2024 年 04 月 03 日

正規行列の対角化と標準形

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

[1] では、エルミート行列、歪エルミート行列の、ユニタリ行列による対角化と、対称行列と交代行列の直交行列による標準形への変形を紹介した。

一方で、この対角化、標準形については、次のことも良く知られている。

- [A] 直交行列が、ユニタリ行列により対角化できること
- [B] 直交行列が、直交行列によりある標準形に変形できること
- [C] ユニタリ行列で対角化できる行列は、正規行列であること
- [D] 実正規行列が、直交行列によりある標準形に変形できること

これらは、いくつかの本や資料などで既に紹介されているのだが (例えば [2], [3], [4])、[1] の続きとして本稿にまとめておく。

なお、直交行列を含むユニタリ行列、対称行列を含むエルミート行列、交代行列を含む歪エルミート行列は、いずれも正規行列であり、実際 [A] は [C] に、[B] は [D] に含まれ、[C],[D] を示せば、そこから [A],[B] は導かれる。また、[1] で紹介したエルミート行列、歪エルミート行列の対角化や、対称行列、交代行列の標準形への変形も実は上の [C],[D] に含まれ、[C],[D] を示せば、[1] の内容もほぼすべて得られることになる。

よって本稿は、[C],[D] を示すことを目標とする。

なお、本稿で使用する用語、記号、定理等は [1] のものを使用する。

2 正規行列の対角化

$A\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ が**正規行列**とは、$AA^*=A^*A$ を満たすこと、と定義する。

エルミート行列 ($A^* = A$)、歪エルミート行列 ($A^* = -A$)、ユニタリ行列 ($A^* = A^{-1}$) はいずれも $AA^* = A^*A$ を満たし、正規行列となる。

また、「実 XX 行列」とは、「XX 行列」で成分がすべて実数のものを指すことにする。例えば A が**実正規行列**とは $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ で、$A\,{}^t\!A = {}^t\!AA$ を満たすことを意味し、実エルミート行列は対称行列、実歪エルミート行列は交代行列、実ユニタリ行列は直交行列を指すことになる。

[C] は、正規行列と、ユニタリ行列で対角化できる行列が同じものであることを意味するが、それは [1] の定理 3.2 と次の補題 2.1 から示される。

補題 2.1 $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ が正規行列でかつ三角行列ならば、A は対角行列。

証明

A が上三角行列の場合に示せば、下三角行列 B に対しては、$A = B^*$ は上三角行列でかつ正規行列となるので、A は対角行列となり、よって $B = A^*$ も対角行列となり、下三角行列でも成り立つことになる。

よって、$A = [a_{i,j}]$ を、

$$a_{i,j} = 0 \quad (i > j) \tag{1}$$

とする (上三角行列)。このとき、

$$AA^* = [a_{i,j}][\overline{a_{j,i}}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{i,k}\,\overline{a_{j,k}}\right], \quad A^*A = [\overline{a_{j,i}}][a_{i,j}] = \left[\sum_{k=1}^n \overline{a_{k,i}}\,a_{k,j}\right]$$

の (m, m) 成分を比較すると、

$$\sum_{k=1}^n |a_{m,k}|^2 = \sum_{k=1}^n |a_{k,m}|^2$$

となるが、(1) より、$1 \leq m \leq n$ なるすべての m に対し

$$\sum_{k=m}^n |a_{m,k}|^2 = \sum_{k=1}^m |a_{k,m}|^2 \tag{2}$$

が成り立つことになる。このとき、$j > i$ に対して $a_{i,j} = 0$ となることを示す。

(2) の両辺を m 倍して、すべての m に関して加え、$(m, k) = (i, j)$ とすると、左辺は、

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=m}^n m|a_{m,k}|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n i|a_{i,j}|^2$$

となる。一方右辺は、和の順序交換をして、$(m, k) = (j, i)$ とすると、

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m m|a_{k,m}|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{m=k}^n m|a_{k,m}|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n j|a_{i,j}|^2$$

となるから、この 2 つが等しいので、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i)|a_{i,j}|^2=0 \tag{3}$$

が成り立つ。この和の各項はすべて 0 以上なので、それらがすべて 0 であることになり、よって $j\geq i$ に対して $(j-i)|a_{i,j}|^2=0$ より $j>i$ に対して $a_{i,j}=0$ が得られ、よって A は対角行列となる。■

上の証明では、(2) を m 倍して加えることを行ったが、むしろ (2) から

$$\sum_{k=m+1}^{n}|a_{m,k}|^2=\sum_{k=1}^{m-1}|a_{k,m}|^2 \quad (m=1,2,\ldots,n)$$

として、それを $m=1$ から順に見ていくことで

$$a_{1,j}=0\ (j>1),\quad a_{2,j}=0\ (j>2),\quad a_{3,j}=0\ (j>3),\ldots$$

のように示す方が普通だと思うが、本稿の証明のような一度に示すやり方も可能である。

定理 2.2

$A\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ に対して、A がユニタリ行列で対角化可能であることと、A が正規行列であることは同値。

証明

まず、あるユニタリ行列 $U\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ により $B=U^*AU$ が対角行列となったとすると、

$$B^*=(U^*AU)^*=U^*A^*U$$

より、

$$BB^*=(U^*AU)(U^*A^*U)=U^*AA^*U,\quad B^*B=(U^*A^*U)(U^*AU)=U^*A^*AU$$

であり、B は対角行列なので、$BB^*=B^*B$ だから、

$$U^*AA^*U=U^*A^*AU$$

より $AA^*=A^*A$ となって、よって A は正規行列となる。

逆に A が正規行列、すなわち $AA^*=A^*A$ が成り立つとする。[1] の定理 3.2 より、$B=U^*AU$ が上三角行列となるようなユニタリ行列 U が存在する。このとき、B は、

$$BB^*=U^*AA^*U=U^*A^*AU=B^*B$$

を満たし、よって B は正規行列でかつ上三角行列となり、補題 2.1 より B は対角行列となるので、よって A はユニタリ行列で対角化できたことになる。■

3 実正規行列の標準形

本稿では、$z = x + yi \in \boldsymbol{C}$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して、

$$T(z) = T(x+yi) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\boldsymbol{R}) \tag{4}$$

と書くことにする。実正規行列 A の固有値は、固有多項式 $f_A(\lambda)$ が実数係数の n 次式なので、

$$\lambda = \mu_1 \pm i\nu_1, \ldots, \mu_k \pm i\nu_k, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2k} \quad (\mu_j, \nu_j, \xi_m \in \boldsymbol{R},\ \nu_j > 0) \tag{5}$$

の形となる。

これに対し、実正規行列の標準形とは、ある直交行列 Q により変形できる

$$Q^{-1}AQ = {}^t\!QAQ = \begin{bmatrix} T(\mu_1 + i\nu_1) & & & & & \Large 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & T(\mu_k + i\nu_k) & & & \\ & & & \xi_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ \Large 0 & & & & & \xi_{n-2k} \end{bmatrix} = S_1 \tag{6}$$

の形のことである。

なお、[1] で紹介した交代行列の標準形 ([1] の式 (1)) は、

$$R(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix} = T(\mu i)$$

より、上の (6) に含まれることがわかる。

さて、実正規行列を標準形 (6) に変形するとき、交代行列の場合同様、固有ベクトルの実部、虚部の直交性等を示す必要があるが、その際、次の補題が重要な役割を果たす。

補題 3.1

正規行列 $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ の固有値を $\lambda \in \boldsymbol{C}$, その固有ベクトルを $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}^n$ とすると、$\overline{\lambda}$ は A^* の固有値で、$\boldsymbol{\alpha}$ が A^* の固有値 $\overline{\lambda}$ に対する固有ベクトルとなる。

証明

$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ より、

$$\begin{aligned} 0 &= \|A\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \langle A\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{\alpha}\rangle \\ &= \langle A\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}\rangle - \langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}\rangle - \langle A\boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\alpha}\rangle + \langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\alpha}\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

となるが、A は正規行列なので、

$$\langle A\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, A^*A\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, AA^*\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle A^*\boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha}\rangle$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}\rangle &= \lambda\langle A^*\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle A^*\boldsymbol{\alpha}, \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\rangle,\\
\langle A\boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\alpha}\rangle &= \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha}\rangle,\\
\langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\alpha}\rangle &= \lambda\,\overline{\lambda}\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}, \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\rangle
\end{aligned}$$

となるので、(7) は、

$$\begin{aligned}
0 &= \langle A^*\boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha}\rangle - \langle A^*\boldsymbol{\alpha}, \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\rangle - \langle \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha}\rangle + \langle \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}, \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\rangle\\
&= \langle A^*\boldsymbol{\alpha} - \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}, A^*\boldsymbol{\alpha} - \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\rangle = \|A^*\boldsymbol{\alpha} - \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\|^2
\end{aligned}$$

に等しく、よって $A^*\boldsymbol{\alpha} = \overline{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$ が得られる。■

なお、A がエルミート行列や歪エルミート行列の場合は、$A^*\boldsymbol{\alpha}$ が何になるかを知ることは易しいが、A が正規行列というだけの場合それは簡単ではなく、それをこの補題 3.1 では、(7) のように $\|A\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{\alpha}\|^2$ を考えることで、正規行列の性質をうまく生かしてそれを求めるようにしているのが重要な工夫だと思う。

4 標準形への変形

本節で、実正規行列 A を標準形 (6) に変形する直交行列 Q を実際に構成する。

A の固有値 (5) に対し、定理 2.2 により、

$$U^*AU = \begin{bmatrix}
\mu_1 + i\nu_1 & & & & & & & \text{\Large 0}\\
& \mu_1 - i\nu_1 & & & & & &\\
& & \ddots & & & & &\\
& & & \mu_k + i\nu_k & & & &\\
& & & & \mu_k - i\nu_k & & &\\
& & & & & \xi_1 & &\\
& & & & & & \ddots &\\
\text{\Large 0} & & & & & & & \xi_{n-2k}
\end{bmatrix} \tag{8}$$

とするようなユニタリ行列 U が存在する。このとき U の列ベクトルを

$$U = [\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_k\ \boldsymbol{\beta}_k\ \boldsymbol{\gamma}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\gamma}_{n-2k}] \tag{9}$$

とすると、これらは A の単位固有ベクトルで、$\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底を成し、

$$\begin{array}{l} A\boldsymbol{\alpha}_j = (\mu_j + i\nu_j)\boldsymbol{\alpha}_j, \quad A\boldsymbol{\beta}_j = (\mu_j - i\nu_j)\boldsymbol{\beta}_j, \quad A\boldsymbol{\gamma}_m = \xi_m\boldsymbol{\gamma}_m \\ \quad (1 \leq j \leq k,\ 1 \leq m \leq n-2k) \end{array} \tag{10}$$

を満たす。よって、補題 3.1 と $A^* = {}^t\!A$ より、次がいえる。

$${}^t\!A\boldsymbol{\alpha}_j = (\mu_j - i\nu_j)\boldsymbol{\alpha}_j, \quad {}^t\!A\boldsymbol{\beta}_j = (\mu_j + i\nu_j)\boldsymbol{\beta}_j, \quad {}^t\!A\boldsymbol{\gamma}_m = \xi_m\boldsymbol{\gamma}_m \tag{11}$$

これに対し、まずは複素ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_m$ の実ベクトルへの取り替えから考える。固有値 $\xi_1 \sim \xi_{n-2k}$ のうち、r 重解を $\xi_{m_1} = \xi_{m_r} (= \sigma)$ とするとき、その複素固有ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_{m_1}, \dots \boldsymbol{\gamma}_{m_r}$ は互いに直交するので線形独立で、その固有値 σ に対する固有空間

$$Z_C(A - \sigma E) = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C}^n \,|\, (A - \sigma E)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\}$$

はそれらを含むため、$Z_C(A-\sigma E)$ の次元は r 以上となるが、その次元は $Z_R(A-\sigma E)$ に等しい ([1] の補題 4.1) のでその次元も r 以上であり、$Z_R(A-\sigma E)$ から r 個の直交する実単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{m_1}, \dots \boldsymbol{u}_{m_r}$ を取ることができる。これを実固有値 $\xi_1 \sim \xi_{n-2k}$ すべてに対して行えば、単位ベクトルの実固有ベクトル列 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-2k} \in \boldsymbol{R}^n$ を取ることができる。同じ固有空間内では直交するものを取ったが、異なる固有値に対する $\boldsymbol{u}_m$ 同士が直交することも、次のようにして示される。

$\xi_m \neq \xi_\ell$ のとき、(10), (11) より

$$(A\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_\ell) = \xi_m(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_\ell) = (\boldsymbol{u}_m, {}^t\!A\boldsymbol{u}_\ell) = \xi_\ell(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_\ell)$$

なので、$(\xi_m - \xi_\ell)(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_\ell) = 0$ となり、$\xi_m \neq \xi_\ell$ より $\boldsymbol{u}_m \perp \boldsymbol{u}_\ell$ が得られる。よって $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-2k}$ は互いに直交する実単位ベクトルとなる。

次は、$\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{a}_j + i\boldsymbol{b}_j$ $(1 \leq j \leq k)$ とするとき、$\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m$ の直交性等を示す。

$$\begin{aligned} (\mu_j + i\nu_j)\boldsymbol{\alpha}_j &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j) + i(\mu_j\boldsymbol{b}_j + \nu_j\boldsymbol{a}_j) \\ (\mu_j - i\nu_j)\boldsymbol{\alpha}_j &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j + \nu_j\boldsymbol{b}_j) + i(\mu_j\boldsymbol{b}_j - \nu_j\boldsymbol{a}_j) \end{aligned}$$

より、(10), (11) を実部、虚部に分けると、

$$\left\{ \begin{aligned} A\boldsymbol{a}_j &= \mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j \\ A\boldsymbol{b}_j &= \mu_j\boldsymbol{b}_j + \nu_j\boldsymbol{a}_j \\ A\boldsymbol{u}_m &= \xi_m\boldsymbol{u}_m \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} {}^t\!A\boldsymbol{a}_j &= \mu_j\boldsymbol{a}_j + \nu_j\boldsymbol{b}_j \\ {}^t\!A\boldsymbol{b}_j &= \mu_j\boldsymbol{b}_j - \nu_j\boldsymbol{a}_j \\ {}^t\!A\boldsymbol{u}_m &= \xi_m\boldsymbol{u}_m \end{aligned} \right. \tag{12}$$

となる。さらに、$\boldsymbol{\alpha}_j$ $(1 \leq j \leq k)$ は $\boldsymbol{C}^n$ で互いに直交する単位ベクトルなので、

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_\ell \rangle = (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) + (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) + i\{(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) - (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell)\}$$

より、

$$\left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = -(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell), \quad (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) \quad (j \neq \ell) \\ |\boldsymbol{a}_j|^2 + |\boldsymbol{b}_j|^2 = 1 \quad (1 \leq j \leq k) \end{array} \right. \tag{13}$$

となる。

補題 4.1

1. $|\boldsymbol{a}_j| = |\boldsymbol{b}_j| = 1/\sqrt{2} \quad (1 \le j \le k)$
2. $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_j \quad (1 \le j \le k)$
3. $j \ne \ell$ に対し、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{a}_\ell$, $\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$, $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$
4. $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{u}_m \quad (1 \le j \le k, 1 \le m \le n-2k)$

証明

1. $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$、および (12) より、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j) = \mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) - \nu_j|\boldsymbol{b}_j|^2 \\ &= (\boldsymbol{a}_j, {}^tA\boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{a}_j, \mu_j\boldsymbol{b}_j - \nu_j\boldsymbol{a}_j) = \mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) - \nu_j|\boldsymbol{a}_j|^2\end{aligned}$$

となるので、$\nu_j|\boldsymbol{a}_j|^2 = \nu_j|\boldsymbol{b}_j|^2$ がわかり、$\nu_j > 0$ より $|\boldsymbol{a}_j| = |\boldsymbol{b}_j|$ となり、(13) より、$|\boldsymbol{a}_j| = |\boldsymbol{b}_j| = 1/\sqrt{2}$ が得られる。

2. (12) より、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_j) = \mu_j|\boldsymbol{a}_j|^2 - \nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) \\ &= (\boldsymbol{a}_j, {}^tA\boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{a}_j, \mu_j\boldsymbol{a}_j + \nu_j\boldsymbol{b}_j) = \mu_j|\boldsymbol{a}_j|^2 + \nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j)\end{aligned}$$

となり、よって $2\nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_j) = 0$ だから $\nu_j > 0$ より $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_j$ となる。

3. $j \ne \ell$ に対し、(12)、(13) より、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = \mu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) + \nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) \\ &= (\boldsymbol{a}_j, {}^tA\boldsymbol{b}_\ell) = (\boldsymbol{a}_j, \mu_\ell\boldsymbol{b}_\ell - \nu_\ell\boldsymbol{a}_\ell) = \mu_\ell(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) - \nu_\ell(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell)\end{aligned}$$

となり、

$$(\mu_j - \mu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) + (\nu_j + \nu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = 0 \tag{14}$$

が得られる。(14) で j と ℓ を入れ替えて (13) を用いると、

$$(\mu_\ell - \mu_j)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) + (\nu_j + \nu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = 0 \tag{15}$$

となるから、(14), (15) より $2(\nu_j + \nu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = 0$ となり、$\nu_j + \nu_\ell > 0$ より

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = 0 \tag{16}$$

よって $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{a}_\ell$ が得られる。さらに、(13) と (16) より

$$(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = 0 \tag{17}$$

となり $\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$ が得られる。なお、(14), (16) から

$$(\mu_j - \mu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = 0$$

となるが、$\mu_\ell \neq \mu_j$ とは限らないので、ここから $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$ は得られないことに注意する。次は $(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell)$ を計算する。$j \neq \ell$, (12)、(13)、および (16) より、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_\ell) &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = -\nu_j(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_\ell) = -\nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) \\ &= (\boldsymbol{a}_j, {}^tA\boldsymbol{a}_\ell) = (\boldsymbol{a}_j, \mu_\ell\boldsymbol{a}_\ell + \nu_\ell\boldsymbol{b}_\ell) = \nu_\ell(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell)\end{aligned}$$

となり、$(\nu_j + \nu_\ell)(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_\ell) = 0$ なので、$\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{b}_\ell$ が得られる。

4. (12) より

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) &= (\mu_j\boldsymbol{b}_j + \nu_j\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) = \mu_j(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) + \nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) \\ &= (\boldsymbol{b}_j, {}^tA\boldsymbol{u}_m) = \xi_m(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m)\end{aligned}$$

となり、よって

$$(\mu_j - \xi_m)(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) + \nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) = 0 \tag{18}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{b}_j) &= \xi_m(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{b}_j) \\ &= (\boldsymbol{u}_m, {}^tA\boldsymbol{b}_j) = (\boldsymbol{u}_m, \mu_j\boldsymbol{b}_j - \nu_j\boldsymbol{a}_j) = \mu_j(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{b}_j) - \nu_j(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{a}_j)\end{aligned}$$

より

$$(\xi_m - \mu_j)(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) + \nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) = 0 \tag{19}$$

となるので、(18), (19) より $2\nu_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) = 0$ となり、$\nu_j > 0$ より

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) = 0 \tag{20}$$

よって $\boldsymbol{a}_j \perp \boldsymbol{u}_m$ が得られる。また、(12), (20) より、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) &= (\mu_j\boldsymbol{a}_j - \nu_j\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) = -\nu_j(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) \\ &= (\boldsymbol{a}_j, {}^tA\boldsymbol{u}_m) = \xi_m(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{u}_m) = 0\end{aligned}$$

となり、$\nu_j(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{u}_m) = 0$, よって $\nu_j > 0$ より $\boldsymbol{b}_j \perp \boldsymbol{u}_m$ が得られる。■

$\hat{\boldsymbol{a}}_j = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_j$, $\hat{\boldsymbol{b}}_j = \sqrt{2}\,\boldsymbol{b}_j$ とすると、この補題 4.1 により

$$\hat{\boldsymbol{a}}_j,\ \hat{\boldsymbol{b}}_j,\ \boldsymbol{u}_m \quad (1 \le j \le k,\ 1 \le m \le n - 2k)$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底となり、

$$Q = [\hat{\boldsymbol{a}}_1\ \hat{\boldsymbol{b}}_1\ \cdots\ \hat{\boldsymbol{a}}_k\ \hat{\boldsymbol{b}}_k\ \boldsymbol{u}_1\ \cdots\ \boldsymbol{u}_{n-2k}]$$

は直交行列で、

$$A\hat{\boldsymbol{a}}_j = \mu_j\hat{\boldsymbol{a}}_j - \nu_j\hat{\boldsymbol{b}}_j, \quad A\hat{\boldsymbol{b}}_j = \mu_j\hat{\boldsymbol{b}}_j + \nu_j\hat{\boldsymbol{a}}_j, \quad A\boldsymbol{u}_m = \xi_m\boldsymbol{u}_m$$

より、(6) の S_1 に対し $AQ = QS_1$ が成り立つことがわかる。

これで、U を元に実正規行列を標準形に直す直交行列 Q が構成できたことになる。

5 直交行列の標準形

直交行列も実正規行列なので、前節の標準形 S_1 に変形できる。直交行列の固有値については、次のことが知られている。

定理 5.1 直交行列 A の固有値 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ はすべて $|\lambda| = 1$ となる。

証明

λ に対する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C}^n$ とする ($\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$)。$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, $A^* = {}^tA$, ${}^tAA = E$ より、

$$\begin{aligned} \langle A\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}\rangle &= \langle \boldsymbol{\alpha}, {}^tAA\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = |\boldsymbol{\alpha}|^2 \\ &= \langle \lambda\boldsymbol{\alpha}, \lambda\boldsymbol{\alpha}\rangle = \lambda\,\overline{\lambda}\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = |\lambda|^2|\boldsymbol{\alpha}|^2 \end{aligned}$$

となる。$|\boldsymbol{\alpha}| \neq 0$ より、$|\lambda|^2 = 1$、よって $|\lambda| = 1$ が得られる。■

この定理 5.1 により、直交行列 A の固有値 λ は、

$$\lambda = 1\ (\ell\ 重解)、-1\ (m\ 重解)、e^{\pm i\theta_1}, \ldots, e^{\pm i\theta_k} \quad (\ell + m + k = n,\ 0 < \theta_j < \pi)$$

と書け、

$$T(e^{i\theta_j}) = T(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}$$

によって直交行列の標準形は

$$\begin{bmatrix} T(e^{i\theta_1}) & & & & & & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & T(e^{i\theta_k}) & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

となる。

6 最後に

1 節でも述べたが、本稿の内容は、ほかの本や文書でも紹介しているものがあるから、さほど本稿自体に意味があるものでもない。むしろ、自分への備忘録としてまとめたものである。

学生の頃に受けた線形代数の講義では、ユニタリ行列による対角化等の話も聞いたような気はするのだが、その後使わなかったためかほとんど覚えていなかったし、当時もそれほど意識していなかった。ただ、多分聞いたことがないわけではなく、覚えていないだけだと思うので、当時の講義の問題ではなく、もちろん私の問題である。

また、微分方程式の分野では、本稿のような標準形よりも、むしろ Jordan 標準形の方が良く用いられるので、そちらは意識しているが、ユニタリ行列や直交行列による標準形はあまり使ったことがなく、大学の線形代数の講義でもこのあたりまで進むことはないので、その後も思い出す機会はほぼなかった。

よって、本稿と [1] のように、これらを学び直す機会は、個人的にはだいぶ有意義であったし、私の備忘録としての意味はあったと思う。

参考文献

[1] 竹野茂治、「対称行列・交代行列の対角化」(2024)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/data/diag1.pdf

[2] 近藤弘一、「線形代数学 II」(2008)
http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2007.linear-algebra-II/linear-algebra-II.pdf

[3] 川内毅、「線形代数学演習第二」(2016)
http://www.math.titech.ac.jp/~kawachi/maths/2016/LA/l3.pdf

[4] 川崎徹郎、「線形代数学続論」(2016)
https://pc1.math.gakushuin.ac.jp/~kawasaki/16senkeidaisuuzokuron.pdf

[5] 石原繁、浅野重初、「理工系の基礎 線形代数」(1995)、裳華房

[6] 佐藤正次、永井治、「新版 基礎課程 線型代数学」(1976)、学術図書出版社

[7] Nomizu Katsumi, “*Fundamentals of Linear Algebla*”, 2nd ed. (1979), Chelsea Publ.