2022 年 05 月 09 日

行列の可換性について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

n 次正方行列 A, B に対し、一般には $AB = BA$ とはならず、逆に $AB = BA$ が成り立つとき A と B は可換であるという。

A^k と A とは、$AA^k = A^kA = A^{k+1}$ より A と A^k は可換であるから、一般に多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ に対して $B = f(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ と A は可換になる。

本稿では、この逆が成り立つか、すなわち B が A と可換ならば、なんらかの多項式 $f(x)$ によって $B = f(A)$ の形に書けるだろうか、について考えてみる。

なお、$A = kE$ (k はスカラー、E は単位行列) や $A = O$ (零行列) の場合は任意の B が A と可換になってしまうので、本稿では A はそのどちらの形でもないと仮定する。

また、ケーリー・ハミルトンの定理により、A^n は A の $(n-1)$ 次以下の多項式で表せるので、$f(x)$ は $(n-1)$ 次以下 $(m < n)$ の多項式と考えてよいことに注意する。

2 2 次の場合

まず $n = 2$ の 2 次の正方行列の場合を考えてみる。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので、A と B が可換であることは、

$$
\begin{aligned}
bz &= cy & (1)\\
(a-d)y &= b(x-w) & (2)\\
(a-d)z &= c(x-w) & (3)
\end{aligned}
$$

が成り立つことと同値となる。これを場合分けして考えていくが、本節の目標は、B が A の 1 次式

$$
B = pA + qE \tag{4}
$$

の形で表されるかどうかを示すことである。

1. **$b \neq 0$ かつ $a \neq d$ の場合**

   この場合、(2) より

   $$
   y = \frac{b}{a-d}(x-w) \tag{5}
   $$

   となり、よって (1), (5) より

   $$
   z = \frac{c}{b}y = \frac{c}{a-d}(x-w) \tag{6}
   $$

   となり y, z を x, w で表せる。そして (6) が (3) が得られるので、この場合は (5), (6) を満たすことが A と B が可換であることと同値となる。

   そして、この場合 B は、

   $$
   \begin{aligned}
   B &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \dfrac{b}{a-d}(x-w) \\ \dfrac{c}{a-d}(x-w) & w \end{bmatrix}\\
   &= wE + \begin{bmatrix} x-w & \dfrac{b}{a-d}(x-w) \\ \dfrac{c}{a-d}(x-w) & 0 \end{bmatrix} = wE + \frac{x-w}{a-d}\begin{bmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{bmatrix}\\
   &= wE + \frac{x-w}{a-d}(A-dE) = \frac{x-w}{a-d}A + \frac{aw-dx}{a-d}E
   \end{aligned}
   $$

   となって確かに B が A の 1 次式 (4) の形になることがわかる。

2. $b \neq 0$ **かつ** $a = d$ **の場合**

この場合 (1), (2), (3) は

$$\begin{aligned} z &= \frac{c}{b}y && (7)\\ b(x-w) &= 0 && (8)\\ c(x-w) &= 0 && (9) \end{aligned}$$

となる。$b \neq 0$ なので、(8) より

$$x = w \qquad (10)$$

となり、(9) は自然に成り立つ。よってこの場合は、(7) と (10) が可換の条件となる。この場合、

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = aE + \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

であり、B は (7), (10) より、

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{c}{b}y & x \end{bmatrix} = xE + \frac{y}{b}\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = xE + \frac{y}{b}(A - aE) \\ &= \frac{y}{b}A + \frac{bx - ay}{b}E \end{aligned}$$

なので、やはり (4) の形となる。

3. $b = 0$ **かつ** $a \neq d$ **の場合**

この場合は (2) より

$$y = 0 \qquad (11)$$

となり、また (1) は両辺 0 になり、(3) は

$$z = \frac{c}{a-d}(x - w) \qquad (12)$$

となるので、この (11), (12) が可換の条件となる。この場合 A は、

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

で、B は、(11), (12) より

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ \dfrac{c}{a-d}(x-w) & w \end{bmatrix} = wE + \frac{x-w}{a-d}\begin{bmatrix} a-d & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \\ &= wE + \frac{x-w}{a-d}(A-dE) = \frac{x-w}{a-d}A + \frac{aw-dx}{a-d}E \end{aligned}$$

となり (4) の形となる。

4. $b=0$ **かつ** $a=d$ **の場合**

この場合、(1) より $cy=0$ となるが、$c=0$ だと $b=0, a=d$ より $A=aE$ となって仮定に反する。よって $c\neq 0$ で、

$$y=0 \tag{13}$$

となり、(2) は両辺 0 になり、また (3) は $c\neq 0$ より

$$x=w \tag{14}$$

となる。この (13), (14) が可換の条件となる。この場合、

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} = aE + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で $c\neq 0$, (13), (14) より、

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ z & x \end{bmatrix} = xE + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = xE + \frac{z}{c}(A-aE) \\ &= \frac{z}{c}A + \frac{cx-az}{c}E \end{aligned}$$

となり (4) の形となる。

以上をまとめると、$n=2$ で $A\neq kE, A\neq O$ の場合は、確かに A, B が可換になるのは B が A の 1 次式の場合であることが示されたことになる。

3　3 次の場合

次は、$n = 3$ の 3 次の正方行列について考える。実はこの場合は A, B が可換でも、B が A の 2 次式で書けるとは限らない。すなわち容易に反例が作れる。C, D を

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると、容易にわかるがこれは可換で、$CD = DC = O$ となる。これも実は反例の一つなのであるが、さらに

$$A = E + aC = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = bD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} AB &= (E + aC)bD = bD + O = B, \\ BA &= bD(E + aC) = bD + O = B \end{aligned}$$

となって $AB = BA$ となる。

しかし、A (および C) は上三角行列なので、A (および C) の多項式も (さらに言えば A の負のべきも) すべて上三角行列となる。一方 B (および D) は下三角行列なので、A (および C) の多項式で表わされることはない。

$n \geq 4$ の場合も、容易に $n = 3$ の場合と同じ形の反例が作れるので、結局 $n \geq 3$ では A, B が可換であっても B が A の多項式で表されるとは限らないことになり、可換ならば B が A の多項式で表されるのは $n = 2$ の場合のみ、ということになる。