平成 15 年 11 月 27 日

積、商、合成関数等のテイラー展開について その 2

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日、以下のような関数のテイラー展開 (マクローリン展開) について大学院生から質問を受けた。

$$f(x)=(A+B\sqrt{x^2+L^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

なんでも 3 次までの展開がしたいのだという。元の問題は非線形振動の問題であるようだが、そのような分野では確かにマクローリン展開などで高次の項をどこまで考慮するか、どこから無視するか、といった計算は頻繁に行なわれているだろうと思う。このマクローリン展開を計算する方法を紹介する。

2 計算方法

実はこのマクローリン展開は、一般二項展開公式

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ n\end{array}\right)x^\alpha\quad(|x|<1) \tag{1}$$

さえ知っていれば「微分を使わずに」展開ができるのである。ここで、$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ n\end{array}\right)$ は、一般二項係数

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ n\end{array}\right)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (n\geq 1:\text{整数}),\quad \left(\begin{array}{c}\alpha\\ 0\end{array}\right)=1$$

を意味する。

まず、$f(x)$ は展開すれば

$$f(x)=\frac{Ax}{\sqrt{x^2+L^2}}+Bx=Axg(x)+Bx\quad\left(g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)$$

となるが、Bx はこれ自身多項式であり、関数の和のマクローリン展開はマクローリン展開の和に等しいことを考えれば、$Axg(x)$ のマクローリン展開を求めてそれと足し算すればいいことが分かる。また、例えば $g(x)$ のマクローリン展開が

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

だったとすると、$Axg(x)$ のマクローリン展開は、単にこの式の両辺に Ax をかけたもの、すなわち

$$Axg(x)=Aa_0x+Aa_1x^2+Aa_2x^3+Aa_3x^4+\cdots$$

となるので、よって $g(x)$ のマクローリン展開さえ求めればすむことになる。

3 $g(x)$ の展開

$g(x)$ のマクローリン展開であるが、$g(x)$ は x^2 の関数なので、$x^2 = X$ として $G(X) = 1/\sqrt{X+L^2}$ の X に関するマクローリン展開を求めて、その式に $X = x^2$ を代入すればいい。例えば

$$G(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \cdots$$

だったとすれば、

$$g(x) = b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + b_3 x^6 + \cdots$$

となるわけである。また、$G(X)$ であるが、

$$G(X) = \frac{1}{\sqrt{X+L^2}} = \frac{1}{L\sqrt{\dfrac{X}{L^2}+1}} = \frac{1}{L}(1+y)^{-1/2} \qquad \left(y = \frac{X}{L^2}\right)$$

となるので、この $(1+y)^{-1/2}$ のマクローリン展開に $y = X/L^2$ を代入して $1/L$ 倍すればそれでいい。

これらの操作はいずれも、巾級数 (マクローリン展開) の一意性定理により保証される。

結局、$f(x)$ のマクローリン展開は $(1+y)^{-1/2}$ の y に関するマクローリン展開に帰着されるわけであるが、これは最初に上げた一般二項定理 (1) により、

$$(1+y)^{-1/2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} y + \cdots = 1 - \frac{1}{2}y + \cdots$$

となるので、後はこれを使って

$$\begin{aligned}
G(X) &= \frac{1}{L}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{X}{L^2} + \cdots\right) = \frac{1}{L} - \frac{X}{2L^3} + \cdots, \\
g(x) &= G(x^2) = \frac{1}{L} - \frac{x^2}{2L^3} + \cdots, \\
f(x) &= Axg(x) + Bx = Ax\left(\frac{1}{L} - \frac{x^2}{2L^3} + \cdots\right) + Bx \\
&= \frac{Ax}{L} - \frac{Ax^3}{2L^3} + \cdots + Bx = \left(\frac{A}{L} + B\right)x - \frac{Ax^3}{2L^3} + \cdots
\end{aligned}$$

と、順に求まっていくことになる。

4 次以上の項も求めたい場合は $(1+y)^{-1/2}$ の展開を必要なだけ追加していけば良い。