2021 年 09 月 01 日

直交行列と回転変換

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

目次

1 はじめに

大学教養科目の線形代数では、行列、ベクトル、行列式などの一般論、特に n 次元空間に関する一般論を教えるが、逆に物理や工学などではより重要な 3 次元の 1 次変換の各論、例えば回転変換などは普通は教えず、「直交行列で行列

式が 1 のものは回転を意味する」という話も、それに触れることがあるかないか位だろうと思う。

私自身もちゃんと把握はしていなかったので、あらためて直交行列と回転変換について少し考察してみたことをここにまとめておく。

なお、本稿では、ベクトルはすべて列ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

のカンマ区切りの丸かっこの形で書くこととし、横に成分を書くときは、行列の転置の記号を用いて

$$\boldsymbol{a} = {}^T(a_1, a_2, a_3) \tag{2}$$

の、行列とベクトルを混在したような記号で書くことにする。

また、行列も基本的に 3×3 の行列のみを扱うが、行列を列ベクトルを使って

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$$

のように書く場合、この形だと列ベクトル同士の境が見分けにくいので、本稿では列ベクトル表記での行列の表現では、

$$A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

のようにカンマ区切りで書くことにする。

2 右手系と左手系

3 次元のベクトル解析などでは、よく座標軸の前提として、「座標軸は右手系に取る」という話が出てくる。

右手系とは、右手の親指、人差し指、中指でそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸を自然に表すことができるものを指し、そうでないものを左手系と呼ぶ (図 1)。また、

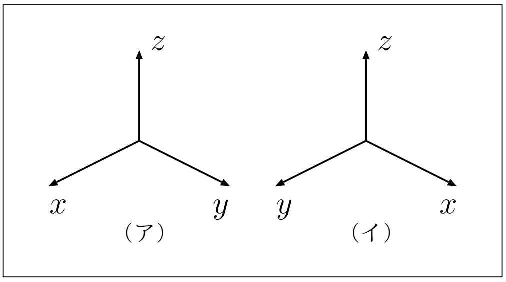

図 1: 右手系 (ア) と左手系 (イ)

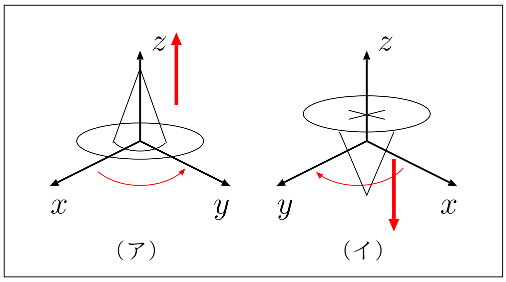

図 2: 右ねじによる判別

これらは必ずしも直交軸だけではなく、同一平面上にない 3 つのベクトルに対しても同様の意味で用いられることもある。

又は、指ではなく右ねじを使って「x 軸の正の方向を y 軸の正の方向に 90° 回転する向きに右ねじを回したときに、ねじの進む方向が z 軸と一致する場合が右手系」という表現もある (図 2)。

これらはいずれにせよ、視覚的な説明であり、数式による定義ではない。では、数式で右手系か左手系かを定義することはできないのだろうか。

例えば、3 次元ベクトルの外積

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix} \tag{3}$$

は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルで、

「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が右手系となる」 (4)

という性質が知られているので、それを利用すれば、x 軸、y 軸、z 軸の正の方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ に対して

「$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{k}$ が同じ向きの場合を右手系と呼ぶ」 (5)

とすれば図を用いずに右手系を数式で定義できそうだが、残念ながらこれはうまくいかない。それは、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ が右手系か左手系かに関わらず、常に $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{k}$ は同じ向きとなる (より詳しくは $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ となる) からである。

つまり、「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$」は、実は右手系になるのではなく、常に軸方向 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と同じ手系になり、よって、座標軸が右手系なら $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ も右手系、座標軸が左手系なら左手系になるだけなのである。

だから、(4) の性質を持つためには、元々「座標系が右手系である」という前提が必要であり、どの本でも、外積を定義する前 (あるいは少なくとも外積の基本性質を述べる前) に、必ず「座標系は右手系と仮定する」という意味の文言が書かれているはずである。

逆に外積を図形的に定義して、そこから (3) を導く順番で説明する本もあるが、それもやはり座標系が右手系という仮定がなければ、(3) を得ることはできない。

外積によって、任意のベクトルの組が、規準となる座標系と同じ手系か異なる手系かの判断はできても、座標系の規準自体を決めるのに外積を用いることはできない。

他にも、行列式

$$|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \quad (6)$$

は、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のスカラー三重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ に一致し、それは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の符号付き体積となり、その符号は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系ならばプラス、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が左手系ならばマイナスとなる、ということが知られている (4 節補題 2) が、これもあくまで座標軸が右手系である、という前提の話で、座標軸が左手系ならば、手系と行列式の符号の関係は逆になる。

つまり、外積と同じで、座標軸の手系と同じか違うかは確認できても、それを座標軸の手系を定義することには使えない。実際、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の手系に関わらず $|\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}| = 1$ となってしまう。

実は、数式で座標系の手系を規程することはできず、例えば座標軸を「左手系」にしても、外積などで出てくる手系の話をすべて逆にすれば「左手系のベクトル解析」は矛盾なく成立するのである。

本稿も、図 1 のような図による手系の定義により、座標軸は右手系と取ることとしておく。

3 回転変換と直交行列の定義

直交行列と連動して、よく「回転行列」「回転変換」という言葉が使われるが、本稿では以下のように定義しておく。

- **直交行列**: 正方行列 A で、${}^TA = A^{-1}$ となるもの (本稿では 3×3 行列のみ)

- **回転変換**: ある回転軸 (その方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を **回転軸ベクトル** と呼ぶ) に対する角 ψ の回転をなす 3 次元空間の一次変換

直交行列の半分は、「回転行列」と呼ばれることもあるのであるが、本稿ではその用語は用いず、「軸方向の回転行列」という用語のみ後で導入することにする。

回転変換の回転方向は、その回転の向きに右ねじを回すとねじが進む方向が回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ と一致するように考えることにする。よって、回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ に関する角 ψ の回転と回転軸ベクトル $-\boldsymbol{n}$ に関する角 ψ の回転は逆向きで、$-\boldsymbol{n}$ に関する ψ の回転は、$\boldsymbol{n}$ に関する $-\psi$ の回転と同じと考える。

座標軸が右手系であれば、回転軸ベクトル $\boldsymbol{k}$ に対する $\pi/2$ の回転は、$\boldsymbol{i}$ を $\boldsymbol{j}$ に一致させる回転に等しい。

4 補題

本節では、直交行列や 3 次元ベクトルに対して成り立つ補題をいくつかまとめて紹介する。

補題 1. 3 次元単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ は常に

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}(\phi,\theta) = {}^T(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta) \\ \quad\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \phi < 2\pi\right)\end{array} \tag{7}$$

の形に書き表すことができる。

証明

この (7) は、単位球面の 3 次元極座標表現 ($r = 1$) なので、明らかであるが、一応示しておく。

$$|\boldsymbol{a}| = |\,{}^T(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

であるから $|a_3| \leq 1$、よって、$a_3 = \sin\theta$ となる θ が $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲でただ一つ決定する。

$\theta = \pm\pi/2$ の場合は $a_3 = \pm 1$ より、$a_1 = a_2 = 0$ となり、$\cos\theta = 0$ となるから ϕ は例えば $\phi = 0$ とでもすればよい (この場合 ϕ は一意には決まらない)。

$|\theta| < \pi/2$ の場合は、$|\sin\theta| < 1$ より $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-a_3^2} > 0$ で、

$$\left(\frac{a_1}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{a_1^2+a_2^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{a_1^2+a_2^2}{1-a_3^2} = \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2} = 1$$

となるので、

$$\frac{a_1}{\cos\theta} = \cos\phi, \quad \frac{a_2}{\cos\theta} = \sin\phi$$

となる ϕ が $0 \le \phi < 2\pi$ の範囲でただ一つ決定する。■

$\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$ は、図 3 のように、原点から単位球面へ向かうベクトルで、緯度 (中心からの仰角) が θ、経度 (xy 平面への射影の x 軸からの偏角) が ϕ であるようなベクトルとなる。

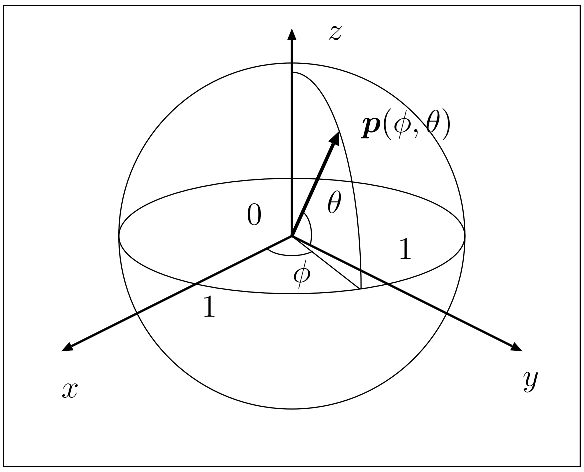

図 3: $\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$

補題 2. 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、行列式とスカラー三重積の値は等しい。

$$|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{8}$$

また、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積を V とすると、

$$|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| = \pm V \tag{9}$$

となる。符号は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系のときにプラス、左手系のときにマイナスとなる。

証明

ベクトル解析の本を見れば大抵載っているが、一応示しておく。(3) より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_2c_3-b_3c_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 \end{bmatrix} \\
&= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)
\end{aligned}
$$

となるが、これを展開すれば (6) が得られる。

後半であるが、スカラー三重積はまず

$$
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\phi \tag{10}
$$

であり、ϕ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ がなす角 $(0\leq\phi\leq\pi)$ となる。

$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ は、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が作る平行四辺形の面積になるので、それを平行六面体の底面と見れば、その高さは、その底面に垂直な方向 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ への、$\boldsymbol{a}$ の正射影 $|\boldsymbol{a}|\cos\phi$ となる。ただし、$\phi>\pi/2$ であれば $\cos\phi<0$ なので、高さは $-|\boldsymbol{a}|\cos\phi$ となる。よって、(10) の右辺は $\pm V$ となる。

$+V$ となるのは、$0\leq\phi<\pi/2$ のときなので、$\boldsymbol{a}$ が底面に対して $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ と同じ側にあるとき、よって $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ は右手系となるから、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は右手系。逆に $-V$ となるのは、$\pi/2<\phi\leq\pi$ のときなので、$\boldsymbol{a}$ が底面に対して $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ と反対側にある。よって $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ は左手系なので、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は左手系となる。

なお、$\phi=\pi/2$ の場合は $\cos\phi=0$ より三重積は 0 となるが、この場合 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は同一平面にあるので V も 0 となり、やはり (9) は成立する。■

行列式の性質により、

$$
|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}| = -|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}| = -|\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}| = -|\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}|
$$

となることがわかるが、これと補題 2 により、行列式 (= 三重積) の正負でベクトルの右手系、左手系がわかることになる。

3 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ がいずれも単位ベクトルで、互いに垂直な場合、これらを **正規直交系** と呼ぶ。

$$
|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,\quad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c} \tag{11}
$$

補題 2 により、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が正規直交系ならば $|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|=\pm1$ となることがわかる。

補題 3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系の正規直交系ならば

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}(\phi,\theta),\quad \boldsymbol{b}=\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)\cos\psi+\check{\boldsymbol{p}}(\phi)\sin\psi,\\ &\boldsymbol{c}=-\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)\sin\psi+\check{\boldsymbol{p}}(\phi)\cos\psi\\ &\quad\Big(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq\phi<2\pi,\ 0\leq\psi<2\pi\Big)\end{aligned}\tag{12}$$

の形に表すことができる。ここで、$\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$ は (7) の右辺のベクトル、$\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ は、

$$\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta\\ -\cos\theta\end{bmatrix},\quad \check{\boldsymbol{p}}(\phi)=\begin{bmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{bmatrix},\tag{13}$$

証明

まず、$\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$, $\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ は正規直交系で、

$$\boldsymbol{p}(\phi,\theta)\times\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)=\check{\boldsymbol{p}}(\phi)\tag{14}$$

(よって右手系) となることに注意する。その計算はいずれも容易なので省略する。

まず、$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$ の形に書くことは、補題 1 により可能で、これに対し、$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ に垂直な平面上にあるので、$\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$ に垂直な単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ の線形結合 (スカラー倍の和) で書けることになる。しかも、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は右手系の正規直交系、$\boldsymbol{a}$, $\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ も右手系の正規直交系なので、その平面上で、$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は、$\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ をある角だけ $\boldsymbol{a}$ を軸として回転したベクトルとなる (図 4)。その角を ψ とすれば、

$$\boldsymbol{b}=\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)\cos\psi+\check{\boldsymbol{p}}(\phi)\sin\psi,\quad \boldsymbol{c}=-\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)\sin\psi+\check{\boldsymbol{p}}(\phi)\cos\psi$$

となる。■

なお、参考までにこの (12) の成分をすべて書き下すと、以下のようになる。

$$\boldsymbol{a}\ =\ \boldsymbol{p}(\phi,\theta)\ =\ \begin{bmatrix}\cos\phi\cos\theta\\ \sin\phi\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},\tag{15}$$

$$\boldsymbol{b}\ =\ \hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)\cos\psi+\check{\boldsymbol{p}}(\phi)\sin\psi\ =\ \begin{bmatrix}\cos\psi\cos\phi\sin\theta-\sin\psi\sin\phi\\ \cos\psi\sin\phi\sin\theta+\sin\psi\cos\phi\\ -\cos\psi\cos\theta\end{bmatrix},\tag{16}$$

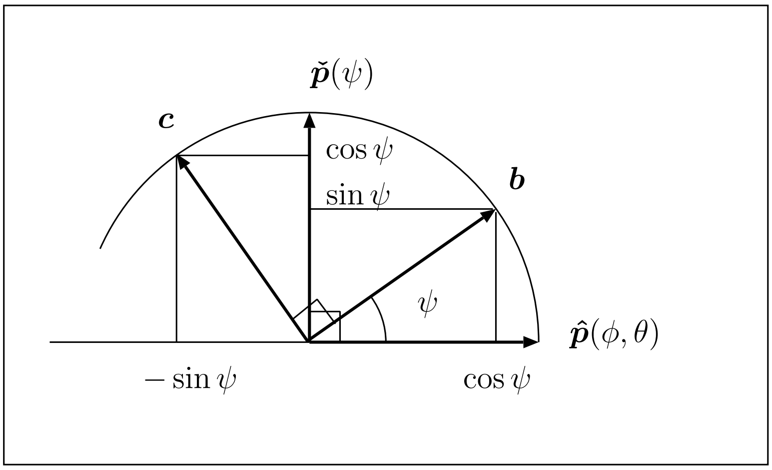

図 4: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$

$$\boldsymbol{c} \;=\; -\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)\sin\psi + \check{\boldsymbol{p}}(\phi)\cos\psi \;=\; \begin{bmatrix} -\sin\psi\cos\phi\sin\theta - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\psi\sin\phi\sin\theta + \cos\psi\cos\phi \\ \sin\psi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{17}$$

補題 4. 直交行列 $A = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は正規直交系となる。よって、$|A| = \pm 1$ である。

逆に、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交系であれば、$A = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は直交行列となる。

証明

ベクトルはすべて列ベクトルなので、ベクトルの内積は、転置行列との積で書けることに注意する。

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = {}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$$

A は直交行列であるから ${}^TAA = E$ であるが、これは、

$${}^TAA = \begin{bmatrix} {}^T\boldsymbol{a} \\ {}^T\boldsymbol{b} \\ {}^T\boldsymbol{c} \end{bmatrix} [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を意味するので、よって $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は正規直交系となる。

逆に、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は正規直交系であれば、上の計算より ${}^{T}\!AA = E$ となることがわかる。行列式の理論により、

$$|{}^{T}\!AA| = |{}^{T}\!A||A| = |A||A| = |A|^2 = |E| = 1$$

となるので、$|A| = \pm 1$ となるから、A は逆行列 A^{-1} を持ち、よって ${}^{T}\!A = A^{-1}$ となり、A は直交行列となる。■

補題 5. 直交行列 A に対し、$\varepsilon = |A| = \pm 1$ とすると、任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u})\cdot(A\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}, \quad (A\boldsymbol{u})\times(A\boldsymbol{v}) = \varepsilon A(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \tag{18}$$

証明

$A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$、とすると、補題 4 より $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ は正規直交系で、$A\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{j} = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c}$ であり、補題 2 より、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \varepsilon\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \varepsilon\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = \varepsilon\boldsymbol{b} \tag{19}$$

となる。また、

$$\boldsymbol{u} = {}^{T}(u_1, u_2, u_3) = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v} = {}^{T}(v_1, v_2, v_3) = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$$

とすれば

$$A\boldsymbol{u} = u_1A\boldsymbol{i} + u_2A\boldsymbol{j} + u_3A\boldsymbol{k} = u_1\boldsymbol{a} + u_2\boldsymbol{b} + u_3\boldsymbol{c}, \quad A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a} + v_2\boldsymbol{b} + v_3\boldsymbol{c}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&(A\boldsymbol{u})\cdot(A\boldsymbol{v}) \ = \ (u_1\boldsymbol{a} + u_2\boldsymbol{b} + u_3\boldsymbol{c})\cdot(v_1\boldsymbol{a} + v_2\boldsymbol{b} + v_3\boldsymbol{c}) \\
&\quad = \ u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \ = \ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}, \\
&(A\boldsymbol{u})\times(A\boldsymbol{v}) \ = \ (u_1\boldsymbol{a} + u_2\boldsymbol{b} + u_3\boldsymbol{c})\times(v_1\boldsymbol{a} + v_2\boldsymbol{b} + v_3\boldsymbol{c}) \\
&\quad = \ (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} \\
&\quad = \ (u_1v_2 - u_2v_1)(\varepsilon\boldsymbol{c}) + (u_2v_3 - u_3v_2)(\varepsilon\boldsymbol{a}) + (u_3v_1 - u_1v_3)(\varepsilon\boldsymbol{b}) \\
&\quad = \ \varepsilon\left\{(u_2v_3 - u_3v_2)A\boldsymbol{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)A\boldsymbol{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)A\boldsymbol{k}\right\} \\
&\quad = \ \varepsilon A(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

∎

なお、(18) の内積の方は、行列の積を用いて

$$(A\boldsymbol{u})\cdot(A\boldsymbol{v}) = {}^T(A\boldsymbol{u})(A\boldsymbol{v}) = ({}^T\boldsymbol{u}\,{}^TA)(A\boldsymbol{v}) = {}^T\boldsymbol{u}({}^TAA)\boldsymbol{v} = {}^T\boldsymbol{u}E\boldsymbol{v} = {}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$$

と示すこともできる。

z 軸を回転軸とする θ 回転 (回転軸ベクトル $\boldsymbol{k}$) は、図 4 と同様に考えれば、x 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ を $\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$ に、y 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{j}$ を $\boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta$ に移動することがわかる。そしてそれにともない、点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = x\boldsymbol{i}' + y\boldsymbol{j}' + z\boldsymbol{k} = [\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

に移動する。すなわち、z 軸に関する θ 回転は、行列

$$A_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

による一次変換で表されることになる。この $A_z(\theta)$ を z 軸に関する **軸回転行列** と呼ぶ。

同様に、x 軸の θ 回転は、

$$\begin{cases} \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{j}\cos\theta + \boldsymbol{k}\sin\theta, \\ \boldsymbol{k}' &= -\boldsymbol{j}\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta, \\ \boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i} \end{cases}$$

より、軸回転行列は

$$A_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{21}$$

となり、y 軸の θ 回転は、

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{k}\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta, \\ \boldsymbol{i}' &= -\boldsymbol{k}\sin\theta + \boldsymbol{i}\cos\theta, \\ \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{j} \end{cases}$$

より、軸回転行列は

$$A_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{22}$$

となる。

補題 6. 軸回転行列 $A_m(\theta)$ $(m = x, y, z)$, および任意の角 θ, ϕ に対して、次が成り立つ。

$$A_m(\theta)A_m(\phi) = A_m(\theta + \phi), \quad A_m(\theta)^{-1} = A_m(-\theta) \tag{23}$$

証明

例えば $A_x(\theta)$ で考えれば、

$$\begin{aligned} A_x(\theta)A_x(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ 0 & \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ 0 & \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} = A_x(\theta+\phi) \end{aligned}$$

となる。また、これにより $A_x(\theta)A_x(-\theta) = A_x(0) = E$ となるから、後半もすぐに得られる。

$A_y(\theta)$, $A_z(\theta)$ の場合も同様。■

一般的ではないが、本稿では次のような記号も用いる。3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ と 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して、

$$\boldsymbol{n} \times A = [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}] \tag{24}$$

と定める。外積も 3 次元列ベクトルなので、$\boldsymbol{n} \times A$ は 3 次の正方行列となる。

補題 7. 3 次正方行列 $A, B,$ および 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$ に対して、次が成り立つ。

$$(\boldsymbol{n}\times A)\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}\times(A\boldsymbol{m}),\quad (\boldsymbol{n}\times A)B=\boldsymbol{n}\times(AB) \tag{25}$$

証明

(25) の前者が成り立つとすると、後者が示されることを先に示す。$B=[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]$ とすると、$AB=[A\boldsymbol{b}_1,A\boldsymbol{b}_2,A\boldsymbol{b}_3]$ より

$$\boldsymbol{n}\times(AB)=\boldsymbol{n}\times[A\boldsymbol{b}_1,A\boldsymbol{b}_2,A\boldsymbol{b}_3]=[\boldsymbol{n}\times(A\boldsymbol{b}_1),\boldsymbol{n}\times(A\boldsymbol{b}_2),\boldsymbol{n}\times(A\boldsymbol{b}_3)]$$

となるので、(25) の前者を用いれば、これは

$$[(\boldsymbol{n}\times A)\boldsymbol{b}_1,(\boldsymbol{n}\times A)\boldsymbol{b}_2,(\boldsymbol{n}\times A)\boldsymbol{b}_3]=(\boldsymbol{n}\times A)[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=(\boldsymbol{n}\times A)B$$

となり、(25) の後者が得られることになる。

よってあとは (25) の前者を示せばよい。$A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$, $\boldsymbol{m}={}^T(m_1,m_2,m_3)$ とすると、$A\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}_1m_1+\boldsymbol{a}_2m_2+\boldsymbol{a}_3m_3$ なので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times(A\boldsymbol{m}) &= (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_1)m_1+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_2)m_2+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_3)m_3\\ &= [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}_3]\boldsymbol{m} \;=\; (\boldsymbol{n}\times A)\boldsymbol{m}\end{aligned}$$

となり、前者も示された。■

補題 8. 直交行列 A の固有値 λ はすべて $|\lambda|=1$。特に、3 次の直交行列では、必ず $\lambda=|A|$ という固有値を持つ。

証明

複素数ベクトル $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+i\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1+i\boldsymbol{y}_2$ ($\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$ は実数ベクトル、i は虚数単位) の内積 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$、大きさ $\|\boldsymbol{x}\|$ を、

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle &= {}^T\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}=({}^T\boldsymbol{x}_1+i\,{}^T\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{y}_1-i\boldsymbol{y}_2)\\ \|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{|\boldsymbol{x}_1|^2+|\boldsymbol{x}_2|^2}\end{aligned} \tag{26}$$

と定める。

A の固有値を λ、それに対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。λ は一般には複素数 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$、$\boldsymbol{x}$ は複素数ベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + i\boldsymbol{x}_2$ で、ゼロベクトルではない。

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ なので、

$$\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}\rangle \tag{27}$$

となるが、

$$\begin{aligned}\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle &= {}^T(A\boldsymbol{x})\overline{A\boldsymbol{x}} = {}^T\boldsymbol{x}\,{}^TAA\overline{\boldsymbol{x}} = {}^T\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \\ \langle \lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}\rangle &= {}^T(\lambda\boldsymbol{x})\overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \lambda\overline{\lambda}\,{}^T\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = |\lambda|^2\|\boldsymbol{x}\|^2\end{aligned}$$

なので、$\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ より $|\lambda| = 1$ が得られる。

よって実数の固有値は ± 1 のいずれかとなるが、3 次の直交行列の固有方程式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \tag{28}$$

は実数係数の 3 次方程式なので、少なくとも一つ実数解を持つ。固有値 λ はすべて $|\lambda| = 1$ なので、$f(\lambda)$ は以下のいずれかの形となる。

1. $f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$
2. $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$
3. $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$
4. $f(\lambda) = (\lambda + 1)^3$
5. $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$
6. $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$

これらの定数項はそれぞれ以下のようになる。

1. $f(0) = -1$
2. $f(0) = 1$
3. $f(0) = -1$
4. $f(0) = 1$

5. $f(0) = -1$
6. $f(0) = 1$

一方 (28) より、定数項は $f(0) = |-A| = -|A|$ でなければいけないので、$|A| = \pm 1$ より、$|A| = 1$ のときは定数項は -1 だから上の 1. か 3. か 5. で、この場合はいずれも $\lambda = 1 = |A|$ を解に持つ。$|A| = -1$ のときは定数項は 1 だから上の 2. か 4. か 6. で、この場合もいずれも $\lambda = -1 = |A|$ を解に持つ。■

なお、3 次の直交行列の場合は、固有方程式の具体的な因数分解もそれほど難しくない。

$A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) = |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & \lambda - b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & \lambda - c_3 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\lambda^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_2 c_3 - b_3 c_2 + c_3 a_1 - c_1 a_3)\lambda - |A|
\end{aligned}
$$

となるが、(19) より、

$$
\begin{aligned}
a_1 b_2 - a_2 b_1 &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_z = |A| c_3, \\
b_2 c_3 - b_3 c_2 &= (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_x = |A| a_1, \\
c_3 a_1 - c_1 a_3 &= (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})_y = |A| b_2
\end{aligned}
$$

となるので、$a_1 + b_2 + c_3 = \mathrm{tr}(A)$ と書けば、

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= \lambda^3 - \mathrm{tr}(A)\lambda^2 + |A|\mathrm{tr}(A)\lambda - |A| \\
&= (\lambda - |A|)(\lambda^2 + (|A| - \mathrm{tr}(A))\lambda + 1) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

と因数分解される。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は単位ベクトルなので、$\mathrm{tr}(A) = a_1 + b_2 + c_3$ は、$-3 \leq \mathrm{tr}(A) \leq 3$ となるが、その範囲はもう少し狭くなる。

補題 9. 3 次の直交行列 A の対角成分の和 $\mathrm{tr}(A) = a_1 + b_2 + c_3$ は、

$$|\mathrm{tr}(A) - |A|| \leq 2$$

となる。よって、$|A| = 1$ なら $-1 \leq \mathrm{tr}(A) \leq 3$, $|A| = -1$ なら $-3 \leq \mathrm{tr}(A) \leq 1$ である。

証明

(29) より、右側の 2 次方程式

$$\lambda^2 + (|A| - \mathrm{tr}(A))\lambda + 1 = 0$$

の解を考える。まず判別式 $D = (|A| - \mathrm{tr}(A))^2 - 4 \geq 0$ の場合、補題 8 よりその解はすべて ± 1 でなくてはならない。よって、$1 \pm (|A| - \mathrm{tr}(A)) + 1 = 0$ より $\mathrm{tr}(A) = |A| \pm 2$ となりこの場合は補題が成立する。

$D = (|A| - \mathrm{tr}(A))^2 - 4 < 0$ の場合は、$|\mathrm{tr}(A) - |A|| < 2$ となるのでやはり補題は成立する。なお、この $D < 0$ の場合は、解は

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(A) - |A|}{2} \pm \frac{i\sqrt{-D}}{2}$$

となるので、

$$|\lambda|^2 = \left(\frac{\mathrm{tr}(A) - |A|}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)^2 = \frac{(\mathrm{tr}(A) - |A|)^2}{4} + \frac{4 - (|A| - \mathrm{tr}(A))^2}{4} = 1$$

となって、確かに補題 8 を満たしていることもわかる。■

$\mathrm{tr}(A)$ の最大値、最小値を考えるには、$\mathrm{tr}(A) = a_1 + b_2 + c_3 = a_1 + b_2 + \varepsilon(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ と書くこともできるので、a_1, b_2, a_2, b_2 を変数と見て考えることもできるが、制約条件が色々あるため、その方向ではかなり難しい。

5 直交行列が回転変換と反転の合成であること

本節では、直交行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ による一次変換が、$|A| = 1$ の場合は 3 節で述べた回転変換となり、$|A| = -1$ の場合は回転変換と反転の合成となることを示す。そして、回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ と回転角 ψ の具体的な計算方法についても考察する。

まず、$|A| = 1$ の場合を考える。補題 8 より、A は固有値 1 を持ち、その単位固有ベクトル (実数ベクトル) のひとつを $\boldsymbol{n}$ とする。

$$A\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}, \quad |\boldsymbol{n}| = 1 \tag{30}$$

補題 1 よりこの $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$ の形で表すことができる。ここで、$|\theta|\leq\pi/2,\ 0\leq\phi<2\pi$ であるが、$\theta<0$ の場合は、$\boldsymbol{n}$ の代わりに $-\boldsymbol{n}$ と取り直すことによって、$\theta\geq 0$ とできるので、$0\leq\theta\leq\pi/2$ としてよい。また、$\theta=\pi/2$ のとき ($\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$) は、$\phi=0$ とする。

補題 3 より、$\boldsymbol{n},\ \hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta),\ \check{\boldsymbol{n}}=\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ は右手系の正規直交系となる。$\boldsymbol{n},\ \hat{\boldsymbol{n}},\ \check{\boldsymbol{n}}$ の A による像 $A\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n},\ A\hat{\boldsymbol{n}},\ A\check{\boldsymbol{n}}$ は、補題 5 によりやはり互いに直交する単位ベクトルとなり、$|A|=1$ より

$$(A\hat{\boldsymbol{n}})\times(A\check{\boldsymbol{n}})=A(\hat{\boldsymbol{n}}\times\check{\boldsymbol{n}})=A\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n} \tag{31}$$

となるので、右手系の正規直交系となる。すなわち、$A\hat{\boldsymbol{n}},\ A\check{\boldsymbol{n}}$ は、$\boldsymbol{n}$ に垂直な面上で $\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}$ を回転したものになるので (図 4 と同様)、その回転角を ψ とすれば、

$$\begin{aligned} A\hat{\boldsymbol{n}} &= \hat{\boldsymbol{n}}\cos\psi+\check{\boldsymbol{n}}\sin\psi \\ A\check{\boldsymbol{n}} &= -\hat{\boldsymbol{n}}\sin\psi+\check{\boldsymbol{n}}\cos\psi \\ A\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{32}$$

と書けることになる。すなわち、任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を正規直交系 $\boldsymbol{n},\ \hat{\boldsymbol{n}},\ \check{\boldsymbol{n}}$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{n}+\beta\hat{\boldsymbol{n}}+\gamma\check{\boldsymbol{n}}$$

と表すと、その A による像は、

$$A\boldsymbol{x}=\alpha A\boldsymbol{n}+\beta A\hat{\boldsymbol{n}}+\gamma A\check{\boldsymbol{n}}=\alpha\boldsymbol{n}+(\beta\cos\phi-\gamma\sin\psi)\hat{\boldsymbol{n}}+(\beta\sin\psi+\gamma\cos\psi)\check{\boldsymbol{n}}$$

となり、$\boldsymbol{n}$ 方向の成分は不変で、$\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}$ に関する回転となっていることがわかる。これにより、A が $\boldsymbol{n}$ を回転軸ベクトルとする ψ 回転を表すことが示された。

$|A|=-1$ の場合は、固有値は -1 で、(30) が

$$A\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n},\quad |\boldsymbol{n}|=1 \tag{33}$$

に変わり、(31) も

$$(A\hat{\boldsymbol{n}})\times(A\check{\boldsymbol{n}})=-A(\hat{\boldsymbol{n}}\times\check{\boldsymbol{n}})=-A\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n} \tag{34}$$

となるので、$\boldsymbol{n},\ \hat{\boldsymbol{n}},\ \check{\boldsymbol{n}}$ の像 $A\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n},\ A\hat{\boldsymbol{n}},\ A\check{\boldsymbol{n}}$ は、左手系の正規直交系となる。

$\boldsymbol{n}$ 方向の反転変換を B とすると、B は、

$$B\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}, \quad B\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{n}}, \quad B\check{\boldsymbol{n}} = \check{\boldsymbol{n}} \tag{35}$$

となるので、合成変換 BA を考えれば、

$$BA\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}, \quad BA\hat{\boldsymbol{n}} = A\hat{\boldsymbol{n}}, \quad BA\check{\boldsymbol{n}} = A\check{\boldsymbol{n}}$$

となって、(34) により右手系の正規直交系となるから、$|A| = 1$ の場合と同様にして、BA は回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ に関する ψ の回転変換となる。すなわち、$|A| = -1$ の場合は、$A = B^{-1}BA$ は、回転変換 BA と、$\boldsymbol{n}$ 方向の反転変換 $B^{-1} = B$ の合成変換であることがわかる。

これで本節の目的の前半部分が示されたことになる。次は、具体的な回転軸ベクトルと回転角の計算方法について考える。回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、既に述べたように固有値 $\lambda = |A|$ に対する単位固有ベクトルを取ればよいので A から回転軸ベクトルを計算することは難しくない。

$\boldsymbol{p}(\phi, \theta)$ の ϕ, θ を確定する代わりに、$\cos\phi, \sin\phi$ 等を求めることを考える。

$\boldsymbol{p}(\phi, \theta) = \boldsymbol{n} = {}^T(n_1, n_2, n_3)$ で、上に述べたように $n_3 \geq 0$ としてよいから、

$$\sin\theta = n_3, \quad \cos\theta = \sqrt{1 - n_3^2} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \ (= r \text{ とする})$$

であり、$n_3 = 1$ ならば $\theta = \pi/2, \phi = 0$ より $\cos\phi = 1, \sin\phi = 0$ で、$n_3 < 1$ ならば $0 \leq \theta < \pi/2, r > 0$ で、

$$\cos\phi = \frac{n_1}{\cos\theta} = \frac{n_1}{r}, \quad \sin\phi = \frac{n_2}{\cos\theta} = \frac{n_2}{r}$$

となる。よって、$n_3 = 1$ ならば $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}, \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{i}, \check{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{j}$、$0 \leq n_3 < 1$ ならば

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1n_3/r \\ n_2n_3/r \\ -r \end{bmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_2/r \\ n_1/r \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり、いずれも固有ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分を使って表すことができるから、間接的に A の成分で表せることになる。

回転角 ψ については、$\hat{\boldsymbol{n}}$、$\check{\boldsymbol{n}}$ の像 (32) の右辺は、丁度 (16), (17) の式に一致するので、その z 成分から計算できることがわかる。すなわち、$A\hat{\boldsymbol{n}}$ の z 成分を m_3、$A\check{\boldsymbol{n}}$ の z 成分を ℓ_3 とすると、これらは $\boldsymbol{n}$ と A の成分で表すことができ、

$$m_3 = -\cos\psi\cos\theta, \quad \ell_3 = \sin\psi\cos\theta$$

より、$\theta<\pi/2$ のときは

$$\cos\psi=-\frac{m_3}{\cos\theta}=-\frac{m_3}{r},\quad \sin\psi=\frac{\ell_3}{\cos\theta}=\frac{\ell_3}{r}$$

となる。これにより $\theta<\pi/2$ のときは回転角 ψ が一意に決定する。

$\theta=\pi/2$ の場合は $\phi=0$ より $\hat{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{i},\check{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{j}$ で、

$$A\hat{\boldsymbol{n}}=\left[\begin{array}{c}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{array}\right]$$

となるので、$\hat{\boldsymbol{n}}$ の A による像の x 成分 m_1, y 成分 m_2 から $\cos\psi,\sin\psi$ が計算できることになる。

なお、$|A|=-1$ の場合の反転変換 B の行列表現であるが、これは、(35) より、

$$B[\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]=[-\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}] \tag{36}$$

であり、よって右から $[\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]$ の逆行列、すなわちその転置行列をかければ、

$$B=[-\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}][\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]^{-1}=[-\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]\,{}^{T}[\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}] \tag{37}$$

により得られる。$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$, $\hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{p}}(\phi,\theta)$, $\check{\boldsymbol{n}}=\check{\boldsymbol{p}}(\phi)$ を使って実際に計算してみる。

$$\begin{aligned}
B &= [-\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]\,{}^{T}[\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]\\
&= \left[\begin{array}{ccc}-\cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\\ -\sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}\cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta & \sin\theta\\ \cos\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & -\cos\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{array}\right]\\
&= [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]
\end{aligned}$$

と列ベクトル毎に分けて書き下すと、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= \left[\begin{array}{c}-\cos^2\phi\cos^2\theta+\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin^2\phi\\ -\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta+\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta-\sin\phi\cos\phi\\ -2\cos\phi\sin\theta\cos\theta\end{array}\right]\\
&= \left[\begin{array}{c}1-2\cos^2\phi\cos^2\theta\\ -2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta\\ -2\cos\phi\sin\theta\cos\theta\end{array}\right]\ (=\ \boldsymbol{i}-(2\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{n}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= \begin{bmatrix} -\cos\phi\sin\phi\cos^2\theta + \cos\phi\sin\phi\sin^2\theta - \sin\phi\cos\phi \\ -\sin^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta \\ 1-2\sin^2\phi\cos^2\theta \\ -2\sin\phi\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \ (= \ \boldsymbol{j} - (2\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{n}), \\
\boldsymbol{\gamma} &= \begin{bmatrix} -2\cos\phi\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\phi\sin\theta\cos\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos\phi\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\phi\sin\theta\cos\theta \\ 1-2\sin^2\theta \end{bmatrix} \ (= \ \boldsymbol{k} - (2\sin\theta)\boldsymbol{n})
\end{aligned}
$$

となる。よって B は対称行列となるので、よって $B = {}^TB = B^{-1}$ より、B も直交行列となる。さらによく見ると、$E-B$ が少し易しい形になることがわかる。

$$E - B = [(2\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{n}, (2\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{n}, (2\sin\theta)\boldsymbol{n}] = 2\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n}$$

と変形できるので、よって

$$B = E - 2\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n} = E - 2\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}[n_1 \ n_2 \ n_3] \tag{38}$$

となって、これも固有ベクトル $\boldsymbol{n}$ から容易に計算できる。なお、$\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n}$ は 3×1 行列と 1×3 行列の積だから 3×3 行列となっていることに注意する。

この (38) が (35) を満たすことは、

$$
\begin{aligned}
B\boldsymbol{n} &= E\boldsymbol{n} - 2(\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \ = \ \boldsymbol{n} - 2\boldsymbol{n}({}^T\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}) \ = \ \boldsymbol{n} - 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}) \ = \ -\boldsymbol{n}, \\
B\hat{\boldsymbol{n}} &= \hat{\boldsymbol{n}} - 2(\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n})\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{n}} - 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) = \hat{\boldsymbol{n}}, \\
B\check{\boldsymbol{n}} &= \check{\boldsymbol{n}} - 2(\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n})\check{\boldsymbol{n}} = \check{\boldsymbol{n}} - 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\check{\boldsymbol{n}}) = \check{\boldsymbol{n}}
\end{aligned}
$$

のように確認できる。

なお、(38) は別な方法でも導くことができる。(37) より、

$$B = [-\boldsymbol{n}, \hat{\boldsymbol{n}}, \check{\boldsymbol{n}}]\begin{bmatrix} {}^T\boldsymbol{n} \\ {}^T\hat{\boldsymbol{n}} \\ {}^T\check{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n} + \hat{\boldsymbol{n}}\,{}^T\hat{\boldsymbol{n}} + \check{\boldsymbol{n}}\,{}^T\check{\boldsymbol{n}}$$

となる。一方、$N = [\boldsymbol{n}, \hat{\boldsymbol{n}}, \check{\boldsymbol{n}}]$ とすると、これは直交行列となり、$N\,{}^TN = E$ であるから、

$$N\,{}^TN = \boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n} + \hat{\boldsymbol{n}}\,{}^T\hat{\boldsymbol{n}} + \check{\boldsymbol{n}}\,{}^T\check{\boldsymbol{n}} = E \tag{39}$$

となる。これにより、B は、

$$B=-\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n}+(E-\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n})=E-2\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n}$$

となって (38) が得られる。

同様にして、$|A|=1$ の直交行列 A を、(32) を用いて $\boldsymbol{n}$ で表すことを考えてみる。(32) より、

$$\begin{aligned}
AN &= A[\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}] \;=\; [A\boldsymbol{n},A\hat{\boldsymbol{n}},A\check{\boldsymbol{n}}]\\
&= [\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{n}}\cos\psi+\check{\boldsymbol{n}}\sin\psi,-\hat{\boldsymbol{n}}\sin\psi+\check{\boldsymbol{n}}\cos\psi]\\
&= [\boldsymbol{n},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}]+[\boldsymbol{0},\hat{\boldsymbol{n}},\check{\boldsymbol{n}}]\cos\psi+[\boldsymbol{0},\check{\boldsymbol{n}},-\hat{\boldsymbol{n}}]\sin\psi\\
&= [\boldsymbol{n},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}](1-\cos\psi)+N\cos\psi+[\boldsymbol{0},\check{\boldsymbol{n}},-\hat{\boldsymbol{n}}]\sin\psi
\end{aligned}$$

となるが、$[\boldsymbol{0},\check{\boldsymbol{n}},-\hat{\boldsymbol{n}}]=[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\times\hat{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\times\check{\boldsymbol{n}}]=\boldsymbol{n}\times N$ より

$$AN=[\boldsymbol{n},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}](1-\cos\psi)+N\cos\psi+(\boldsymbol{n}\times N)\sin\psi$$

と書ける。これに右から $N^{-1}={}^TN$ をかけると、

$$A=[\boldsymbol{n},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}]\,{}^TN(1-\cos\psi)+N\,{}^TN\cos\psi+(\boldsymbol{n}\times N)\,{}^TN\sin\psi$$

となるが、$[\boldsymbol{n},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}]\,{}^TN=\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n}$, $N\,{}^TN=E$ で、補題 7 より

$$(\boldsymbol{n}\times N)\,{}^TN=\boldsymbol{n}\times(N\,{}^TN)=\boldsymbol{n}\times E$$

となるので、結局、

$$A=E\cos\psi+\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n}(1-\cos\psi)+(\boldsymbol{n}\times E)\sin\psi \tag{40}$$

が得られる。これで、A を回転軸ベクトル (1 の固有ベクトル) $\boldsymbol{n}$ と回転角 ψ で表すことができたことになる。$\boldsymbol{n}={}^T(n_1,n_2,n_3)$ の成分で表せば、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n} &= [n_in_j]_{i,j} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3\\ n_1n_2 & n_2^2 & n_2n_3\\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{n}\times E &= [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{i},\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{j},\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}] = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2\\ n_3 & 0 & -n_1\\ -n_2 & n_1 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

より、

$$A = (\cos\psi)E + (1-\cos\psi)\boldsymbol{n}\,{}^T\boldsymbol{n} + (\sin\psi)\boldsymbol{n}\times E = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$$

と列ベクトル毎に分けて書き下すと、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{bmatrix} \cos\psi + n_1^2(1-\cos\psi) \\ n_1n_2(1-\cos\psi)+n_3\sin\psi \\ n_1n_3(1-\cos\psi)-n_2\sin\psi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} n_1n_2(1-\cos\psi)-n_3\sin\psi \\ \cos\psi + n_2^2(1-\cos\psi) \\ n_2n_3(1-\cos\psi)+n_1\sin\psi \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{c} &= \begin{bmatrix} n_1n_3(1-\cos\psi)+n_2\sin\psi \\ n_2n_3(1-\cos\psi)-n_1\sin\psi \\ \cos\psi + n_3^2(1-\cos\psi) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{41}$$

となる。

6 直交行列の軸回転行列による表現

本節では、$|A|=1$ の直交行列 A を軸回転行列で表現すること、およびそのそれぞれの回転角を計算する方法について考察する。

$|A|=1$ の直交行列 $A=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は、補題 3 により、(12) の形に表すことができる。それを変形する。まずは ψ を外に出すと、

$$\begin{aligned}
A &= [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{p}}\cos\psi + \check{\boldsymbol{p}}\sin\psi, -\hat{\boldsymbol{p}}\sin\psi + \check{\boldsymbol{p}}\cos\psi] \\
&= [\boldsymbol{p},\check{\boldsymbol{p}},-\hat{\boldsymbol{p}}]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \\ 0 & -\cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} = [\boldsymbol{p},\check{\boldsymbol{p}},-\hat{\boldsymbol{p}}]A_x\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

の積にできる。次はこの左の行列から θ を外に出す。$\bar{\boldsymbol{p}}(\phi) = {}^T(\cos\phi,\sin\phi,0)$ と書くと、

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{p}}\cos\theta + \boldsymbol{k}\sin\theta, \quad \hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{p}}\sin\theta - \boldsymbol{k}\cos\theta$$

なので、

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{p},\check{\boldsymbol{p}},-\hat{\boldsymbol{p}}] &= [\bar{\boldsymbol{p}}\cos\theta + \boldsymbol{k}\sin\theta, \check{\boldsymbol{p}}, -\bar{\boldsymbol{p}}\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta] \\
&= [\bar{\boldsymbol{p}},\check{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = [\bar{\boldsymbol{p}},\check{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k}]A_y(-\theta)
\end{aligned}$$

と書ける。さらに、

$$[\bar{\boldsymbol{p}},\check{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k}]=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=A_z(\phi)$$

なので、結局

$$A=A_z(\phi)A_y(-\theta)A_x\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right) \tag{42}$$

の形に書けることになる。

なお、(42) では、3 軸すべての方向の回転が使われているが、直交行列 (回転変換) の軸回転行列による表現としては、2 軸 (z-y-z, x-z-x など) だけの形も良く使われている。そのような形にするには、最初の式を変えればよい。

すなわち、$A=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が右手系の正規直交系なので、$\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ も右手系の正規直交系となるから、補題 3 により、

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{a}=\hat{\boldsymbol{p}}\cos\psi+\check{\boldsymbol{p}}\sin\psi,\quad \boldsymbol{b}=-\hat{\boldsymbol{p}}\sin\psi+\check{\boldsymbol{p}}\cos\psi \tag{43}$$

と表すことも可能である。そこからスタートすれば、

$$\begin{aligned}A &= [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = [\hat{\boldsymbol{p}}\cos\psi+\check{\boldsymbol{p}}\sin\psi,-\hat{\boldsymbol{p}}\sin\psi+\check{\boldsymbol{p}}\cos\psi,\boldsymbol{p}]\\ &= [\hat{\boldsymbol{p}},\check{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p}]\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= [\bar{\boldsymbol{p}}\sin\theta-\boldsymbol{k}\cos\theta,\check{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{p}}\cos\theta+\boldsymbol{k}\sin\theta]A_z(\psi)\\ &= [\bar{\boldsymbol{p}},\check{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\sin\theta & 0 & \cos\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta\end{bmatrix}A_z(\psi) = A_z(\phi)A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)A_z(\psi)\end{aligned} \tag{44}$$

となり、A を z-y-z の 2 軸の回転で表現できることになる。

この角の計算可能性については、例えば後者の z-y-z の回転の方で考えると、(43) の $\boldsymbol{c}={}^T(c_1,c_2,c_3)$ から、

$$\sin\theta=c_3\ \left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right),\quad \cos\theta=\sqrt{1-c_3^2}=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\ (=r\ \text{とする})$$

と求まり、さらに、$\theta = \pm\pi/2$ なら $\phi = 0$、$|\theta| < \pi/2$ なら

$$\cos\phi = \frac{c_1}{\cos\theta} = \frac{c_1}{r}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{\cos\theta} = \frac{c_2}{r}$$

となり θ, ϕ は $\boldsymbol{c}$ で決定する。ψ は、$a_3 = -\cos\theta\cos\psi$, $b_3 = \cos\theta\sin\psi$ なので、$|\theta| < \pi/2$ なら

$$\cos\psi = -\frac{a_3}{r}, \quad \sin\psi = \frac{b_3}{r} \tag{45}$$

と求まる。よってこの場合、軸回転行列も A の成分を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned}
A_z(\phi) &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1/r & -c_2/r & 0 \\ c_2/r & c_1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
A_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{c_1^2 + c_2^2} & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \\
A_z(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3/r & -b_3/r & 0 \\ b_3/r & -a_3/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。

$\theta = \pm\pi/2$ の場合は、$c_3 = \pm 1$ で $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} = \pm\boldsymbol{k}$, よって $a_3 = b_3 = 0$ で、$\phi = 0$ より $\hat{\boldsymbol{p}} = \pm\boldsymbol{i}$, $\check{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{j}$ となり、

$$\boldsymbol{a} = \pm\boldsymbol{i}\cos\psi + \boldsymbol{j}\sin\psi, \quad \boldsymbol{b} = \mp\boldsymbol{i}\sin\psi + \boldsymbol{j}\cos\psi$$

となるので、a_2, b_2 から $\sin\psi, \cos\psi$ を求めることができる。この場合、

$$\begin{aligned}
A_z(\phi) &= A_z(0) = E, \\
A_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= A_y\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}\right) = E, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
A_z(\psi) &= \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。

7 回転変換の軸回転行列による表現

本節では、回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ の回りの ψ 回転の回転変換を、軸回転行列で表現すること、およびその角の計算について考察する。

回転変換を直交行列で表現すること、およびその逆の直交行列から回転変換の軸と角を求める方法は 5 節で考察し、直交行列を軸回転行列で表現することは 6 節で考察したが、回転変換を 6 節のような 3 つの軸回転行列の合成で表現することは実はそれほど容易ではない。もちろん、5 節、6 節の話をつなげて、途中に直交行列を介在することで、回転変換を直交行列で表してそれを軸回転行列で表すことは原理的には不可能ではないが、あまり綺麗にはならない。

例えば、6 節の最後に述べた方法で、回転変換の表現行列 (41) から軸回転の角 θ' を求めようとすると、

$$\sin\theta' = c_3 = \cos\psi + n_3^2(1-\cos\psi), \quad \cos\theta' = \sqrt{1-(\cos\psi + n_3^2(1-\cos\psi))^2}$$

のようになってしまって、簡単な式にはならない。すなわち、回転変換の表現行列 (41) を角 ϕ, θ, ψ を用いて表すことは可能で、そしてそれを軸回転角の ϕ', θ', ψ' で表すことは可能だ (解はある) が、その解を表す式は易しくなく、それらの角同士の関係は綺麗な形にはならない。

例えば、逆に (44) から回転変換の回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ を計算することも一応はできるが、これもあまり綺麗な式にはならない。それを少し紹介する。(44) の回転軸ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、

$$A\boldsymbol{n} = A_z(\phi)A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)A_z(\psi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \tag{46}$$

より、

$$A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)A_z(\psi)\boldsymbol{n} = A_z(-\phi)\boldsymbol{n}$$

となるが、$A_z(\psi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ と書くと、補題 6 より $A_z(-\phi) = A_z(-\phi-\psi)A_z(\psi)$ となるので、

$$A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\boldsymbol{m} = A_z(-\phi-\psi)\boldsymbol{m} \tag{47}$$

となる。

$$A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - A_z(-\phi-\psi) = \begin{bmatrix} \sin\theta - \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) & \cos\theta \\ \sin(\phi+\psi) & 1-\cos(\phi+\psi) & 0 \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta - 1 \end{bmatrix}$$

なので、(47) となる $\boldsymbol{m}$ は、$\sin\theta \neq 1$ かつ $\cos(\phi+\psi) \neq 1$ であれば

$$\boldsymbol{m} = k\,{}^T\!\left(1, \frac{-\sin(\phi+\psi)}{1-\cos(\phi+\psi)}, \frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}\right) \tag{48}$$

と書ける (k はスカラー)。このとき $\boldsymbol{n}$ は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= A_z(-\psi)\boldsymbol{m} = k\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-\sin(\phi+\psi)}{1-\cos(\phi+\psi)} \\ \dfrac{-\cos\theta}{1-\sin\theta} \end{bmatrix} \\
&= k\begin{bmatrix} \cos\psi - \sin\psi\sin(\phi+\psi)/(1-\cos(\phi+\psi)) \\ -\sin\psi - \cos\psi\sin(\phi+\psi)/(1-\cos(\phi+\psi) \\ -\cos\theta/(1-\sin\theta) \end{bmatrix} \\
&= k\begin{bmatrix} (\cos\psi - \cos\psi\cos(\phi+\psi) - \sin\psi\sin(\phi+\psi))/(1-\cos(\phi+\psi)) \\ (-\sin\psi + \sin\psi\cos(\phi+\psi) - \cos\psi\sin(\phi+\psi))/(1-\cos(\phi+\psi)) \\ -\cos\theta/(1-\sin\theta) \end{bmatrix} \\
&= k\begin{bmatrix} (\cos\psi - \cos\phi)/(1-\cos(\phi+\psi)) \\ (-\sin\psi - \sin\phi)/(1-\cos(\phi+\psi)) \\ -\cos\theta/(1-\sin\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{49}$$

となる。k は、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\cos\psi - \cos\phi}{1-\cos(\phi+\psi)}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\psi - \sin\phi}{1-\cos(\phi+\psi)}\right)^2 &= \frac{2-2(\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi)}{(1-\cos(\phi+\psi))^2} \\
&= \frac{2}{1-\cos(\phi+\psi)}, \\
\left(\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)^2 &= \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}
\end{aligned}$$

より、

$$k = \frac{\pm 1}{\sqrt{\dfrac{2}{1-\cos(\phi+\psi)} + \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}} \tag{50}$$

となる。

$\sin\theta = 1$ の場合は、$\theta = \pi/2$ より $A_y(\pi/2-\theta) = A_y(0) = E$ となり、

$$A = A_z(\phi)A_z(\psi) = A_z(\phi+\psi)$$

となるので、$\phi+\psi\neq 0$ であれば回転軸ベクトルは $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ と取れるが、$\phi+\psi=0$ なら $A=E$ となり回転を表さない。

$\sin\theta\neq 1$ で $\cos(\phi+\psi)=1$ であれば、$\phi+\psi=0$ なので、(47) は

$$A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}$$

となり、よって $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{j}$ と取れるから、

$$\boldsymbol{n}=A_z(-\psi)\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}\sin\psi\\ \cos\psi\\ 0\end{bmatrix}$$

となる。

(49), (50) により回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ を (46) の軸回転角 ψ,ϕ,θ で表すことができ、まだ多少の変形は可能ではあるが、あまり綺麗な形にはならないことがわかるだろう。つまり、(44) の形と回転変換はあまり相性がよくない。

しかし、「3 つの軸回転行列の合成での表現」という制約を取り除けば回転変換を軸回転行列で表現することは比較的容易である。

回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{p}(\phi,\theta)$ の形で表せば、図 3 の $\boldsymbol{n}$ の回りの ψ 回転は、

1. $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{k}$ に移動するような回転、すなわち z 軸に関して $-\phi$ 回転して $\boldsymbol{n}$ を xz 平面に移動し、次に y 軸に関して (z 軸から x 軸方向へ) $-(\pi/2-\theta)$ 回転をして、
2. そののちに z 軸に関して ψ 回転して、
3. 1. の逆、すなわち、y 軸に関して $(\pi/2-\theta)$ 回転してから z 軸に関して ϕ 回転

とすることで実現できることがわかる。すなわち、

$$A=A_z(\phi)A_y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)A_z(\psi)A_y\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)A_z(-\phi) \tag{51}$$

のように 5 個の軸回転行列の積で表現できることになる。

計算はかなり煩雑なので省略するが、これを展開すると、実際 (51) が (41)、すなわち (40) に一致することを確認することもできる。

8 例

本節では、これまでに見てきた直交行列と回転軸ベクトル、回転角、軸回転などに関する計算例をいくつか紹介する。

8.1 例 1

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

これは、

$$\begin{aligned} 49A^TA &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \\ -6 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4+9+36 & 6-18+12 & 12+6-18 \\ 6-18+12 & 9+36+4 & 18-12-6 \\ 12+6-18 & 18-12-6 & 36+4+9 \end{bmatrix} = 49E \end{aligned}$$

となるので A は直交行列。

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 36+36+36+216-8+27 = 343 = 7^3$$

なので、$|A| = 1$ となるので、回転変換の行列になっている。

$$A - E = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

より、単位固有ベクトル (回転軸ベクトル) $\boldsymbol{n} = {}^T(n_1, n_2, n_3)$ は、

$$\begin{cases} 5n_1 + 3n_2 + 6n_3 &= 0 \\ 3n_1 - n_2 - 2n_3 &= 0 \\ 6n_1 - 2n_2 - 4n_3 &= 0 \end{cases}$$

を満たすので、$n_1 = 0,\, n_2 + 2n_3 = 0$、よって

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

と取れる。次は、回転角 ψ を計算する。$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}(\phi, \theta)$ とすると、

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

で、

$$\cos\phi = \frac{n_1}{\cos\theta} = 0, \quad \sin\phi = \frac{n_2}{\cos\theta} = -1 \quad \left(\phi = \frac{3\pi}{2}\right)$$

となる。よって、

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{i}$$

となるから、

$$A\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{7\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3+12 \\ -6+4 \\ 2-6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 15 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{m}, \quad A\check{\boldsymbol{n}} = A\boldsymbol{i} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\ell}$$

となり、$m_3 = -\cos\psi\cos\theta,\, \ell_3 = \sin\psi\cos\theta$ より

$$\cos\psi = -\frac{m_3}{\cos\theta} = \frac{4}{7\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{7}, \quad \sin\psi = \frac{\ell_3}{\cos\theta} = \frac{6}{7}\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \tag{53}$$

となる。よって、(52) が回転軸 (yz 平面内)、(53) の ψ ($\in (0, \pi/2)$) が回転角となる回転変換を表すことになる。

次に、この回転を、$z-y-z$ の軸回転

$$A = A_z(\phi')A_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)A_z(\psi')$$

で表現する角を求めてみる。(43) より $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}(\phi',\theta')$ とすれば

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-6\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi'\cos\theta'\\\sin\phi'\cos\theta'\\\sin\theta'\end{bmatrix}$$

より

$$\sin\theta'=\frac{3}{7},\quad \cos\theta'=\sqrt{1-\frac{9}{49}}=\frac{2\sqrt{10}}{7} \tag{54}$$

となり、

$$\cos\phi'=-\frac{6}{7}\,\frac{7}{2\sqrt{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin\phi'=-\frac{2}{7}\,\frac{7}{2\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}} \tag{55}$$

で、(45) より

$$\cos\psi'=-\frac{a_3}{\cos\theta'}=-\frac{6}{7}\,\frac{7}{2\sqrt{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin\psi'=\frac{b_3}{\cos\theta'}-\frac{2}{7}\,\frac{7}{2\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

となり、よってこの場合は $\phi'=\psi'$ $(\in(\pi,3\pi/2))$ となる。

なお、$\phi'-\pi=\bar{\phi}\in(0,\pi/2)$ とすると、$\cos\bar{\phi}=3/\sqrt{10}$ より、

$$\cos 2\bar{\phi}=2\cos^2\bar{\phi}-1=\frac{18}{10}-1=\frac{4}{5}$$

となるので、$\bar{\phi}$ は、3:4:5 の直角三角形の最小角の半分になる。

8.2 例 2

$$A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-8&-4\\4&4&-7\\8&-1&4\end{bmatrix}$$

これは、

$$81A^TA=\begin{bmatrix}1&-8&-4\\4&4&-7\\8&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&8\\-8&4&-1\\-4&-7&4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{bmatrix} = 81E$$

となるので A は直交行列。

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 4 & 4 & -7 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -7 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 9(32+49) = 9^3$$

なので、$|A| = 1$ となり A は回転変換。

$$A - E = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & -8 & -4 \\ 4 & -5 & -7 \\ 8 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

より、$\boldsymbol{n} = {}^T(n_1, n_2, n_3)$ は、

$$\begin{cases} 8n_1 + 8n_2 + 4n_3 & = 0 \\ 4n_1 - 5n_2 - 7n_3 & = 0 \\ 8n_1 - n_2 - 5n_3 & = 0 \end{cases}$$

より、$n_2 + n_3 = 0,\ 2n_1 + n_2 = 0$、よって

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{56}$$

となる。これを $\boldsymbol{p}(\phi, \theta)$ とすれば、

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{2}{3}, \quad \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \cos\phi &= \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\phi = -\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

より、

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
A\hat{\boldsymbol{n}} &= \frac{1}{27\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2+32+20 \\ 8-16+35 \\ 16+4-20 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \check{\boldsymbol{n}}, \\
A\check{\boldsymbol{n}} &= \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2-8 \\ 8+4 \\ 16-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = -\hat{\boldsymbol{n}}
\end{aligned}
$$

となるので、$m_3 = -\cos\psi\cos\theta = 0$ より $\cos\psi = 0$, $\ell_3 = \sin\psi\cos\theta = 5/(3\sqrt{5})$ より $\sin\psi = 1$, よって $\psi = \pi/2$ となるので、A は回転軸ベクトル ${}^T(1/3, -2/3, 2/3)$ の回りの $\pi/2$ 回転となる。

軸回転角は、$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}(\phi', \theta')$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\sin\theta' &= \frac{4}{9}, \quad \cos\theta' = \sqrt{1-\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{65}}{9}, \\
\cos\phi' &= -\frac{4}{9}\frac{9}{\sqrt{65}} = -\frac{4}{\sqrt{65}}, \quad \sin\phi' = -\frac{7}{9}\frac{9}{\sqrt{65}} = -\frac{7}{\sqrt{65}}, \\
\cos\psi' &= -\frac{a_3}{\cos\theta'} = -\frac{8}{9}\frac{9}{\sqrt{65}} = -\frac{8}{\sqrt{65}}, \\
\sin\psi' &= \frac{b_3}{\cos\theta'} = -\frac{1}{9}\frac{9}{\sqrt{65}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}
\end{aligned}
$$

となる。

なお、$\bar{\phi} = \phi' - \pi \in (0, \pi/2)$, $\bar{\psi} = \psi' - \pi \in (0, \pi/2)$ とすると、

$$
\cos(\bar{\phi} - \bar{\psi}) = \frac{32}{65} + \frac{7}{65} = \frac{3}{5}
$$

となるので、$\bar{\phi} - \bar{\psi}$ は 3:4:5 の直角三角形の真ん中の角に等しい。

8.3 例 3

$$
A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

これは、

$$
9A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2-4+2 & 2+2-4 \\ 2-4+2 & 4+4+1 & 4-2-2 \\ 2+2-4 & 4-2-2 & 4+1+4 \end{bmatrix} = 9E
$$

となるので A は直交行列。

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4-4-4-8+1-8 = -27
$$

なので、$|A| = -1$、よって A は回転 + 反転 ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は左手系)。

$$
A + E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}
$$

より、$\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、

$$
\begin{cases} 4n_1 + 2n_2 - 2n_3 & = 0 \\ 2n_1 + n_2 - n_3 & = 0 \\ 2n_1 + n_2 + 5n_3 & = 0 \end{cases}
$$

より、$2n_1 + n_2 = 0,\ n_3 = 0$ となるので、

$$
\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{57}
$$

となる。この $\boldsymbol{n}$ に関する反転行列 B は、(38) より、

$$
\begin{aligned}
B &= E - 2\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n} = E - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}[1\ \ -2\ 0] = E - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。よって A の回転部分 BA は、

$$
BA = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+8 & 6-8 & -6-4 \\ 4-6 & 8+6 & -8+3 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}
$$

$$= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 11 & -2 & -10 \\ -2 & 14 & -5 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

となる。一応行列式を計算してみると、

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 11 & -2 & -10 \\ -2 & 14 & -5 \\ 10 & 5 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 21 & 3 & 0 \\ -2 & 14 & -5 \\ 10 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 14 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 15\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 45\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 45(70-2+7) = 45 \times 75 = 15^3
\end{aligned}$$

より、確かに $|BA| = 1$ となり、$\boldsymbol{n}$ は BA の回転軸ベクトルとなる。

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}(\phi, \theta)$ とすると、$\sin\theta = 0$ より $\theta = 0, \cos\theta = 1$、

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\phi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

となり、

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{n}} &= \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{k}, \quad \check{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
BA\hat{\boldsymbol{n}} &= -BA\boldsymbol{k} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \\
BA\check{\boldsymbol{n}} &= \frac{1}{15\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 22-2 \\ -4+14 \\ 20+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{15\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \\
\cos\psi &= -\frac{m_3}{\cos\theta} = \frac{2}{3}, \quad \sin\psi = \frac{\ell_3}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}$$

となる。

$$BA = A_z(\phi')A_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)A_z(\psi')$$

の回転角は、$\boldsymbol{c} = {}^T(-2/3, -1/3, 2/3) = \boldsymbol{p}(\phi', \theta')$ より

$$\begin{aligned}
\sin\theta' &= \frac{2}{3}, \quad \cos\theta' = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\theta' = \psi), \\
\cos\phi' &= -\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\phi' = -\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left(\phi' = \phi - \frac{\pi}{2}\right), \\
\cos\psi' &= -\frac{a_3}{\cos\theta'} = -\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \\
\sin\psi' &= \frac{b_3}{\cos\theta'} = \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left(\psi' = 2\pi - \phi' = \frac{5\pi}{2} - \phi\right)
\end{aligned}$$

となる。

8.4 例 4

最後に、回転軸ベクトルから A を構成する計算を一つ紹介する。回転軸ベクトル $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

とし、$\psi = 2\pi/3$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{n} \times E &= [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{j}, \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、(40) より、

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{n}\times E \\
&= \frac{1}{2}E + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3+1 & 1+3 & -1+3 \\ 1-3 & 3+1 & -1-3 \\ -1-3 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。

ついでに、この行列の $z-y-z$ の回転角 ϕ', θ', ψ' も計算してみると、$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}(\phi', \theta')$ より、

$$
\begin{aligned}
\sin\theta' &= \frac{2}{3}, \quad \cos\theta' = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\
\cos\phi' &= \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\phi' = -\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \\
\cos\psi' &= \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\psi' = \frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \left(\psi' = \phi' - \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となり、$\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{p}(\phi, \theta)$ の形に表した角 ($\sin\theta = -1/\sqrt{3}$ 等) とはあまり関係ない角になっていることもわかるだろう。