j_1, \dots, j_m$ 行からなる小行列。

まず、条件 I を考える。 B は $L \times N$ 行列、 A は $N \times L$ 行列で、(6) が成り立つとすると右辺の行列式は 0 でないので、よって定理 1 より

$$N \geq L \quad (8)$$

でなければいけないことがわかる。また、 BA の (j, k) 成分を $p_{j,k}$ とすると、

$$p_{j+1,k+1} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{s_n x_j} e^{-s_n x_k} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{n \Delta s (j-k) \Delta x} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ e^{(j-k) \Delta s \Delta x} \right\}^n \quad (9)$$

となるから、その対角成分は

$$p_{j+1,j+1} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \quad (10)$$

となる。よって、(6) が成り立つならば

$$N \Delta s \Delta x = 2\pi \quad (11)$$

であることになる。

逆に、(8) と (11) が満たされると (6) が得られることを次に示す。

(8), (11) より、 $0 \leq j, k \leq L-1$ に対して、

$$|(j-k) \Delta s \Delta x| \leq (L-1) \Delta s \Delta x = 2\pi \frac{L-1}{N} < 2\pi$$

となるので、 $e^{(j-k) \Delta s \Delta x} = 1$ となるのは $j = k$ のときのみ。よって、 BA の成分は、対角成分は (10) より N に等しく、 $j \neq k$ のときは (9), (11) より、

$$p_{j+1,k+1} = \frac{e^{(j-k)N \Delta s \Delta x} - 1}{e^{(j-k) \Delta s \Delta x} - 1} = \frac{e^{2\pi(j-k)} - 1}{e^{2\pi(j-k)/N} - 1} = 0$$

となる。よって、(11) より、

$$BA = NE = \frac{2\pi}{\Delta s \Delta x} E$$

となって (6) が得られる。

すなわち、条件 I は、「(8) かつ (11)」であることがわかる。

4 条件 II

条件 II も条件 I とほぼ同様であり、(7) が成り立てば、定理 1 より

$$L \geq N \quad (12)$$

が必要で、 AB の $q_{m+1,n+1}$ 成分は

$$q_{m+1,n+1} = \sum_{k=0}^{L-1} e^{-s_m x_k i} e^{s_n x_k i} = \sum_{k=0}^{L-1} \left\{ e^{(n-m)\Delta s \Delta x i} \right\}^k \quad (13)$$

なので、対角成分は

$$q_{m+1,m+1} = \sum_{k=0}^{L-1} 1 = L \quad (14)$$

となって、よって (7) が成り立てば

$$L \Delta s \Delta x = 2\pi \quad (15)$$

となる。逆に、(12) と (15) が満たされれば、 $0 \leq m, n \leq N-1$ に対して

$$|(n-m)\Delta s \Delta x| \leq (N-1)\Delta s \Delta x = 2\pi \frac{N-1}{L} < 2\pi$$

なので対角成分以外では (13) の公比は 1 ではなく、 $m \neq n$ に対し、(15) より

$$q_{m+1,n+1} = \frac{e^{(n-m)L\Delta s \Delta x i} - 1}{e^{(n-m)\Delta s \Delta x i} - 1} = \frac{e^{2\pi(n-m)i} - 1}{e^{2\pi(n-m)i/L} - 1} = 0$$

となるので、(15) より

$$AB = LE = \frac{2\pi}{\Delta s \Delta x} E$$

となって (7) が得られる。

よって、条件 II は 「(12) かつ (15)」 であることがわかる。

結果として、条件 I, 条件 II の両方を満たすのは、

$$N = L = \frac{2\pi}{\Delta s \Delta x} \quad (16)$$

のときになり、この場合 (1), (2) は、 $\alpha = 1/(N\Delta x)$ とすれば、

$$F(s_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) e^{-2\pi n k i / N}, \quad f(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(s_n) e^{2\pi n k i / N} \quad (17)$$

となる。これらをそれぞれ「**離散フーリエ変換 (DFT)**」「**離散フーリエ逆変換 (IDFT)**」と呼ぶ。なお、 α は $\alpha = 1/\Delta x$ と取る流儀もあり、その場合は $1/N$ は DFT ではなく IDFT の方につくことになる。

5 最後に

工学の教科書では DFT と IDFT の説明では、通常フーリエ変換の離散化、あるいは複素フーリエ級数の離散化として説明されているが、なぜその形であるのかという強い理由は書かれておらず、フーリエ変換や複素フーリエ級数の形に「似ている」「それなりに対応している」ことだけが説明されていることが多いようである。

それに対し、フーリエ変換とフーリエ逆変換を離散化したものが、正しく逆変換になるものが丁度 DFT と IDFT である、ということを理由付けているのが本稿の内容であり、その意味では本稿もそれなりに意味があるのではないかと思う。