

2025 年 11 月 05 日

逆三角関数の性質その 2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前 [2] に逆三角関数の性質をいくつか書いたが、そこに書いてなかったある種の形のもの、すなわち三角関数と逆三角関数の合成関数に関するものを、いくつかまとめて紹介する。

2 逆三角関数の定義と偶奇性

まずはあらためて逆三角関数の定義から。なお、講義の教科書 [1] では、逆三角関数のアークサイン等は、 $\arcsin$ ではなく $\sin^{-1}$ の記号を用いているので、本稿でもそれに従う。

アークサイン $\theta = \sin^{-1} y$ は、「 $y = \sin \theta$ 」の逆関数ではなく、その単調な部分

$$y = \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

の逆関数。

数学では、 I で定義された関数 $f(x)$ の定義域を $J \subset I$ に制限した関数を $f|_J(x)$ のように書くが、この記号を使えば、 $\theta = \sin^{-1} y$ は

$$y = \sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}(\theta) \quad (2)$$

の逆関数、ということになる。同様にアークコサイン $\theta = \cos^{-1} y$ 、アークタンジェント $\theta = \tan^{-1} y$ は、それぞれ

$$y = \cos|_{[0, \pi]}(\theta), \quad y = \tan|_{(-\pi/2, \pi/2)}(\theta) \quad (3)$$

の逆関数である。

アークサインとアークタンジェントは奇関数だが、アークコサインは偶関数でも奇関数でもなく、

$$\begin{cases} \sin^{-1}(-y) = -\sin^{-1} y & (-1 \leq y \leq 1) \\ \tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1} y & (-\infty < y < \infty) \\ \cos^{-1}(-y) = \pi - \cos^{-1} y & (-1 \leq y \leq 1) \end{cases} \quad (4)$$

となる。最初の 2 つは $\sin, \tan$ が奇関数だから自明で、3 つ目のものは、 $\cos^{-1}(y) = \theta$ とすれば、 $0 \leq \theta \leq \pi$ で、

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -y \quad (0 \leq \pi - \theta \leq \pi)$$

より

$$\cos^{-1}(-y) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1} y$$

となる。

3 三角関数に逆三角関数を代入

まずは、三角関数に逆三角関数を代入した合成関数を考える。

三角関数は $\sin, \cos, \tan$, 逆三角関数は $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ を使うとすると、全部で 9 種類あることになる。

まず次の 3 つは定義より容易にわかる。

$$\begin{cases} \sin(\sin^{-1} y) = y & (-1 \leq y \leq 1) \\ \cos(\cos^{-1} y) = y & (-1 \leq y \leq 1) \\ \tan(\tan^{-1} y) = y & (-\infty < y < \infty) \end{cases} \quad (5)$$

厳密に言えば、定義からは、例えば

$$\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}(\sin^{-1} y) = y \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

となるのだが、 $\sin^{-1} y$ の値域である $[-\pi/2, \pi/2]$ 上では $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}(\theta) = \sin \theta$ なので、(5) の 1 つ目が成り立つ、という具合である。他の 2 つも同様であるが、だからこの逆の

$$\sin^{-1}(\sin \theta) = \theta$$

は一般には成立しない。それがどうなるかについては、次節で紹介する。

次は、外側と内側が違う三角関数である場合のものを紹介する。まずは内側がアークサインのもの。

$$\begin{cases} \cos(\sin^{-1} y) = \sqrt{1-y^2} & (-1 \leq y \leq 1) \\ \tan(\sin^{-1} y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} & (-1 < y < 1) \end{cases} \quad (6)$$

この 2 つは、[2] で紹介した、

$$\cos^{-1} \sqrt{1-y^2} = \sin^{-1} y \quad (0 \leq y \leq 1), \quad \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \sin^{-1} y \quad (-1 < y < 1)$$

と (5) を組み合わせれば容易に得られる。なお、 $\cos(\sin^{-1} y)$ の $-1 \leq y < 0$ の部分に関しては、 $0 < -y \leq 1$ と (4) を用いれば、

$$\cos^{-1} \sqrt{1-y^2} = \sin^{-1}(-y) = -\sin^{-1} y$$

より、

$$\sqrt{1-y^2} = \cos(\cos^{-1} \sqrt{1-y^2}) = \cos(-\sin^{-1} y) = \cos(\sin^{-1} y)$$

となって、この場合も成立することがわかる。

次は内側がアークコサインのもの。

$$\begin{cases} \sin(\cos^{-1} y) = \sqrt{1-y^2} & (-1 \leq y \leq 1) \\ \tan(\cos^{-1} y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} & (-1 \leq y \leq 1, y \neq 0) \end{cases} \quad (7)$$

この 2 つは、[2] で紹介した、

$$\sin^{-1} \sqrt{1-y^2} = \cos^{-1} y \quad (0 \leq y \leq 1), \quad \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \cos^{-1} y \quad (0 < y \leq 1)$$

と (5) を組み合わせれば容易に得られる。なお、いずれも $y < 0$ の場合が欠けているが、 $-1 \leq y < 0$ の場合は (4) より

$$\sin^{-1} \sqrt{1-y^2} = \cos^{-1}(-y) = \pi - \cos^{-1} y$$

なので

$$\sqrt{1-y^2} = \sin(\sin^{-1} \sqrt{1-y^2}) = \sin(\pi - \cos^{-1} y) = \sin(\cos^{-1} y)$$

となって (7) の 1 つ目は成り立ち、2 つ目の方は、 $-1 \leq y < 0$ の場合は

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{-y} = -\cos^{-1}(-y) = \cos^{-1} y - \pi$$

となるので、

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \tan\left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right) = \tan(\cos^{-1} y - \pi) = \tan(\cos^{-1} y)$$

より (7) の 2 つ目も成り立つことになる。最後は、内側がアークタンジェントのもの。

$$\begin{cases} \sin(\tan^{-1} y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} & (-\infty < y < \infty) \\ \cos(\tan^{-1} y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} & (-\infty < y < \infty) \end{cases} \quad (8)$$

この 2 つは、[2] で紹介した、

$$\sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \tan^{-1} y \quad (-\infty < y < \infty), \quad \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \tan^{-1} y \quad (y \geq 0)$$

と (5) を組み合わせれば容易に得られる。なお、後者は $y < 0$ の場合が欠けているが、その場合は

$$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1} y$$

となるので

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \cos\left(\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \cos(-\tan^{-1} y) = \cos(\tan^{-1} y)$$

よりこの場合も (8) の 2 つ目は成り立つ。

4 逆三角関数に三角関数を代入

次は、逆三角関数に三角関数を代入した合成関数を考える。

この場合も前節同様の 9 種類を考えるが、実はそのうちの 4 種類

$$\sin^{-1}(\tan \theta), \quad \cos^{-1}(\tan \theta), \quad \tan^{-1}(\sin \theta), \quad \tan^{-1}(\cos \theta) \quad (9)$$

は、多分簡単な式では表すことができない。そもそも前の 2 つは、 θ を制限しなければ $\sin^{-1} y, \cos^{-1} y$ の定義域にも入らない。

また、一般に $f(\sin \theta), f(\cos \theta)$ は周期 2π の周期関数、 $f(\tan \theta)$ は周期 π の周期関数なので、その周期幅のいずれかの区間でどのような関数になるかを示せば十分であり、本節でもそのように考える。

まずは、 $y = \sin^{-1}(\sin \theta)$ から。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では、定義 (2) より、当然 $y = \theta$ となる。

$-\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$ では、

$$\sin \theta = -\sin(\theta + \pi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta + \pi \leq \frac{\pi}{2}$$

なので、

$$y = \sin^{-1}(\sin \theta) = \sin^{-1}(-\sin(\theta + \pi)) = -\sin^{-1}(\sin(\theta + \pi)) = -(\theta + \pi)$$

となる。 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ では、

$$\sin \theta = -\sin(\theta - \pi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta - \pi \leq \frac{\pi}{2}$$

より、

$$y = \sin^{-1}(\sin \theta) = \sin^{-1}(-\sin(\theta - \pi)) = -\sin^{-1}(\sin(\theta - \pi)) = -(\theta - \pi)$$

となる。よって、 $-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲で見れば、

$$\sin^{-1}(\sin \theta) = \begin{cases} -\theta - \pi & \left(-\pi \leq \theta < -\frac{\pi}{2}\right) \\ \theta & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\theta + \pi & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi\right) \end{cases} \quad (10)$$

となる。グラフは図 1 の通り。

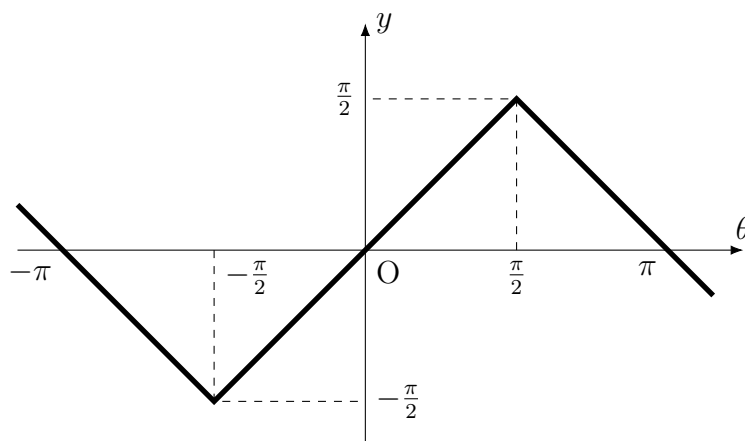


図 1: $y = \sin^{-1}(\sin \theta)$ のグラフ

今、 $h_1(x)$ を、

$$h_1(x) = |x| \quad (-1 \leq x < 1), \quad h_1(x+2) = h_1(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11)$$

で定まる周期 2 の周期関数とすると (図 2)、

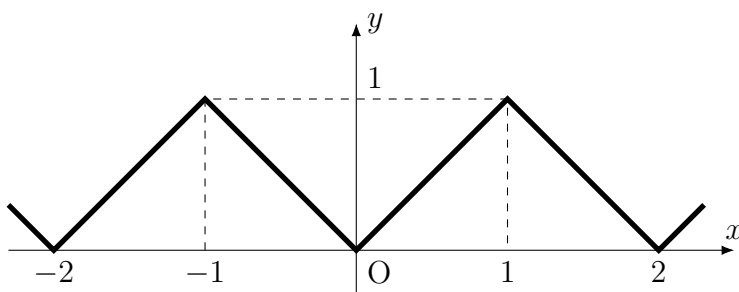


図 2: $y = h_1(x)$ のグラフ

$y = \sin^{-1}(\sin \theta)$ のグラフは $y = h_1(\theta)$ のグラフを θ 方向, y 方向に π 倍し, θ 方向, y 方向に $-\pi/2$ ずつ平行移動したもののなので,

$$\sin^{-1}(\sin \theta) = \pi h_1\left(\frac{1}{\pi}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = \pi h_1\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

と書ける。

次は $y = \cos^{-1}(\cos \theta)$ を考える。 $0 \leq \theta \leq \pi$ では、定義 (3) より、当然 $y = \theta$ で、 $-\pi \leq \theta \leq 0$ では、

$$\cos \theta = -\cos(\theta + \pi), \quad 0 \leq \theta + \pi \leq \pi$$

より

$$\begin{aligned} y &= \cos^{-1}(\cos \theta) = \cos^{-1}(-\cos(\theta + \pi)) = \pi - \cos^{-1}(\cos(\theta + \pi)) \\ &= \pi - (\theta + \pi) = -\theta \end{aligned}$$

となるから、

$$\cos^{-1}(\cos \theta) = \begin{cases} -\theta & (-\pi \leq \theta < 0) \\ \theta & (0 \leq \theta < \pi) \end{cases} \quad (13)$$

となる (図 3)。

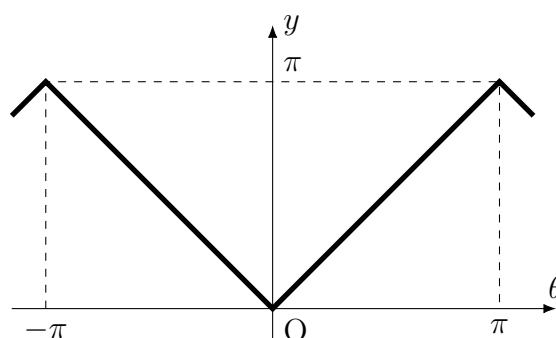


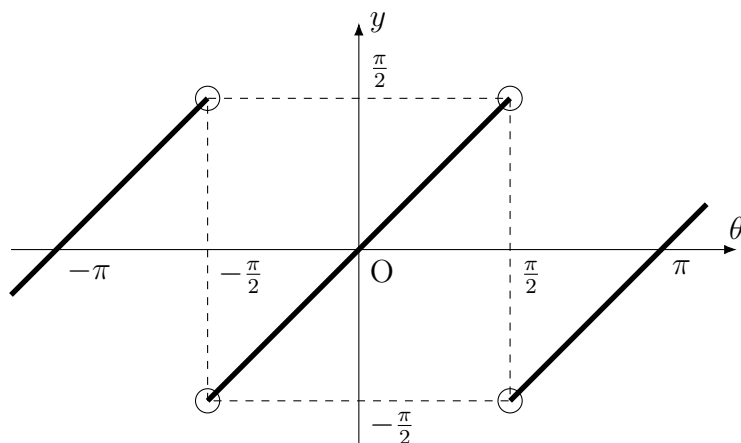
図 3: $\cos^{-1}(\cos \theta)$ のグラフ

これは、 $y = h_1(\theta)$ を θ 方向, y 方向に π 倍したもののなので、

$$\cos^{-1}(\cos \theta) = \pi h_1\left(\frac{\theta}{\pi}\right) \quad (14)$$

と書ける。

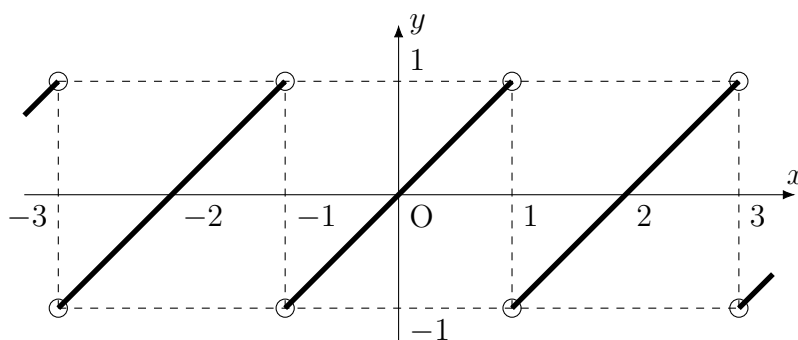
次は $y = \tan^{-1}(\tan \theta)$ 。これは周期は π で、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ では $\tan^{-1}(\tan \theta) = \theta$ なので、これをそのまま周期拡張したものになる (図 4)。

図 4: $y = \tan^{-1}(\tan \theta)$ のグラフ

今、 $h_2(x)$ を、

$$h_2(x) = x \quad (-1 < x < 1), \quad h_2(x+2) = h_2(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (15)$$

で定まる周期 2 の周期関数とすると (図 5)、

図 5: $y = h_2(x)$ のグラフ

$$\tan^{-1}(\tan \theta) = \frac{\pi}{2} h_2\left(\frac{2\theta}{\pi}\right) \quad (16)$$

と書ける。

次は $y = \cos^{-1}(\sin \theta)$ 。これは, (14) より,

$$\cos^{-1}(\sin \theta) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi h_1\left(\frac{1}{\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

となるので, これは (13) を θ 方向に $\pi/2$ 平行移動したもので,

$$\cos^{-1}(\sin \theta) = \pi h_1 \left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \quad (17)$$

と書ける (図 6)。

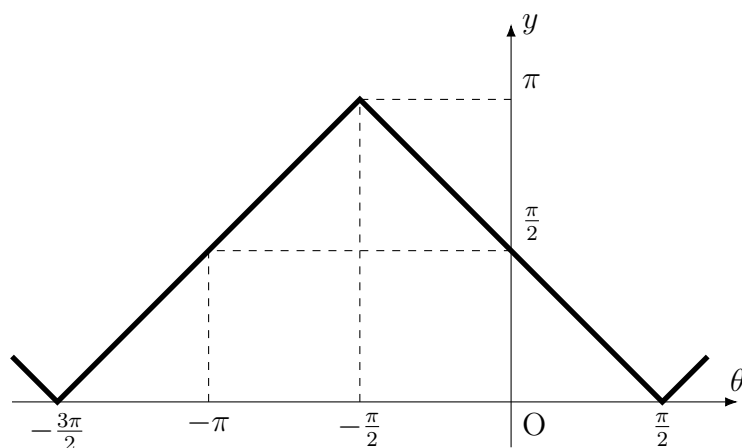


図 6: $y = \cos^{-1}(\sin \theta)$ のグラフ

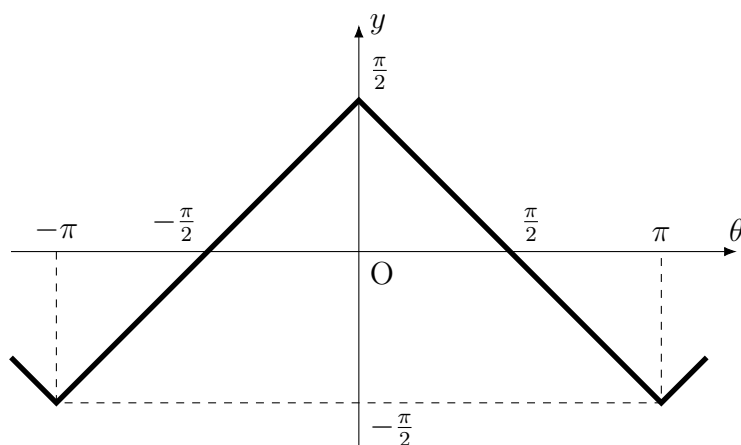
$y = \sin^{-1}(\cos \theta)$ も同様に、

$$\sin^{-1}(\cos \theta) = \sin^{-1} \left(\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi h_1 \left(\frac{1}{\pi} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{2}$$

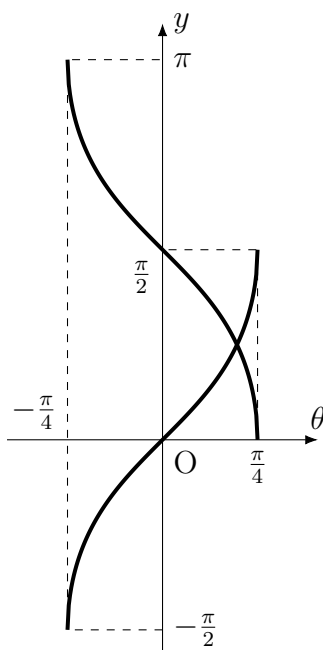
より (10) を θ 方向に $-\pi/2$ 平行移動したもので,

$$\cos^{-1}(\sin \theta) = \pi h_1 \left(\frac{\theta}{\pi} + 1 \right) - \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

と書ける (図 7)。

図 7: $y = \sin^{-1}(\cos \theta)$ のグラフ

最後に、(9) で紹介した関数をグラフのみ紹介する。なお、 $\sin^{-1}(\tan \theta)$, $\cos^{-1}(\tan \theta)$ は $\tan \theta$ の値がそれぞれの定義域に入るように $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ の範囲のグラフで、 $\tan^{-1}(\sin \theta)$, $\tan^{-1}(\cos \theta)$ はそれぞれ奇関数、偶関数なので $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲のグラフを示す。

図 8: $y = \sin^{-1}(\tan \theta)$ と $y = \cos^{-1}(\tan \theta)$

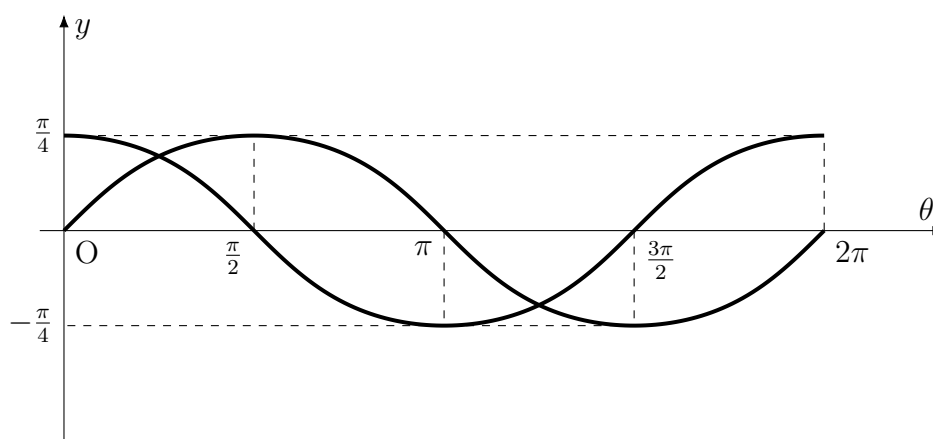


図 9: $y = \tan^{-1}(\sin \theta)$ と $y = \tan^{-1}(\cos \theta)$

図 8 の方は、一見すると $y = \sin^{-1}(\theta)$, $y = \cos^{-1}(\theta)$ のグラフの縮尺を変えただけのようにも見えるが、それは $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ での $\tan \theta$ と θ との違いがそれほど大きくないためであり、実際には違うものである。

図 9 の方も、一見 $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフの縮尺を変えただけのようにも見えるが、こちらも同じく $-1 \leq y \leq 1$ での $\theta = \tan^{-1}(y)$ と y との違いがそれほど大きくないためである。よく見れば、若干通常の三角関数のグラフより丸みを帯びている感じが見てとれるだろう。

例えば、図 9 でグラフが交差しているところがあるが、左側の交点の θ 座標は $\theta = \pi/4$ だが、 y 座標は $y = \tan^{-1}(\sqrt{2}/2)$ であり、これは簡単な角として表すことができず、単純に三角関数のグラフの縮尺を変えたものではないことがわかる。

これらのことから、この 4 種類は他のものとは違い簡単な式で表すことができないことがわかると思う。

参考文献

[1] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2008)、学術図書出版社

[2] 竹野茂治、「逆三角関数の性質」(2022)

<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/arcsin1.pdf>