

2021 年 10 月 19 日

積の微分について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、積の微分の証明を 2,3 紹介する。

$f = f(x)$ の導関数は、

$$f' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

と定義される (教科書 [3] p28 上)。ここで、 Δx は x の増分 (変化)、 Δf は、 Δx に対する f の増分、すなわち

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (2)$$

である。教科書は h で書いてあるが、(1) の Δx を h と思えばよい。

定義 (1) は、プリントで示したように、

$$f' = f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (3)$$

と書くこともできる。

2 教科書の証明

まずは、教科書 [3] に書いてある証明 (p33) から。

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{f(x + \Delta x) - f(x)\}g(x + \Delta x) + f(x)\{g(x + \Delta x) - g(x)\}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

教科書の式に比べて3行目, 5行目の式を追加しているところが違うが、実質的に同じものである。

この証明の鍵は、2行目の部分の真ん中で、分子に $f(x)g(x + \Delta x)$ を引いてそして同じものを足す(結果として増減なし)、という式を追加することで、分子に $\Delta f, \Delta g$ を作り、そこから積の微分の式が得られているのであるが、これは初学者には思いつかない技巧的な方法で、自然に積の微分の公式が得られる、という方法ではないように思う。

なお、この証明は、むしろ定義(3)の式を用いた方が式としては見やすくなる。

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} \\
&= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)g(t) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} \\
&= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\{f(t) - f(x)\}g(t) + f(x)\{g(t) - g(x)\}}{t - x} \\
&= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} g(t) + f(x) \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

といった具合で、 $x + \Delta x$ (教科書の場合は $x + h$) が出てこないのも、少し式自体が短くなり見やすいだろう。

3 関数の増分を用いた証明

次に、関数の増分を用いた証明を紹介する。これは、証明の最初の行は前節と同じであるが、(2)より、

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f, \quad g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$$

と書くことで、分子の $f(x + \Delta x)$, $g(x + \Delta x)$ を関数の増分 Δf , Δg で表し、そこから「自然な式変形」で積の微分の公式を導くものである。

$$\begin{aligned}
 (f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + f(x)\Delta g + (\Delta f)g(x) + \Delta f\Delta g - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)\Delta g + (\Delta f)g(x) + \Delta f\Delta g}{\Delta x} \\
 &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + f'(x) \times 0 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
 \end{aligned}$$

最後の 0 の部分は、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{g(x + \Delta x) - g(x)\} = 0$$

からわかる。

こちらの証明は、分子の計算では不自然の足し引きは現れず、単純な展開と整理の計算なので、教科書の方法よりも自然な計算になっている。

なお、この分子の計算

$$\Delta(fg) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = f(x)\Delta g + (\Delta f)g(x) + \Delta f\Delta g$$

は、図 1 のように面積の図で説明されることもある (cf. [2])。

4 最後に

他にも、[1] で紹介したように、対数微分法による証明や、2 変数の合成関数 (偏微分) による証明も一応はあるが、通常の定理の順番からいうとかなり無理がある。それらについては [1] を参照のこと。

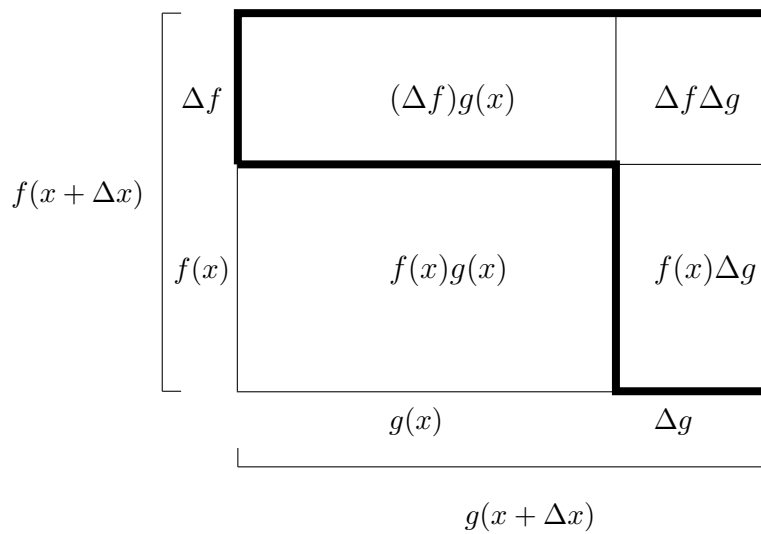


図 1: $\Delta(fg)$ を面積で表現 (太枠内が $\Delta(fg)$)

参考文献

- [1] 竹野茂治、“商の微分について”, (2020)
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/quotederiv1.pdf>
- [2] デボラ・ヒューズ=ハレット 他 (永橋英郎訳)、「概念を大切にする微積分 1 変数」(2010)、日本評論社
- [3] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2008)、学術図書出版社