

2022年05月02日

行列乗

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、要素が実数、または複素数である n 次正方行列 A に対する e^A 、すなわち e の行列乗に相当するものを紹介する。

行列乗は、微分方程式への応用もあり、厚めの線形代数の本には書いてある場合もあるが、どの本にも書いてあるという内容ではないので、本稿で取り上げる。

また、 e^A の具体的な計算には、通常ジョルダン標準形と呼ばれる行列変形を用いるが、これも線形代数の入門的な本では扱っていないことも多いので、これについても簡単に紹介することにする。

2 定義、用語、ノルム、極限

本稿では、行列、およびベクトルに関する基本的事項 (積、累乗、転置、逆行列) は既知であると仮定する。

定義 2.1

1. \mathbf{K} を実数全体の集合 (通常 \mathbf{R} と書く)、または複素数全体の集合 (通常 \mathbf{C} と書く) のいずれかとするが、 $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ と考えてもらってさしつかえない。
2. $M_{m,n}(\mathbf{K})$ を \mathbf{K} の元を要素とする $m \times n$ 行列全体の集合とし、 $M_n(\mathbf{K})$ を \mathbf{K} の元を要素とする n 次正方行列全体の集合とする。
3. $M_n(\mathbf{K})$ に内積とそこから自然に決まる長さ (ノルム) を導入する。

$A = [a_{ij}]_{i,j} \in M_n(\mathbf{K})$, $B = [b_{ij}]_{i,j} \in M_n(\mathbf{K})$ の内積 $A \cdot B$ を

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}} \quad (\overline{x} \text{ は } x \text{ の複素共役})$$

と定め、そこから決まる行列の長さ (ノルム ともいう) $\|A\|$ を、

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

と定める。

定理 2.2

長さ $\|A\|$ は以下を満たす。

1. $k \in \mathbf{K}$, $A \in M_n(\mathbf{K})$ ならば $\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$
2. $\|A\| = 0$ と $A = O$ は同値
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|{}^T A\| = \|A\|$
5. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

証明

1., 2., 3. は通常の n 次元ベクトルの場合と同じだから省略。4. も明らか。最後の 5. のみ示す。

$A = [a_{ij}]_{i,j}$, $B = [b_{ij}]_{i,j}$, $C = AB = [c_{ij}]_{i,j}$ とすると、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

なので、シュワルツの不等式より、

$$|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2} \sqrt{\sum_{\ell=1}^n |b_{\ell j}|^2}$$

となる。よって、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n |b_{\ell j}|^2$$

より $\|AB\|^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2$ が得られる。■

定義 2.3

1. 行列の無限列 A_1, A_2, A_3, \dots ($A_m \in M_n(\mathbf{K})$) の極限 $B = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m$ を、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - B\| = 0$$

で定義する。これは、成分を $A_m = [a_{ij}(m)]_{i,j}$, $B = [b_{ij}]_{i,j}$ と書けば、容易に

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = B \iff \text{すべての } i, j \text{ に対し } \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}(m) = b_{ij}$$

となることがわかる。

2. 行列の無限列 $\{A_m\}_m$ ($A_m \in M_n(\mathbf{K})$) がコーシー列であるとは、

$$\lim_{m, \ell \rightarrow \infty} \|A_m - A_\ell\| = 0$$

となることをいう。

コーシー列の定義はほぼ実数列の場合と同様である。実数列 $\{a_m\}_m$ の場合、

$$\lim_{m, \ell \rightarrow \infty} |a_m - a_\ell| = 0$$

となるときにコーシー列と呼ぶが、 $\{a_m\}_m$ がコーシー列であることと、それがある有限な極限值 b に収束することは同値となる (証明は省略、実数論と関係する)。そして、行列の無限列に対しても同じことが言える。

定理 2.4

行列の無限列 $\{A_m\}_m$ ($A_m \in M_n(\mathbf{K})$) がコーシー列であることと、ある行列 B に収束することは同値。

証明

$\{A_m\}_m$ が B に収束すれば、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m - B\| = 0$$

なので、

$$\lim_{m, \ell \rightarrow \infty} \|A_m - A_\ell\| \leq \lim_{m, \ell \rightarrow \infty} (\|A_m - B\| + \|B - A_\ell\|) = 0$$

よりコーシー列となる。

逆に、 $\{A_m\}_m$ がコーシー列であれば、 $A_m = [a_{ij}(m)]_{i,j}$ の成分も、

$$\lim_{m,\ell \rightarrow \infty} |a_{ij}(m) - a_{ij}(\ell)| \leq \lim_{m,\ell \rightarrow \infty} \|A_m - A_\ell\| = 0$$

よりすべての i, j に対してコーシー列となり、よってそれぞれ極限 b_{ij} が存在する。よって $A_m = [a_{ij}(m)]_{i,j}$ は $B = [b_{ij}]_{i,j}$ に収束する。■

定義 2.5

1. 行列の無限列 $\{A_m\}_m$ ($A_m \in M_n(\mathbf{K})$) に対する **無限級数**

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m = A_1 + A_2 + \cdots$$

を、部分和の極限

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m A_k$$

で定義する。

2. 行列の無限級数 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ は、すべての m に対し $\|A_m\| \leq a_m$ で、 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m < \infty$

となる非負実数列 $\{a_m\}_m$ が存在するとき、**絶対収束する** といい、 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ を

$\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ の **優級数** と呼ぶ。

定理 2.6 絶対収束する無限級数 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ は収束する。

証明

$\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ の部分和 $S_m = \sum_{k=1}^m A_k$ がコーシー列であることを示せばよい。 $m > \ell$ に対して、

$$\|S_m - S_\ell\| = \left\| \sum_{k=\ell+1}^m A_k \right\| \leq \sum_{k=\ell+1}^m \|A_k\| \leq \sum_{k=\ell+1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^{\ell} a_k$$

となり、この最後の右辺は $m, \ell \rightarrow \infty$ のときに 0 に収束するので、左辺はコーシー列となる。■

3 行列乗の定義

本節で行列乗 e^A を定義する。

定義 3.1

$A \in M_n(\mathbf{K})$ に対し、 e^A を、

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \quad (1)$$

の無限級数で定義する。ただし、 $A^0 = E$ ($A = O$ でも) とする。

この定義は、 e^x のマクローリン展開を行列に拡張したものになっているが、(1) の具体的な計算にも e^x のマクローリン展開が用いられる。

$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ より、 $m \geq 1$ に対して $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ が成り立ち、 $m = 0$ に対しては、

$$\|A^0\| = \|E\| = \sqrt{n}$$

となるので、無限級数

$$\sqrt{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \|A\|^m = \sqrt{n} + e^{\|A\|} - 1 \quad (2)$$

が (1) の優級数となり、(1) はすべての正方行列 A に対し常に絶対収束し、 e^A は正しく定義されることになる。

なお、 e^A には別の表現式 (別の定義) もある。それは、

$$e^A = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \quad (3)$$

というものであり、これも、実数の x に対する

$$e^x = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m} \right)^m \quad (4)$$

に対応する。なお、余談だが、(4) は実数の x だけでなく複素数に対しても成立し、すなわち

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + yi}{m} \right)^m = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (5)$$

となることが言え、いわゆる「オイラーの公式」の別な「証明」(根拠)にもなっている (cf. [3])。

定理 3.2 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して (3) が成り立つ。

証明

(3) の右辺のカッコの式の m 乗を展開して

$$\left(E + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{A^j}{m^j} = \sum_{j=0}^m \frac{A^j}{j!} \alpha_{m,j} \quad (6)$$

とすると、 $\alpha_{m,j}$ は、 $2 \leq j \leq m$ に対して、

$$\begin{aligned} \alpha_{m,j} &= \binom{m}{j} \frac{j!}{m^j} = \frac{m!}{(m-j)!m^j} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-j+1)}{m^j} \\ &= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{m}\right) = \prod_{\ell=1}^{j-1} \left(1 - \frac{\ell}{m}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

となり、 $j=0,1$ に対しては、 $\alpha_{m,0} = \alpha_{m,1} = 1$ となる。

なお、(7) の最後の式で $j > m$ とすると、積に $1 - m/m = 0$ が含まれるので 0 となり、よってそれをもって $j > m$ に対して $\alpha_{m,j} = 0$ と定める。このとき、 $0 \leq \alpha_{m,j} \leq 1$ や、 $\alpha_{m,j}$ が m に関して増加、 j に関して減少であること、および固定した j に対して

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{m,j} = 1$$

となることは容易にわかる。この $\alpha_{m,j}$ により、(6) は

$$\left(E + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \alpha_{m,j} \quad (8)$$

と無限級数としても表現されることになるが、これは (2) が優級数になっているので絶対収束する。この (8) の m に関する極限が e^A であることを示す。

$$\left\| e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} (1 - \alpha_{m,j}) \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} (1 - \alpha_{m,j}) \quad (9)$$

となるが、この (9) の最後の右辺を I_m と書くことにすると、 $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = 0$ を示せばよい。

大きな自然数 N に対し、

$$\begin{aligned} I_m &= \sum_{j=0}^N \frac{\|A\|^j}{j!} (1 - \alpha_{m,j}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} (1 - \alpha_{m,j}) \\ &\leq \sum_{j=0}^N \frac{\|A\|^j}{j!} (1 - \alpha_{m,j}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} \end{aligned}$$

となり、この式で $m \rightarrow \infty$ とすれば、左辺は極限が存在するとは (まだ) 限らないが、 $\alpha_{m,j} \rightarrow 1$ より

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} I_m \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^j}{j!} \quad (10)$$

が成り立つ (左辺は上極限)。 N は任意で、左辺は N によらないので、 $N \rightarrow \infty$ とすれば (10) の右辺は 0 に収束し、よって左辺の上極限は 0 となり、 $I_m \geq 0$ より $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = 0$ が示されたことになる。 ■

4 行列乗の性質

本節では、行列乗の性質をいくつか紹介する。

定理 4.1

1. $e^O = E$
2. $Q \in M_n(\mathbf{C})$ が正則ならば、 $Q^{-1}e^AQ = e^{Q^{-1}AQ}$
3. 対角行列 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対して $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ 、より一般に、三角行列

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

に対しては、

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}, \quad e^B = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

となる。

証明

1. $A = O$ なら (1) の最初の項以外は O なので明らか。
2. 部分和に対して

$$Q^{-1} \left(\sum_{m=0}^N \frac{A^m}{m!} \right) Q = \sum_{m=0}^N \frac{Q^{-1} A^m Q}{m!} = \sum_{m=0}^N \frac{(Q^{-1} A Q)^m}{m!}$$

となるので、 $m \rightarrow \infty$ とすれば成立する。

3. 三角行列 A, B に対して

$$A^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{bmatrix}, \quad B^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

となるので、 e^A, e^B の対角成分は、いずれも

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \lambda_j^m = e^{\lambda_j}$$

となる。■

よって、 n 次正方行列 A が対角化できる場合には、行列乗 e^A も容易に計算できるが、対角化できない行列の場合は、一般には後で説明するジョルダン標準形による計算を行う。

なお、スペクトル分解 ($A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$) できるような行列であれば、それを元に行列乗を計算することも可能だが、そのような行列は対角化も可能なので、スペクトル分解による計算と対角化での計算ではさほどの優劣はないだろう。

定理 4.2 $AB = BA$ (可換) のとき、 $e^A e^B = e^{A+B}$

証明

(1) の部分和を $S_N(A)$ で表すことにする。

$$S_N(A) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} A^m$$

$S_N(A)S_N(B)$ を

$$S_N(A)S_N(B) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{A^i B^j}{i!j!} = \sum_{k=0}^N \sum_{i+j=k} \frac{A^i B^j}{i!j!} + S_2 = S_1 + S_2$$

と分けると、 S_1 は $AB = BA$ より、

$$S_1 = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \frac{A^{k-j} B^j}{(k-j)!j!} = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{A^{k-j} B^j}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{(A+B)^k}{k!} = S_N(A+B)$$

となる。一方 S_2 は、

$$S_2 = \sum_{k=N+1}^{2N} \left(\sum_{i+j=k, i \leq N, j \leq N} \frac{A^i B^j}{i!j!} \right) = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{j=k-N}^N \frac{A^{k-j} B^j}{(k-j)!j!}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \|S_2\| &\leq \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{j=k-N}^N \frac{\|A\|^{k-j} \|B\|^j}{(k-j)!j!} = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{j=k-N}^N \binom{k}{j} \frac{\|A\|^{k-j} \|B\|^j}{k!} \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{(\|A\| + \|B\|)^k}{k!} \end{aligned}$$

となるので、 $S_N(A)S_N(B) - S_N(A+B) = S_2$ で $N \rightarrow \infty$ とすれば $\|S_2\| \rightarrow 0$ より $\|e^A e^B - e^{A+B}\| = 0$ となる。■

定理 4.3

1. e^A は常に正則で、 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
2. $T(e^A) = e^{T A}$

証明

1. 定理 4.2 より、 $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^O = E$ となる。
2. 部分和に対して、

$$T\left(\sum_{m=0}^N \frac{A^m}{m!}\right) = \sum_{m=0}^N \frac{T(A^m)}{m!} = \sum_{m=0}^N \frac{(TA)^m}{m!}$$

となるので、 $m \rightarrow \infty$ とすれば得られる。■

5 行列値関数と導関数

本節の内容は、行列が正方行列である必要はない。

定義 5.1

1. 成分が実数変数 t の関数 $a_{ij}(t)$ (関数値は実数でも複素数でも構わない) である行列 $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j}$ を行列値関数と呼ぶ。
2. 行列値関数 $A(t)$ に対し、極限 $\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = B (= [b_{ij}]_{i,j})$ を、 $\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t) - B\| = 0$ で定義する。これは、すべての成分に対し $\lim_{t \rightarrow t_0} a_{ij}(t) = b_{ij}$ となることと同値である。
3. 行列値関数 $A(t)$ が $t = t_0$ で連続であるとは、 $A(t)$ が t_0 の近傍で定義され、かつ $\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A(t_0)$ を満たすこととする。これは、すべての成分が $t = t_0$ で連続であることと同値である。
これは通常の変数関数と同様の定義であるが、区間での連続性や、半連続性なども通常の変数関数と同様に定義する。
4. 行列値関数 $A(t)$ が $t = t_0$ で微分可能であるとは、 $A(t)$ が t_0 の近傍で定義され、かつ極限 (微分係数)

$$A'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t_0 + h) - A(t_0)}{h}$$

が存在することを意味する。これは、すべての成分が $t = t_0$ で微分可能であることと同値であり、 $A'(t_0) = [a'_{ij}(t_0)]_{i,j}$ となる。

高階導関数や C^n 性 (n 階連続微分可能性) なども通常の変数関数と同様に定義する。

定理 5.2

行列の導関数について次が成り立つ。 $A(t), B(t)$ 等は微分可能な行列値関数、 p, P はそれぞれ定数値、定数行列とし、行列の和や積などはそれらが計算できる場合に成立するものとする。

1. $(A(t) \pm B(t))' = A'(t) \pm B'(t)$
2. $(pA(t))' = pA'(t), (PA(t))' = PA'(t), (A(t)P)' = A'(t)P$
3. $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$
4. $({}^T A(t))' = {}^T A'(t)$
5. $(A(t)^{-1})' = -A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}$
6. 区間 I 内のすべての $t, s \in I$ に対して $A(t)$ と $A(s)$ が可換であれば、 $m \geq 1$ に対して $A(t)^m$ と $A'(t)$ は可換。
7. 区間 I 内のすべての t で $A(t)$ が正則で、 $t, s \in I$ に対して $A(t)$ と $A(s)$ が可換であれば、 $m \geq 1$ に対して $(A(t)^{-1})^m$ と $A'(t)$ はそれぞれ可換。

証明

1., 2., 3., 4., は易しいので (成分を考えれば明らか) 省略。5. 以降を示す。

5. $A(t)A(t)^{-1} = E$ の両辺を t で微分すれば、3. により

$$A'(t)A(t)^{-1} + A(t)(A(t)^{-1})' = O$$

となるので、両辺左から $A(t)^{-1}$ 倍すれば得られる。

6. $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ であれば、両辺を s で微分して $s = t$ とすれば

$$A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$$

となり、 $A(t)$ と $A'(t)$ は可換になる。よって、容易に $A(t)^m A'(t) = A'(t)A(t)^m$ が得られる。

7. 6. により $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$ が成り立つので、この両辺に左からと右から $A(t)^{-1}$ をかければ、

$$A'(t)A(t)^{-1} = A(t)^{-1}A'(t)$$

となり、 $A(t)^{-1}$ と $A'(t)$ は可換になるので、容易に $(A(t)^{-1})^m A'(t) = A'(t)(A(t)^{-1})^m$ が得られる。■

なお、一般には $A(t)$ と $A'(t)$ は可換ではない。例えば、

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & \sin t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の場合、

$$A'(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad AA' = \begin{bmatrix} t & t \cos t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'A = \begin{bmatrix} t & \sin t + \cos t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので可換ではない。

定理 5.3

1. A が定数行列の場合、 $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $A(t)$ が区間 I 内で微分可能で、すべての $t, s \in I$ に対して $A(t)$ と $A(s)$ が可換であれば、 $(e^{A(t)})' = A'(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}A'(t)$

証明

2. のみを示せばよい。 $t_0 \in I$ に対して

$$J(h) = \frac{e^{A(t_0+h)} - e^{A(t_0)}}{h}$$

とすると、 $e^{-A(t_0)} = (e^{A(t_0)})^{-1}$ より

$$J(h) = e^{A(t_0)} \frac{e^{-A(t_0)}e^{A(t_0+h)} - E}{h} = \frac{e^{A(t_0+h)}e^{-A(t_0)} - E}{h} e^{A(t_0)}$$

となるが、仮定より $A(t_0+h)$ と $-A(t_0)$ は可換なので定理 4.2 より

$$e^{-A(t_0)}e^{A(t_0+h)} = e^{A(t_0+h)}e^{-A(t_0)} = e^{A(t_0+h)-A(t_0)}$$

となるので、 $\Delta A = A(t_0+h) - A(t_0)$ とすれば、

$$J(h) = e^{A(t_0)} \frac{e^{\Delta A} - E}{h} = \frac{e^{\Delta A} - E}{h} e^{A(t_0)} \quad (11)$$

となる。今、

$$K(h) = \frac{e^{\Delta A} - E}{h}$$

とすると、

$$\begin{aligned} K(h) &= \frac{1}{h} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\Delta A)^m - E \right\} = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (\Delta A)^m \\ &= \frac{\Delta A}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (\Delta A)^{m-1} = \frac{\Delta A}{h} \left(E + \Delta A \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (\Delta A)^{m-2} \right) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $A(t)$ の微分可能性により、ある $\delta_0 > 0$, $M_1 > 0$ が取れて、 $|h| \leq \delta_0$ である任意の h に対して

$$\left\| \frac{\Delta A}{h} \right\| = \left\| \frac{A(t_0 + h) - A(t_0)}{h} \right\| \leq M_1$$

とできる。よって、 $\|\Delta A\| \leq M_1 |h| \leq M_1 \delta_0$ となるので、

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (\Delta A)^{m-2} \right\| &\leq \frac{\sqrt{n}}{2} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} (M_1 \delta_0)^{m-2} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{e^{M_1 \delta_0} - 1 - M_1 \delta_0 - M_1^2 \delta_0^2 / 2}{M_1^2 \delta_0^2} \end{aligned}$$

となる。よって、この最後の右辺を M_2 とすれば、

$$\left\| K(h) - \frac{\Delta A}{h} \right\| = \left\| \frac{(\Delta A)^2}{h} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (\Delta A)^{m-2} \right\| \leq M_1^2 |h| M_2$$

となるので、これは $h \rightarrow 0$ のときに 0 に収束する。また、 $\Delta A/h \rightarrow A'(t_0)$ となるので、よって $K(h) \rightarrow A'(t_0)$ となることがわかる。

結局、(11) より、 $J(h) \rightarrow e^{A(t_0)} A'(t_0) = A'(t_0) e^{A(t_0)}$ となる。■

6 ジョルダン標準形

対角化できない行列でも、必ず、

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_s, k_s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

の形に変形できる。これをジョルダン標準形と呼ぶ。ここで、 $J(\lambda, k) \in M_k(\mathbf{C})$ は、対角成分が λ で、その一つ右上の斜め列に 1 が並ぶ k 次の上三角行列

$$J(\lambda, k) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (13)$$

であり、ジョルダン細胞と呼ばれる。

(12) の λ_j は A の固有値で、各ジョルダン細胞 $J(\lambda_j, k_j)$ の λ_j はすべて異なるとは限らず、 A の固有値 μ の重複度を m (固有方程式の $(\lambda - \mu)$ に関する因数が $(\lambda - \mu)^m$) とすれば、 $\lambda_j = \mu$ となるジョルダン細胞のサイズ k_j の和が m に一致する。

つまり、ジョルダン標準形 (12) の対角成分は A の固有値が重複度の分だけ並び、その一つ右上の斜め列には 0 か 1 が並んだ形となる。

ジョルダン標準形を求めるには、まず A の固有値を求め、その固有ベクトルを固有空間の次元分求める必要がある。例えば、固有値 μ の重複度が m で、固有空間の次元が p である場合は一般に $1 \leq p \leq m$ で、 μ に対する一次独立な p 個の固有ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ が得られる。

そして $p < m$ の場合は、各 \mathbf{x}_j に対し、**広義固有ベクトル**と呼ばれることもある次のような $\mathbf{0}$ でないベクトルの列 $\mathbf{x}_j^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_j^{(\ell_j)}$ を求めていく。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{(1)} &= \mathbf{x}_j, \\ (A - \mu)\mathbf{x}_j^{(2)} &= \mathbf{x}_j^{(1)}, \\ (A - \mu)\mathbf{x}_j^{(3)} &= \mathbf{x}_j^{(2)}, \\ &\dots \\ (A - \mu)\mathbf{x}_j^{(\ell_j)} &= \mathbf{x}_j^{(\ell_j - 1)} \end{aligned} \quad (14)$$

この (14) より、

$$\begin{aligned} A[\mathbf{x}_j^{(1)} \mathbf{x}_j^{(2)} \cdots \mathbf{x}_j^{(\ell_j)}] &= [\mu \mathbf{x}_j^{(1)} \mu \mathbf{x}_j^{(2)} + \mathbf{x}_j^{(1)} \cdots \mu \mathbf{x}_j^{(\ell_j)} + \mathbf{x}_j^{(\ell_j-1)}] \\ &= [\mathbf{x}_j^{(1)} \mathbf{x}_j^{(2)} \cdots \mathbf{x}_j^{(\ell_j)}] J(\mu, \ell_j) \end{aligned}$$

となるので、この ℓ_j 個の広義固有ベクトルが、一つのジョルダン細胞 $J(\mu, \ell_j)$ に対応することになる。

この作業をすべての \mathbf{x}_j に対して行えば、広義固有ベクトルの総数 $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_p$ は μ の重複度 m に一致することが知られていて、よって固有値 μ に対応するジョルダン細胞をすべて構成することができることになる。

そしてここまでの作業をすべての固有値に対して行えば、得られる広義固有ベクトルの総数は n となり、それらを順に列ベクトルとして並べた行列が Q となって、(12) が得られることになる。

ジョルダン細胞に関する命題を 2,3 紹介する。

定理 6.1

1. $m < k$ ならば $J(0, k)^m$ は $j - i = m$ である (i, j) 成分、すなわち対角成分の右上 m 列目のななめ成分がすべて 1 で、他はすべて 0 の行列、 $m \geq k$ ならば $J(0, k)^m = O$ 。

2. $J(\lambda, k)^m = (\lambda E + J(0, k))^m = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} \lambda^{m-\ell} J(0, k)^\ell$

3. $e^{J(\lambda, k)t} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{t^\ell}{\ell!} J(0, k)^\ell e^{\lambda t}$

証明

1., 2. は簡単な計算なので省略。3. を示す。2. より

$$e^{J(\lambda, k)t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J(\lambda, k)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} \lambda^{m-\ell} J(0, k)^\ell$$

となるが、この和を順序交換すると、 $\ell \geq k$ では $J(0, k)^\ell = O$ なので、

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^m = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{\ell=0}^m + \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=\ell}^{k-1} + \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=k}^{\infty} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=\ell}^{\infty}$$

となり、よって、

$$e^{J(\lambda,k)t} = \sum_{\ell=0}^{k-1} J(0,k)^\ell \sum_{m=\ell}^{\infty} \binom{m}{\ell} \frac{t^m}{m!} \lambda^{m-\ell}$$

となる。ここで、

$$\sum_{m=\ell}^{\infty} \binom{m}{\ell} \frac{t^m}{m!} \lambda^{m-\ell} = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{t^m \lambda^{m-\ell}}{\ell!(m-\ell)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{\ell+j} \lambda^j}{\ell! j!} = \frac{t^\ell}{\ell!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda t}$$

より、

$$e^{J(\lambda,k)t} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{t^\ell}{\ell!} J(0,k)^\ell e^{\lambda t}$$

となる。■

この定理 6.1 により、ジョルダン標準形 (12) に対し、

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J(\lambda_1, k_1)t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J(\lambda_s, k_s)t} \end{bmatrix}$$

が計算でき、また定理 4.1 により $Q^{-1}e^{At}Q = e^{Q^{-1}AtQ} = e^{Jt}$ なので、

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} e^{J(\lambda_1, k_1)t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J(\lambda_s, k_s)t} \end{bmatrix} Q^{-1} \quad (15)$$

と求まることになる。これが通常の e^{At} (や e^A) の計算方法である。

ただし、次数が大きなジョルダン標準形の計算にはそれなりの手間がかかるし、 Q から Q^{-1} を求めるのも簡単ではない。だから、この方法での e^{At} の計算は、手計算では $n=3,4$ あたりが限界だろう。なお、もちろん $n=3,4$ でも固有値が簡単に求まるとは限らないから、手計算が常に可能であるとの保証はない。

あとで一つ例を紹介する。

7 応用

行列乗は、定数係数線形微分方程式への応用が有名である。その基礎から少し紹介する。定数係数の線形微分方程式には、例えば

$$y'' + 4y = \cos t \quad (y = y(t): \text{未知関数}) \quad (16)$$

のように単独の方程式 (2 階単独) や、

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_2' + y_1 + 2y_2 \\ y_2'' = 3y_1' + y_1 - y_2 + e^{2t} \end{cases} \quad (y_1(t), y_2(t): \text{未知}) \quad (17)$$

のように連立 (2 階 2 未知連立) の方程式もあるが、未知関数の数を増やせば、すべて 1 階の連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases} \quad (18)$$

$(y_j = y_j(t): \text{未知}, a_{ij}, f_j(t): \text{既知})$

に変形できるし、逆に未知関数を減らすことで 1 未知関数 1 本の n 階微分方程式

$$y^{(n)} = b_{n-1}y^{(n-1)} + b_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + b_1y' + b_0y + g(t) \quad (19)$$

$(y = y(t): \text{未知}, b_j, g(t): \text{既知})$

の形に帰着させることもできる。

例えば、(16) は、 $y' = z$ ($z = z(t): \text{未知}$) とすれば、 $z' = y''$ より

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -4y + \cos t \end{cases} \quad (20)$$

の 1 階連立になるし、(17) は $y_1' = y_3, y_2' = y_4$ とすれば

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = y_1 + 2y_2 + 2y_4 \\ y_4' = y_1 - y_2 + 3y_3 + e^{2t} \end{cases} \quad (21)$$

の1階連立となる。逆に、(17) から y_2 (または y_1) を消去して y_1 の4階微分方程式を作ることにもできる。それには、演算子法を利用すると便利だが、その詳しい説明は微分方程式の本を参照してもらうことにして、その計算だけを紹介する。(17) は微分演算子 $D = d/dt$ を用いて

$$\begin{cases} (D^2 - 1)y_1 - 2(D + 1)y_2 & = 0 \\ -(3D + 1)y_1 + (D^2 + 1)y_2 & = e^{2t} \end{cases}$$

と書けるので、 y_2 を消去すれば、

$$-2(D + 1)(3D + 1)y_1 + (D^2 + 1)(D^2 - 1)y_1 = 2(D + 1)e^{2t} = 6e^{2t}$$

となるので、

$$\begin{aligned} -2(D + 1)(3D + 1) + (D^2 + 1)(D^2 - 1) &= -2(3D^2 + 4D + 1) + D^4 - 1 \\ &= D^4 - 6D^2 - 8D - 3 \end{aligned}$$

より、

$$y_1^{(4)} - 6y_1'' - 8y_1' - 3y_1 = 6e^{2t} \quad (22)$$

が得られる。

よって、1階連立方程式 (18) を解くことと n 階単独方程式 (19) を解くことは実質的に同じで、微分方程式の本では通常どちらかの解法のみを紹介し、他方の方程式はそちらに変換する方法を紹介する、というのが普通である。

一般的には、より解法を重視する工学系の教科書では単独方程式 (19) の方で解法を紹介し、理論を重視する理学系の教科書では連立方程式 (18) の方で解法を紹介することが多いように思う。それは、連立方程式 (18) の解法には行列の理論、特に e^{At} の話が必要になるからだと思われる。単独方程式 (19) の場合は、行列を使用せずに特性方程式 (連立方程式 (18) の場合の固有方程式に対応する) を解くことで、代入法や定数変化法、演算子法、ラプラス変換などにより行列を用いずに解を求めることができる。

なお、(18) や (19) の係数 a_{ij}, b_j が定数でない場合、すなわち t の既知関数である場合は、方程式の解法は特殊な場合にしか存在せず、問題はかなり難しい。本節では定数係数の場合のみ扱う。

方程式に現れる既知関数 $f_j(t)$ がすべて 0 である場合の方程式を斉次形、一つでも 0 でないものがある場合は非斉次形と呼ぶ。

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = [a_{ij}]_{i,j}$$

とすると、(18) は

$$Y'(t) = AY(t) + F(t) \tag{23}$$

と書けるが、その初期値問題、すなわち初期条件

$$Y(t_0) = Y_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

(すなわち $y_j(t_0) = \alpha_j$) を満たす解を考える。

$F(t) = 0$ の斉次方程式の場合、 $Y'(t) = AY(t)$ の初期値問題の解は、一意的に

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 \tag{24}$$

と書ける。それは、斉次方程式 $Y' = AY$ の両辺に e^{-At} を左からかけると、定理 5.3 により、

$$e^{-At}Y' = e^{-At}AY = -(e^{-At})'Y$$

となり、 $(e^{-At}Y)' = (e^{-At})'Y + e^{-At}Y' = 0$ となるので $e^{-At}Y$ は定数行列であることになる。よって $e^{-At}Y = e^{-At_0}Y_0$ となるので、両辺に e^{At} をかければ (24) が得られる。

より一般の非斉次方程式の場合は、

$$(e^{-At}Y)' = -e^{-At}AY + e^{-At}Y' = e^{-At}(-Ay + Y') = e^{-At}F(t)$$

となるので、 t に関して t_0 から t まで両辺を積分すると

$$e^{-At}Y - e^{-At_0}Y_0 = \int_{t_0}^t e^{-As}F(s)ds$$

となり、両辺 e^{At} 倍して移項すれば、

$$Y = e^{At}e^{-At_0}Y_0 + \int_{t_0}^t e^{At}e^{-As}F(s)ds = e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}F(s)ds \quad (25)$$

が得られる。いずれも、 e^{At} の計算によって解がシンプルな形で表現されることになる。

さて、これらを用いて、実際に (20) の初期値問題

$$y(0) = y_0, \quad z(0) = y'(0) = z_0 \quad (26)$$

および (21) の初期値問題

$$y_1(0) = \alpha_1, \quad y_2(0) = \alpha_2, \quad y_3(0) = y_1'(0) = \beta_1, \quad y_4(0) = y_2'(0) = \beta_2 \quad (27)$$

の解を求めてみる。

(20) は、

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + F(t)$$

と書けるので、初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos s \end{bmatrix} ds \quad (28)$$

となる。 A の固有値は、

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

より $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$ 、固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

となる。よって A は対角化可能で、

$$Q = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{2i + 2i} \begin{bmatrix} 2i & -1 \\ 2i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & i \\ 2 & -i \end{bmatrix}$$

により

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}e^{At}Q = \begin{bmatrix} e^{-2it} & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{bmatrix}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} e^{At} &= Q \begin{bmatrix} e^{-2it} & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{bmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2it} & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ 2 & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-2it} & e^{2it} \\ -2ie^{-2it} & 2ie^{2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ 2 & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{-2it} + 2e^{2it} & ie^{-2it} - ie^{2it} \\ -4ie^{-2it} + 4ie^{2it} & 2e^{-2it} + 2e^{2it} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \cos 2t & 2 \sin 2t \\ -8 \sin 2t & 4 \cos 2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t/2 \\ -2 \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

となる。これにより

$$e^{At} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t/2 \\ -2 \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \cos 2t + (z_0/2) \sin 2t \\ -2y_0 \sin 2t + z_0 \cos 2t \end{bmatrix}$$

であり、また、積分の項は、

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos s \end{bmatrix} ds &= e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos s \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} 2 \cos 2s & -\sin 2s \\ 4 \sin 2s & 2 \cos 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos s \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} -\sin 2s \cos s \\ 2 \cos 2s \cos s \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} -\sin 3s - \sin s \\ 2 \cos 3s + 2 \cos s \end{bmatrix} ds = \frac{1}{4} e^{At} \begin{bmatrix} (\cos 3t - 1)/3 + \cos t - 1 \\ 2 \sin 3t/3 + 2 \sin t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t/2 \\ -2 \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 3t + 3 \cos t - 4 \\ 2 \sin 3t + 6 \sin t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるが、この最後の項を $T[\alpha \beta]/12$ とし、 $\cos mt = C_m$, $\sin mt = S_m$ と略して書くと、

$$\begin{aligned}
\alpha &= C_2(C_3 + 3C_1 - 4) + S_2(S_3 + 3S_1) \\
&= (C_3C_2 + S_3S_2) + 3(C_2C_1 + S_2S_1) - 4C_2 = C_1 + 3C_1 - 4C_2 \\
&= 4C_1 - 4C_2, \\
\beta &= -2S_2(C_3 + 3C_1 - 4) + C_2(2S_3 + 6S_1) \\
&= 2(S_3C_2 - S_2C_3) - 6(S_2C_1 - S_1C_2) + 8S_2 = 2S_1 - 6S_1 + 8S_2 \\
&= -4S_1 + 8S_2
\end{aligned}$$

となるので、結局、

$$\int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos s \end{bmatrix} ds = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + 2 \sin 2t \end{bmatrix}$$

となる。よって、初期値問題 (20), (26) の解は、(28) より

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \cos 2t + (z_0/2) \sin 2t \\ -2y_0 \sin 2t + z_0 \cos 2t \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + 2 \sin 2t \end{bmatrix}$$

となることがわかる。この最後の式から $y' = z$ となること、 $t=0$ のとき $y = y_0$, $z = z_0$ となることが容易に確認できる。しかし、ここまでの手順はかなり長く、(16) を単独方程式のまま特性方程式と代入法などで解く方がはるかに短く容易である。

次は、(21) を考える。こちらは最後まで計算しないが、ジョルダン標準形位までは求めてみる。この場合は、

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

となる。まずは A の固有値から。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda & -2 \\ -1 & 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^3 - 6 + \lambda - 6\lambda) - (1 + 2\lambda + 2 + \lambda^2) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3) = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3) \end{aligned}$$

より、固有値は $\lambda_1 = 3$ 、 $\lambda_2 = -1$ (重複度 3) となる。

$\lambda_1 = 3$ の固有空間は 1 次元で、固有ベクトル 1 つを求めればよい。固有ベクトルの方程式は、

$$(A - 3E)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

なので、行を入れかえてから逆順に消去法を行うと、

$$\begin{aligned} A - 3E &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 & 0 \\ 1 & -10 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるので、 $x_1 = s$ とすれば $x_2 = s$, $x_3 = 3s$, $x_4 = 3s$ より固有ベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} s$$

が求まる。 s は $s = 1$ と取ればよい。

次は $\lambda = -1$ の固有ベクトルを考える。この場合は、固有空間の次元は 3 以下だが、

$$\begin{aligned} A + E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので、 -1 に対する固有ベクトルは、

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

であり、固有空間の次元は 1 となる。これも $s = 1$ とすればよい。固有値 -1 の重複度は 3 なので、この場合、

$$(A + E)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2, \quad (A + E)\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3$$

となる広義固有ベクトル $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ を取る必要がある。なお、当然これらも一意に決定するわけではなく、例えば \mathbf{v}_3 は、

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3^{(0)} + s\mathbf{v}_2$$

の s の自由度を持つ解が求まり、 \mathbf{v}_4 はその s に対してさらに

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_4^{(0)} + s\mathbf{v}_3^{(0)} + t\mathbf{v}_2$$

の t の自由度を持つ解が求まるはずである。これらもとりあえずは $s = t = 0$ のように適当に固定してよい。

まずは \mathbf{v}_3 を求める。方程式 $(A+E)\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ の解を求めるには、拡大係数行列 $[A+E | \mathbf{v}_2]$ の消去法を行う。実際には $A+E$ の部分の変形なので、その手順は \mathbf{v}_2 の計算と同じで、違うのは一番右側の列のみとなる。

$$\begin{aligned}
 [A+E | \mathbf{v}_2] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

となるので、 $x_1 = s$ に対して $x_2 = -s + 1/2$, $x_3 = -s + 1$, $x_4 = s - 3/2$ となり、

$$\mathbf{v}_3 = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

となる。ここで $s=0$ としたものを \mathbf{v}_3 とする。最後は \mathbf{v}_4 を求める。分数を消すために、方程式を2倍して、

$$(A+E)(2\mathbf{v}_4) = 2\mathbf{v}_3$$

と考え、 $2\mathbf{v}_4$ を求める計算を行う。

$$\begin{aligned}
 [A+E | 2\mathbf{v}_3] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

なので、 v_4 は

$$v_4 = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となる。これも $t=0$ とすれば $Q = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$ は

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

となり、ジョルダン標準形は、

$$J = \begin{bmatrix} J(3,1) & 0 \\ 0 & J(-1,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。次は Q^{-1} を求める。これも消去法で計算するが、 $QX = E$ ($X = Q^{-1}$) の両辺を 2 倍して、 $(2Q)X = 2E$ に対する拡大係数行列の消去法を行い、なるべく分数計算を避けて計算する。

$$[Q \mid 2E] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 2 & -5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 29 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 32 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 32 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 32 & 32 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ -32 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -6 & -4 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 32 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 29 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 5 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

よって、

$$Q^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 29 & -2 & -5 & -4 \\ 20 & -8 & 12 & -16 \\ 16 & 32 & -16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/32 & 1/16 & 5/32 & 1/8 \\ 29/32 & -1/16 & -5/32 & -1/8 \\ 5/8 & -1/4 & 3/8 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。定理 6.1 より、

$$\begin{aligned}
e^{J(3,1)t} &= e^{3t}, \\
e^{J(-1,3)t} &= e^{-t} \left(E + \frac{t}{1!} J(0,3) + \frac{t^2}{2} J(0,3)^2 \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり、よって

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J(3,1)t} & 0 \\ 0 & e^{J(-1,3)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & t^2e^{-t}/2 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

となる。あとは前と同様にして $e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$ で e^{At} が求まり、(25) を使えば $Y(t)$ が求まる、ということになる。しかし、この先もかなり大変な計算が待っていることが想像できる。

公式 (24), (25) は一見シンプルな形であり、理論展開には便利で重要だが、具体的な計算に向くかといえそうでもなく、特に大きな n ではあまり実用的ではないことがこれらの例からもわかる。

具体的な計算目的なら、むしろ単独方程式の方を特性方程式と代入法や定数変化法 (やラプラス変換) などで解く方が易しい場合が多いだろう。

8 ケーリー・ハミルトンの公式の応用

本節では、行列乗を計算するもう一つの方法を紹介する。これは、wikipedia のケーリー・ハミルトンの項 ([2]) に書かれているもので、実は私もこれまで知らなかった。

n 次正方行列に対しては、ケーリー・ハミルトンの公式が成り立つことが知られている。すなわち、 $A \in M_n(\mathbf{K})$ の固有多項式を $f_A(x) = |xE - A|$ (n 次式) とすると、

$$f_A(A) = O \tag{30}$$

となる。

これにより、 A^n が $E, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ の一次結合、すなわち A の $(n-1)$ 次以下の多項式として表され、さらに任意の A^m ($m \geq 1$) も同様に $(n-1)$ 次以下の A の多項式で表されることになる。よって、そのような項の無限和である e^{At} も A の $(n-1)$ 次以下の多項式で表される、ということが想像されるが、それを考えてみる。

まず、「無限次の多項式」のような解析関数 (ベキ級数) に対する剰余計算に関する定理を紹介する。

定理 8.1

関数 $g(x)$ が

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m$$

で定義され $|x| < r$ で収束する解析関数であるとし、 $p(x)$ を n 次多項式

$$p(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0$$

とする。このとき、解析関数 $q(x)$ (商) と $(n-1)$ 次以下の多項式 $r(x)$ (余り) が存在して、 $g(x) = q(x)p(x) + r(x)$ が成り立つ。

なお、 α_m, p_j は一般に複素数とする。

証明

$p(x)$ を (\mathbf{C} の範囲で) 1 次式の積に因数分解する。

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

このとき、

$$q_1(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(c_1)}{x - c_1} & (x \neq c_1 \text{ のとき}) \\ g'(c_1) & (x = c_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると、 $x = c_1$ は $q_1(x)$ の除去可能特異点で、 $q_1(x)$ も $|x| < r$ で正則となり、よって $|x| < r$ で解析的となる。そして、

$$g(x) = q_1(x)(x - c_1) + g(c_1) \tag{31}$$

と書ける。同様に、

$$q_2(x) = \begin{cases} \frac{q_1(x) - q_1(c_2)}{x - c_2} & (x \neq c_2 \text{ のとき}) \\ q_1'(c_2) & (x = c_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすれば、 $q_2(x)$ も $|x| < r$ で解析的で、

$$q_1(x) = q_2(x)(x - c_2) + q_1(c_2)$$

と書ける。これを繰り返せば、最後に

$$q_{n-1}(x) = q_n(x)(x - c_n) + q_{n-1}(c_n)$$

となり、これらを (31) に代入すれば、

$$\begin{aligned} r(x) = & g(c_1) + q_1(c_2)(x - c_1) + q_2(c_3)(x - c_1)(x - c_2) + \cdots \\ & + q_{n-1}(c_n)(x - c_1) \cdots (x - c_{n-1}) \end{aligned}$$

と $q(x) = q_n(x)$ に対して $g(x) = q(x)p(x) + r(x)$ が成り立つ。■

この定理 8.1 により、

$$e^{\alpha x} = q_{A,\alpha}(x)f_A(x) + r_{A,\alpha}(x) \quad (32)$$

となるような解析関数 $q_{A,\alpha}(x)$ と $(n-1)$ 次以下の多項式 $r_{A,\alpha}(x)$ が存在することになる。

今、 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると、 $f_A(\lambda_j) = 0$ なので、(32) に代入すると

$$e^{\alpha \lambda_j} = r_{A,\alpha}(\lambda_j) \quad (1 \leq j \leq n) \quad (33)$$

が成り立つことになる。 $r_{A,\alpha}(x)$ は高々 $(n-1)$ 次式であるからその係数は n 個以下で、よってもしすべての固有値 λ_j が異なれば、(33) からその係数を決定でき ($e^{\alpha \lambda_j}$ で表され)、 $r_{A,\alpha}(x)$ が求まる。すなわち、未定係数 β_j を用いて

$$r_{A,\alpha}(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_{n-1} x^{n-1}$$

とすれば、(33) より $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ に対する連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha \lambda_1} \\ \vdots \\ e^{\alpha \lambda_n} \end{bmatrix}$$

が得られ、これを $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ について解けばよい。ちなみに、この方程式の係数行列はファンデルモンド行列と呼ばれるものになっていて、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて異なれば、確かに逆行列が存在し、 $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ が求まる。

次に固有値に重解がある場合を考える。固有値 $x = \lambda_j$ が $f_A(x) = 0$ の k 重解である場合、(33) の方程式のうち k 本が 1 本の同じ方程式になってしまうが、この場合 $f_A(x)$ は $(x - \lambda_j)^k$ で割り切れるので、 f_A の $(k-1)$ 階までの導関数に対して

$$f_A^{(i)}(\lambda_j) = 0 \quad (0 \leq i \leq k-1)$$

が成り立つ。(32) を i 階微分すると ($1 \leq i \leq k-1$)、

$$\alpha^i e^{\alpha x} = \sum_{\ell=0}^i \binom{i}{\ell} q_{A,\alpha}^{(i-\ell)}(x) f_A^{(\ell)}(x) + r_{A,\alpha}^{(i)}(x)$$

となるので、 $x = \lambda_j$ とすると $f_A^{(\ell)}(\lambda_j) = 0$ より

$$\alpha^i e^{\alpha \lambda_j} = r_{A,\alpha}^{(i)}(\lambda_j) \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (34)$$

となり、これにより足りない $(k-1)$ 本の方程式が補えることになる。

以上により、固有値に重解がある場合も含めて $r_{A,\alpha}(x)$ が求められることになり、そして (32) に $x = A$ を代入すると、(30) により

$$e^{\alpha A} = r_{A,\alpha}(A) = \beta_0 E + \beta_1 A + \cdots + \beta_{n-1} A^{n-1} \quad (35)$$

のように、行列乗が A の $(n-1)$ 次以下の多項式で表されることになる。

前節で計算した e^{At} を、この方法で計算してみる。まずは、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

の場合。この場合、 $f_A(x) = x^2 + 4$, $\lambda = \pm 2i$ だったので、 $r_{A,\alpha}(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ とすると、(33) は

$$e^{-2i\alpha} = r_{A,\alpha}(-2i) = \beta_0 - 2i\beta_1, \quad e^{2i\alpha} = r_{A,\alpha}(2i) = \beta_0 + 2i\beta_1$$

となるので、

$$\beta_0 = \frac{e^{-2i\alpha} + e^{2i\alpha}}{2} = \cos 2\alpha, \quad \beta_1 = \frac{e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha}}{4i} = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

となり、よって

$$r_{A,\alpha}(x) = \cos 2\alpha + \frac{x}{2} \sin 2\alpha$$

と求まるから、(35) より

$$e^{\alpha A} = r_{A,\alpha}(A) = E \cos 2\alpha + \frac{A}{2} \sin 2\alpha = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha/2 \\ -2 \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

となって、実質的に (29) と同じものが求まっていることがわかる。しかもこちらの方が計算は楽そうである。

次に、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

の場合を計算してみる。この場合は、 $f_A(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$ であり、固有値は -1 (3重根) と 3 であったので、

$$r_{A,\alpha}(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

とすると、(33), (34) により

$$\begin{cases} e^{3\alpha} &= r(3) = \beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2 + 27\beta_3, \\ e^{-\alpha} &= r(-1) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3, \\ \alpha e^{-\alpha} &= r'(-1) = \beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3, \\ \alpha^2 e^{-\alpha} &= r''(-1) = 2\beta_2 - 6\beta_3 \end{cases}$$

となるので、連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3\alpha} \\ e^{-\alpha} \\ \alpha e^{-\alpha} \\ \alpha^2 e^{-\alpha} \end{bmatrix}$$

を解けばよい。それはクラメルの公式でも、通常の消去法でも計算できるが、ここでは α を含まない数だけの計算にするために、この係数行列 B の逆行列を消去法で計算する。これも一応分数を出さないように計算してみる。

$$\begin{aligned} [B | E] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 9 & 27 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 28 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 1 & -1 & -4 & -8 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 64 & 0 & 0 & -64 & 0 & 64 & 64 & 32 \\ 0 & 64 & 0 & -192 & 0 & 0 & 64 & 64 \\ 0 & 0 & 64 & -192 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 1 & -1 & -4 & -8 \end{array} \right] \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 64 & 0 & 0 & 0 & 1 & 63 & 60 & 24 \\ 0 & 64 & 0 & 0 & 3 & -3 & 52 & 40 \\ 0 & 0 & 64 & 0 & 3 & -3 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 1 & -1 & -4 & -8 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

となるので、よって、

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 63 & 60 & 24 \\ 3 & -3 & 52 & 40 \\ 3 & -3 & -12 & 8 \\ 1 & -1 & -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3\alpha} \\ e^{-\alpha} \\ \alpha e^{-\alpha} \\ \alpha^2 e^{-\alpha} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} e^{3\alpha} + (63 + 60\alpha + 24\alpha^2)e^{-\alpha} \\ 3e^{3\alpha} + (-3 + 52\alpha + 40\alpha^2)e^{-\alpha} \\ 3e^{3\alpha} + (-3 - 12\alpha + 8\alpha^2)e^{-\alpha} \\ e^{3\alpha} - (1 + 4\alpha + 8\alpha^2)e^{-\alpha} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{36}$$

と各 β_j が求まる。この β_j に対して

$$e^{\alpha A} = \beta_0 E + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3$$

と表されることになるので、あとは A^2, A^3 を計算すればよい。

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 9 & 12 & 8 & 12 \\ 6 & -3 & 18 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。さらに最終形として、 α によらない定数行列 P_j により

$$e^{\alpha A} = \beta_0 E + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3 = P_1 e^{3\alpha} + P_2 e^{-\alpha} + P_3 \alpha e^{-\alpha} + P_4 \alpha^2 e^{-\alpha}$$

の形にするなら、(36) より

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{64}(E + 3A + 3A^2 + A^3), \\ P_2 = \frac{1}{64}(63E - 3A - 3A^2 - A^3), \\ P_3 = \frac{1}{64}(60E + 52A - 12A^2 - 4A^3) = \frac{1}{16}(15E + 13A - 3A^2 - A^3), \\ P_4 = \frac{1}{64}(24E + 40A + 8A^2 - 8A^3) = \frac{1}{8}(3E + 5A + A^2 - A^3) \end{cases} \quad (37)$$

を計算すればよい。

$$\begin{aligned} 64P_1 &= E + 3A + 3A^2 + A^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \\ 6 & -6 & 21 & 6 \\ 9 & 18 & 3 & 15 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 9 & 12 & 8 & 12 \\ 6 & -3 & 18 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 & 8 \\ 6 & 4 & 10 & 8 \\ 18 & 12 & 30 & 24 \\ 18 & 12 & 30 & 24 \end{bmatrix}, \\ 64P_2 &= 63E - 3A - 3A^2 - A^3 \\ &= \begin{bmatrix} 63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & -9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & -9 & 0 \\ -6 & 6 & -21 & -6 \\ -9 & -18 & -3 & -15 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -7 & -2 \\ -3 & -6 & -1 & -5 \\ -9 & -12 & -8 & -12 \\ -6 & 3 & -18 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & -4 & -10 & -8 \\ -6 & 60 & -10 & -8 \\ -18 & -12 & 34 & -24 \\ -18 & -12 & -30 & 40 \end{bmatrix}, \\ 16P_3 &= 15E + 13A - 3A^2 - A^3 \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \\ 13 & 26 & 0 & 26 \\ 13 & -13 & 39 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & -6 \\ -3 & 3 & -9 & 0 \\ -6 & 6 & -21 & -6 \\ -9 & -18 & -3 & -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -7 & -2 \\ -3 & -6 & -1 & -5 \\ -9 & -12 & -8 & -12 \\ -6 & 3 & -18 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 6 & -8 \\ -6 & 12 & -10 & 8 \\ -2 & 20 & -14 & 8 \\ -2 & -28 & 18 & -8 \end{bmatrix}, \\
8P_4 &= 4E + 5A + A^2 - A^3 \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 10 & 0 & 10 \\ 5 & -5 & 15 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -7 & -2 \\ -3 & -6 & -1 & -5 \\ -9 & -12 & -8 & -12 \\ -6 & 3 & -18 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

となる。

こちらの計算では、固有ベクトル、広義固有ベクトルの計算はないが、 β_j を求める連立方程式の計算と A^{n-1} の計算が必要で、さらに P_j による表現を求める場合は (37) の行列の定数倍の和の計算が必要になる。理論展開にはジョルダン標準形の方が良いかもしれないが、具体的な e^{At} の計算をするには、こちらのケーリー・ハミルトンの公式を利用する方が最終目的にも少し近く、計算もやや易しい気がする。

なお、 A^k を経由せずに直接 P_j が計算できればもっと楽になるが、そのような計算法があるかどうかまではわからなかった。

9 行列式

(12) の A のジョルダン標準形 J に対し、(15) より、

$$|e^{At}| = |Qe^{Jt}Q^{-1}| = |Q||e^{Jt}Q^{-1}| = |e^{Jt}Q^{-1}Q| = |e^{Jt}|$$

となる。一方、 e^{Jt} は三角行列なので、その行列式は対角成分の積に等しい。 $e^{J(\lambda_j, k_j)t}$ の対角成分は、定理 6.1 より $e^{\lambda_j t}$ が k_j 個並ぶので、よって、

$$|e^{Jt}| = \prod_{j=1}^s (e^{\lambda_j t})^{k_j} = e^{(k_1 \lambda_1 + \dots + k_s \lambda_s)t}$$

となる。ここで、

$$k_1\lambda_1 + \cdots + k_s\lambda_s$$

は J のトレース $\text{tr}(J)$ 、すなわち対角成分の和に等しい。また、一般に正方行列 A, B に対して、

$$\text{tr}(AB) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} a_{jk} \right) = \text{tr}(BA)$$

となるので、よって、

$$\text{tr}(J) = \text{tr}(Q^{-1}AQ) = \text{tr}(QQ^{-1}A) = \text{tr}(A)$$

であるから、結局以下が成り立つ。

定理 9.1 $|e^{At}| = e^{\text{tr}(A)t}$

10 積分

最後に、 e^{At} の積分について紹介する。簡単なものは既に計算しているが、本稿ではより一般の A について考える。

通常関数からの類推で、

$$\int e^{At} dt = A^{-1}e^{At} + C = e^{At}A^{-1} + C \quad (C \text{ は任意の定数行列}) \quad (38)$$

となることが容易に予想されると思う。実際、 A が正則であれば、

$$(A^{-1}e^{At})' = A^{-1}Ae^{At} = e^{At}, \quad (e^{At}A^{-1})' = e^{At}AA^{-1} = e^{At}$$

となるので、確かに (38) が成り立つ。しかし、 e^{At} は A が正則ではない場合も存在し、そして積分もできるので、その場合どうなるかも考えてみる。

ジョルダン標準形による表現 (15) より、

$$\int e^{At} dt = Q \int e^{Jt} dt Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} \int e^{J(\lambda_1, k_1)t} dt & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \int e^{J(\lambda_s, k_s)t} dt \end{bmatrix} Q^{-1}$$

となるので、個々のジョルダン細胞に対して考えればよい。

$|J(\lambda, k)| = \lambda^k$ なので、ジョルダン細胞 $J(\lambda, k)$ が正則であることは $\lambda \neq 0$ と同値であり、その場合は $J(\lambda, k)^{-1}$ が存在し、(38) により

$$\int e^{J(\lambda, k)t} dt = J(\lambda, k)^{-1} e^{J(\lambda, k)t} + C = e^{J(\lambda, k)t} J(\lambda, k)^{-1} + C$$

となる。この $J(\lambda, k)^{-1}$ をここで求めておく。

定理 10.1 $\lambda \neq 0$ のとき、

$$J(\lambda, k)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{\lambda^{j+1}} J(0, k)^j \quad (39)$$

証明

(39) の右辺を D とすると、 $J(0, k)^k = O$ より、

$$\begin{aligned} J(\lambda, k)D &= (\lambda E + J(0, k))D = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{\lambda^j} J(0, k)^j + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{\lambda^{j+1}} J(0, k)^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{\lambda^j} J(0, k)^j + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{\lambda^j} J(0, k)^j \\ &= \frac{(-1)^0}{\lambda^0} J(0, k)^0 - \frac{(-1)^k}{\lambda^k} J(0, k)^k = E \end{aligned}$$

■

よって、 $\lambda \neq 0$ のときは、 $e^{J(\lambda, k)t}$ の積分は、

$$\begin{aligned} J(\lambda, k)^{-1} e^{J(\lambda, k)t} &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{\lambda^{j+1}} J(0, k)^j \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{t^\ell}{\ell!} e^{\lambda t} J(0, k)^\ell \\ &= e^{\lambda t} \sum_{m=0}^{k-1} J(0, k)^m \sum_{j+\ell=m} \frac{(-1)^j}{\lambda^{j+1}} \frac{t^\ell}{\ell!} = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^{k-1} J(0, k)^m \sum_{\ell=0}^m \frac{(-1)^{m-\ell}}{\lambda^{m-\ell+1}} \frac{t^\ell}{\ell!} \end{aligned}$$

となる。例えば、

$$J(\lambda, 1)^{-1} e^{J(\lambda, 1)t} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} E,$$

$$\begin{aligned}
J(\lambda, 2)^{-1}e^{J(\lambda, 2)t} &= e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{\lambda}E + \left(\frac{-1}{\lambda^2} + \frac{t}{\lambda} \right) J(0, 2) \right\}, \\
J(\lambda, 3)^{-1}e^{J(\lambda, 3)t} &= e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{\lambda}E + \left(\frac{-1}{\lambda^2} + \frac{t}{\lambda} \right) J(0, 3) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\lambda^3} - \frac{t}{\lambda^2} + \frac{t^2}{2\lambda} \right) J(0, 3)^2 \right\}
\end{aligned}$$

等となる。

一方 $\lambda = 0$ の場合は、

$$e^{J(0, k)t} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} J(0, k)^j$$

と単純な t の多項式になるのでむしろ積分は容易で、

$$\int e^{J(0, k)t} dt = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} J(0, k)^j + C = L_1(k, t) + C$$

となる。これは当然 $J(0, k)$ の逆行列では表現できないが、これをあえて $\lambda \neq 0$ の場合の形に近い、

$$L_1(k, t) = L_2(k, t)e^{J(0, k)t}$$

の形に表すとすると、 $L_2(k, t)$ は

$$\begin{aligned}
L_2(k, t) &= L_1(k, t)e^{-J(0, k)t} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} J(0, k)^j \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} J(0, k)^\ell \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} J(0, k)^m \sum_{j+\ell=m} \frac{(-1)^\ell t^{j+\ell+1}}{(j+1)!\ell!} \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} J(0, k)^m t^{m+1} \sum_{\ell=0}^m \frac{(-1)^\ell}{\ell!(m-\ell+1)!}
\end{aligned}$$

となるが、ここで最後の内側の和の部分を α_m とすると、

$$\alpha_m = \sum_{\ell=0}^m \frac{(-1)^\ell}{\ell!(m-\ell+1)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\ell=0}^m \binom{m+1}{\ell} (-1)^\ell \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \left\{ \sum_{\ell=0}^{m+1} \binom{m+1}{\ell} (-1)^\ell - (-1)^{m+1} \right\} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \{ (1-1)^{m+1} + (-1)^m \} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

となるので、よって

$$L_2(k, t) = \sum_{m=0}^{k-1} J(0, k)^m \frac{(-1)^m t^{m+1}}{(m+1)!} = -L_1(k, -t)$$

となる。

実際は、 $L_2(k, t) = -L_1(k, -t)$ を求めてからそれを $e^{J(0,k)t}$ にかけることは、むしろ直接積分を計算するより面倒なので特に意味はないが、これを使えば一応統一的に e^{Jt} とある行列の積の形にすることができる。

例えば、 $\lambda \neq 0$ として、 A のジョルダン標準形が、

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda, k_1) & 0 \\ 0 & J(0, k_2) \end{bmatrix}$$

である場合、

$$\begin{aligned}
\int e^{Jt} dt &= \begin{bmatrix} J(\lambda, k_1)^{-1} e^{J(\lambda, k_1)t} & 0 \\ 0 & -L_1(k_2, -t) e^{J(0, k_2)t} \end{bmatrix} + C \\
&= \begin{bmatrix} J(\lambda, k_1)^{-1} & 0 \\ 0 & -L_1(k_2, -t) \end{bmatrix} e^{Jt} + C
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
\int e^{At} dt &= Q \begin{bmatrix} J(\lambda, k_1)^{-1} & 0 \\ 0 & -L_1(k_2, -t) \end{bmatrix} e^{Jt} Q^{-1} + C \\
&= Q \begin{bmatrix} J(\lambda, k_1)^{-1} & 0 \\ 0 & -L_1(k_2, -t) \end{bmatrix} Q^{-1} e^{At} + C = \hat{A}(t) e^{At} + C
\end{aligned}$$

と、(38)に近い形で書けることになる。ただし、 $\hat{A}(t)$ は定数ではなく、 0 の固有値の部分は t の多項式を含むところが異なる。より一般のジョルダン標準形の場合も同様である。

11 最後に

本稿では、 e の行列乗 e^A について、定義や性質、具体的な計算、その応用例などを紹介した。

本稿では、 e^A の形の指数のみを考察し、例えば 2^A や A^B (行列の行列乗) などは扱わなかった。

多分、 a^A のような拡張は難しくはないだろうし、本稿の指数関数のように、テイラー展開を使って解析関数 (例えば三角関数など) に行列を代入したものの $f(A)$ を考えることは他にも色々可能だと思うので、興味があればそれらの定義や性質などを自分で考えてみるといいだろう。

参考文献

- [1] 佐藤正次、永井治、「新版 基礎課程 線形代数学」、学術図書出版社 (1976)
- [2] wikiPedia, 「ケーリー・ハミルトンの定理」
<https://ja.wikipedia.org/wiki/ケーリー・ハミルトンの定理>
- [3] 竹野茂治、「指数関数の定義について」 (2017)
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/data/exponential1.pdf>