2025 年 06 月 20 日

# 復習問題のある積分の計算

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

基礎数理 III の復習問題で、$z=x^2+y^2$ の $D=\{(x,y)\mid -1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1\}$ 上の部分の曲面積 $S$ を累次積分で表わせ、という問題を出した。その解は

$$S=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\int_{-1}^1\left\{\int_{-1}^1\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dy\right\}dx \tag{1}$$

となる。問題はここまでとし「この積分の計算は面倒」と説明したが、せっかくなのでこれがどれくらい面倒なのか、計算を示してみることにする。

## 2 スケール変換

まず、(1) を簡単にスケール変換する。

(1) の被積分関数は $x$ に関しても $y$ に関しても偶関数なので、

$$S=\int_{-1}^1\left\{2\int_0^1\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dy\right\}dx=4\int_0^1\left\{\int_0^1\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dy\right\}dx$$

となり、さらに $2x=\bar{x}$, $2y=\bar{y}$ と置換すれば、

$$S=2\int_0^1\left\{\int_0^2\sqrt{1+4x^2+\bar{y}^2}\,d\bar{y}\right\}dx=\int_0^2\left\{\int_0^2\sqrt{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2}\,d\bar{y}\right\}d\bar{x}$$

となる。以後この形で考えるが、この積分変数を改めて $x,y$ に変えて

$$S=\int_0^2\left\{\int_0^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy\right\}dx \tag{2}$$

と書くことにする。

# 3 積分公式

まずは、(2) を累次積分を順に計算するための次の積分公式を示す。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = -\log|\sqrt{x^2+a}-x|+C, \tag{3}$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}-\frac{a}{2}\log|\sqrt{x^2+a}-x|+C \tag{4}$$

(3) を示すには、右辺を微分して左辺の被積分関数になることを確認するのが簡単だが、せっかくなので置換積分で左辺から右辺を導くことにする。それには、

$$t=\sqrt{x^2+a}-x \tag{5}$$

という少し特殊な置換積分を使用する。このとき、

$$\sqrt{x^2+a}=t+x,\ \ x^2+a=t^2+2tx+x^2,\ \ x=\frac{a-t^2}{2t}=\frac{a}{2}t^{-1}-\frac{t}{2}$$

なので、

$$\begin{aligned} dx &= \left(-\frac{a}{2}t^{-2}-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{a+t^2}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2+a} &= t+x \ = \ \frac{a}{2}t^{-1}+\frac{t}{2} \ = \ \frac{a+t^2}{2t} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} &= -\int \frac{2t}{a+t^2}\,\frac{a+t^2}{2t^2}\,dt \ = \ -\int \frac{dt}{t} \ = \ -\log|t|+C \\ &= -\log|\sqrt{x^2+a}-t|+C \end{aligned}$$

となる。(4) の方は、(3) を部分積分すれば得られる。(3) の左辺を $I$ とすると、

$$\begin{aligned} I &= \int (x)'\sqrt{x^2+a}\,dx \ = \ x\sqrt{x^2+a}-\int x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+a}-\int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \ = \ x\sqrt{x^2+a}-I+a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \end{aligned}$$

となるので、

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}-\frac{a}{2}\log|\sqrt{x^2+a}-x|+C$$

となり (4) が得られる。

# 4 累次積分を順に計算

前節で求めた公式を用い、(2) の累次積分を順に計算する。

(2) の内側の積分を $f_1(x)$ と書くと、(4) により、

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_0^2 \sqrt{y^2+x^2+1}\,dy \\
&= \left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+x^2+1} - \frac{x^2+1}{2}\log|\sqrt{y^2+x^2+1}-y|\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \sqrt{x^2+5} - \frac{x^2+1}{2}\log|\sqrt{x^2+5}-2| - \left(0 - \frac{x^2+1}{2}\log\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \sqrt{x^2+5} + \frac{x^2+1}{4}\log(x^2+1) - \frac{x^2+1}{2}\log|\sqrt{x^2+5}-2|
\end{aligned}$$

となる。この最後の 3 項の $[0,2]$ での積分をそれぞれ $S_1, S_2, S_3$ と書くことにすれば $S = S_1 + S_2 + S_3$ となる。これを順に考える。

まず $S_1$ は、再び公式 (4) により、

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^2 \sqrt{x^2+5}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} - \frac{5}{2}\log|\sqrt{x^2+5}-x|\right]_0^2 \\
&= \sqrt{9} - \frac{5}{2}\log|\sqrt{9}-2| - \left(0 - \frac{5}{2}\log\sqrt{5}\right) \\
&= 3 + \frac{5}{4}\log 5 \qquad (6)
\end{aligned}$$

となる。

$S_2$ は、部分積分により log を消せば積分でき、

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{4}\int_0^2 (x^2+1)\log(x^2+1)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\log(x^2+1)dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log(x^2+1)\right]_0^2 - \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+2\right)\log 5 - 0 - \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{x^4+3x^2}{x^2+1}dx \\
&= \frac{7}{6}\log 5 - \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{x^4+3x^2}{x^2+1}dx \qquad (7)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$\frac{x^4+3x^2}{x^2+1} = x^2 + 2 - \frac{2}{x^2+1} \qquad (8)$$

よりさらに、

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{7}{6}\log 5 - \frac{1}{6}\int_0^2 \left(x^2+2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx \\
&= \frac{7}{6}\log 5 - \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}+2x-2\tan^{-1}x\right]_0^2 \\
&= \frac{7}{6}\log 5 - \frac{1}{6}\left(\frac{8}{3}+4-2\tan^{-1}2\right) \;=\; \frac{7}{6}\log 5 - \frac{10}{9}+\frac{1}{3}\tan^{-1}2 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

と求めることができる。

あとは $S_3$ であるが、これも部分積分により log を消すと、

$$
\begin{aligned}
S_3 &= -\frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+1)\log|\sqrt{x^2+5}-2|dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\log|\sqrt{x^2+5}-2|dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log|\sqrt{x^2+5}-2|\right]_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}}{\sqrt{x^2+5}-2}dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+2\right)\log|\sqrt{9}-2| - 0 + \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+5}(\sqrt{x^2+5}-2)}dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{(x^4+3x^2)(\sqrt{x^2+5}+2)}{\sqrt{x^2+5}\,(x^2+1)}dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{x^4+3x^2}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\int_0^2\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}}dx
\end{aligned}
$$

となるが、この最初の項は (7) の最後の項の項に等しいので、

$$
S_2+S_3 = \frac{7}{6}\log 5 + \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}}dx \qquad (10)
$$

となることがわかる。この (10) の右辺の積分の項を $S_4$ とする。

この $S_4$ の被積分関数に (8) を用いて変形すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}} &= \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}} \\
&= \frac{x^2+5-3}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}} \\
&= \sqrt{x^2+5} - \frac{3}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}}
\end{aligned}
$$

となるので、$S_4$ は、

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{3}\int_0^2 \sqrt{x^2+5}\,dx - \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+5}} \\ &= S_5+S_6+S_7 \end{aligned} \tag{11}$$

と分けられ、$S_5$ は $S_1/3$ に等しく、$S_6$ は公式 (3) より、

$$S_6 = \left[\log|\sqrt{x^2+5}-x|\right]_0^2 = \log|\sqrt{9}-2| - \log\sqrt{5} = -\frac{1}{2}\log 5 \tag{12}$$

となる。あとは $S_7$ を求めればよい。この $S_7$ の形の積分にも、目の覚めるような公式

$$\int \frac{dx}{(x^2+b)\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{b(a-b)}}\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{a-b}}{\sqrt{b}\sqrt{x^2+a}}\right) + C \quad (a>b>0)$$

があるのだが ([1], [2])、ここではこれを用いることなく、前に使用した置換 (5) で泥臭く計算してみる。$a=5$ の (5) を用いれば、

$$\begin{aligned} &x = \frac{5-t^2}{2t}, \quad dx = -\frac{5+t^2}{2t^2}dt, \quad \sqrt{x^2+5} = \frac{5+t^2}{2t}, \\ &x^2+1 = \frac{(5-t^2)^2}{4t^2}+1 = \frac{t^4-6t^2+25}{4t^2} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S_7 &= -\frac{2}{3}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{9}-2} \frac{4t^2}{t^4-6t^2+25}\,\frac{2t}{5+t^2}\left(-\frac{5+t^2}{2t^2}\right)dt \\ &= -\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{5}} \frac{4t\,dt}{t^4-6t^2+25} = -\frac{2}{3}\int_1^5 \frac{2ds}{s^2-6s+25} \quad (t^2=s) \\ &= -\frac{2}{3}\int_1^5 \frac{2ds}{(s-3)^2+16} = -\frac{2}{3}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{8du}{16(u^2+1)} \quad (s-3=4u) \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{1/2} \frac{du}{u^2+1} = -\frac{2}{3}\left[\tan^{-1}u\right]_0^{1/2} = -\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

となる。 よって、(11), (12), (13) より

$$S_4 = S_5+S_6+S_7 = \frac{S_1}{3} - \frac{1}{2}\log 5 - \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

となり (10) より

$$S_2+S_3 = \frac{7}{6}\log 5 + S_4 = \frac{S_1}{3} + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

となるので、結局 $S$ は

$$
\begin{aligned}
S &= S_1+S_2+S_3 = \frac{4}{3}S_1+\frac{2}{3}\log 5-\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2}\\
&= 4+\frac{7}{3}\log 5-\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となることがわかった。

# 5 極座標変換による計算

前節は、直接 (2) の累次積分を計算したが、(2) の被積分関数は極座標に向いていそうである。ただし、積分領域は円の一部ではなく正方形なので、そちらは極座標向きではないが、それをあえて極座標で変数変換して考えてみる。

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とすると、(2) の積分領域

$$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2\}$$

は、$r,\theta$ では

$$G=\left\{(r,\theta)\mid 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq p(\theta)\right\}$$

に移る。ここで $p(\theta)$ は、$0\leq\theta\leq\pi/4$ では $x=r\cos\theta\leq 2$ より $r\leq 2/\cos\theta$, $\pi/4\leq\theta\leq\pi/2$ では $y=r\sin\theta\leq 2$ より $r\leq 2/\sin\theta$ となるので、

$$p(\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\cos\theta} & \left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}\right)\\[2mm] \dfrac{2}{\sin\theta} & \left(\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases} \qquad (15)$$

である。これにより (2) は、

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_G\sqrt{1+r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{p(\theta)}r\sqrt{1+r^2}\,dr\right\}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=p(\theta)}d\theta = \int_0^{\pi/2}\left\{\frac{1}{3}(1+p(\theta)^2)^{3/2}-\frac{1}{3}\right\}d\theta\\
&= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}d\theta+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{\sin^2\theta}\right)^{3/2}d\theta-\frac{\pi}{6}\\
&= S_8+S_9-\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

のように積分できる。$S_9$ は、$\theta = \pi/2 - \phi$ と置換すると、

$$S_9 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{\cos^2\phi}\right)^{3/2} d\phi = S_8$$

となるので、$S$ は

$$S = 2S_8 - \frac{\pi}{6} \tag{16}$$

となる。あとはこの $S_8$ を求めればよい。

$$1 + \frac{4}{\cos^2\theta} = 1 + \frac{8}{1+\cos 2\theta} = \frac{9+\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

なので、$\cos 2\theta = t$ と置換すると、$\theta = (\cos^{-1} t)/2$ より $d\theta = -dt/(2\sqrt{1-t^2})$ なので、

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{9+\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\right)^{3/2} d\theta \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{1-0} \left(\frac{9+t}{1+t}\right)^{3/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6}\int_0^{1-0} \frac{9+t}{(1+t)^2}\sqrt{\frac{9+t}{1-t}}\,dt \end{aligned} \tag{17}$$

となる。なお、これは $t = 1$ のところで広義積分となることに注意する。そのため積分範囲の 1 を $1-0$ と書いておく。

ここでさらに、$\sqrt{(9+t)/(1-t)} = s$ と置換すると、

$$\begin{aligned} \frac{9+t}{1-t} &= s^2, \quad s^2 + 1 = \frac{10}{1-t}, \quad t = 1 - \frac{10}{s^2+1} = \frac{s^2-9}{s^2+1}, \quad dt = \frac{20s}{(s^2+1)^2}, \\ \frac{9+t}{(1+t)^2} &= \frac{9 + \dfrac{s^2-9}{s^2+1}}{\left(1 + \dfrac{s^2-9}{s^2+1}\right)^2} = \frac{10s^2(s^2+1)}{(2s^2-8)^2} = \frac{5s^2(s^2+1)}{2(s^2-4)^2}, \end{aligned}$$

なので、

$$S_8 = \frac{1}{6}\int_3^{\infty} \frac{5s^2(s^2+1)}{2(s^2-4)^2}\,\frac{20s^2 ds}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{3}\int_3^{\infty} \frac{25s^4 ds}{(s^2-4)^2(s^2+1)}$$

となる。さらに $s = 1/u$ とすれば、

$$S_8 = \frac{1}{3}\int_0^{1/3} \frac{25u^{-4}u^{-2} ds}{(u^{-2}-4)^2(u^{-2}+1)} = \frac{1}{3}\int_0^{1/3} \frac{25du}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} \tag{18}$$

となり、広義積分も解消された形となる。あとはこの分数式を部分分数分解して積分すればよい。

$$\frac{25}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} = \frac{a}{(1-2u)^2} + \frac{b}{1-2u} + \frac{c}{(1+2u)^2} + \frac{d}{1+2u} + \frac{pu+q}{1+u^2}$$

の形に分解する。

まず、両辺に $(1-2u)^2$ をかけて $u=1/2$ とすると $25/(4\times(5/4)) = 5 = a$ となる。同様に $(1+2u)^2$ をかけて $u=-1/2$ とすると $25/(4\times(5/4)) = 5 = c$ となる。

また、両辺に $(1+u^2)$ をかけて $u=i$ とすると、$25/(1-4i^2)^2 = 1 = pi+q$ となるので $p=0,\ q=1$ となる。あとは $b,\ d$ のみであるが、右辺の確定した項の和は

$$\begin{aligned}\frac{5}{(1-2u)^2} + \frac{5}{(1+2u)^2} + \frac{1}{1+u^2} &= \frac{5(2+8u^2)}{(1-4u^2)^2} + \frac{1}{1+u^2} \\ = \frac{10(1+5u^2+4u^4)+1-8u^2+16u^4}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} &= \frac{11+42u^2+56u^4}{(1-4u^2)^2(1+u^2)}\end{aligned}$$

となり、よってそれを移項すれば

$$\begin{aligned}\frac{25}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} - \frac{11+42u^2+56u^4}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} &= \frac{14(1-3u^2-4u^4)}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} \\ = \frac{14(1-4u^2)(1+u^2)}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} = \frac{14}{1-4u^2} &= \frac{7}{1-2u} + \frac{7}{1+2u}\end{aligned}$$

となるので $b=d=7$、結局

$$\frac{25}{(1-4u^2)^2(1+u^2)} = \frac{5}{(1-2u)^2} + \frac{5}{(1+2u)^2} + \frac{7}{1-2u} + \frac{7}{1+2u} + \frac{1}{1+u^2}$$

となることがわかる。よって、$S_8$ は、

$$\begin{aligned}S_8 &= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{2(1-2u)} - \frac{5}{2(1+2u)} + \frac{7}{2}\log\left|\frac{1+2u}{1-2u}\right| + \tan^{-1}u\right]_0^{1/3} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{15}{2} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\log 5 + \tan^{-1}\frac{1}{3}\right) - 0\right\} = 2 + \frac{7}{6}\log 5 + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。(16) より $S$ は

$$S = 2\left(2 + \frac{7}{6}\log 5 + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{6} = 4 + \frac{7}{3}\log 5 + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} \tag{19}$$

となることがわかる。

なお、これを前節の結果 (14) と比較すると、

$$-\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}$$

すなわち、

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4} \tag{20}$$

でないといけないことになるが、$\tan^{-1}(1/2)=\alpha$, $\tan^{-1}(1/3)=\beta$ とすると $\tan\alpha=1/2$, $\tan\beta=1/3$, $0<\alpha,\beta<\pi/2$ で、

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{5}{6}}{1-\dfrac{1}{6}}=1$$

なので、$0<\alpha+\beta<\pi$ より $\alpha+\beta=\pi/4$ となって、確かに (20) は成立する。

# 6 最後に

本稿で述べた計算方法よりも他に簡単な方法がもしかしたらあるかもしれないが、最後の形 (14), (19) に log, $\tan^{-1}$ が含まれることからして、それほど易しい計算があるとは思えず、あったとしても似たレベルの計算は必要なのではないかと思う。

なお、本稿は「簡単な曲面の式でも曲面積の計算は難しい」という例だったが、同様に簡単な関数でもそのグラフの曲線の長さの計算は難しい。それについては [3] を参照のこと。

# 参考文献

[1] 森口、宇田川、一松「岩波数学公式 I 微分積分・平面曲線」岩波書店 (2004)、§26 (iii) p130

[2] 大槻義彦監修、室谷義昭訳「新数学公式集 I 初等関数」丸善 (1991)、§1.2.45 11 p94

[3] 竹野茂治「簡単な関数の曲線長」(2023)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/curve3.pdf