

2025 年 09 月 24 日

一般角に対する三角関数の加法定理

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で三角関数の加法定理の図形による証明などを紹介した。しかし、その証明では角は当然三角形の内角、すなわち α, β が 90° 未満の角に対するもので、一般角に対する証明にはなっていない。

高校の教科書ではどうやっているかといくつか見てみたが、私が見た教科書はいずれも、単位円周上で中心角が α, β の点と原点とが作る三角形に関して考察するもので、多少角の制限は緩くなるが、それでもすべての一般角についての加法定理の証明にはやや不十分で、実際「一般角についても成り立つことが知られている」と断わっているものもあった。

本稿では、一応すべての一般角に対して加法定理が成り立つことの証明、およびその他について紹介する。

2 直角未満の角の場合

[1] の 2 節で、図による三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

の証明を 2 種類紹介したが、後者の方法を用いると、 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ となるすべての α, β に対する $\sin$ と $\cos$ の加法定理の証明が得られることがわかる。

なお、[1] では $\cos$ の加法定理は余弦定理で、 $\sin$ の加法定理は面積公式で証明したが、 $\sin$ の加法定理は正弦定理で証明することもできる。

すなわち、

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

より、

$$\frac{\tan x + \tan y}{\sin(x+y)} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\sin(90^\circ - y)} = \frac{1}{\cos x \cos y}$$

となるので、

$$\sin(x+y) = (\tan x + \tan y) \cos x \cos y = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (3)$$

となって $\sin$ の加法定理が得られる。

なお、(1), (2) は、[1] の図による証明の段階では「 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ かつ $0^\circ < \beta < 90^\circ$ 」で成り立つことが保証されるわけだが、ここでこの α, β の範囲を 0° にまで拡張しておく。

$\alpha = 0^\circ$ の場合 (1), (2) は

$$\sin \beta = \sin 0^\circ \cos \beta + \cos 0^\circ \sin \beta, \quad \cos \beta = \cos 0^\circ \cos \beta - \sin 0^\circ \sin \beta$$

となるが、 $\cos 0^\circ = 1, \sin 0^\circ = 0$ よりこれらは当然成立する。

$\beta = 0^\circ$ の場合は、(1), (2) は α, β に対称な式なので、上の論法の β が α に変わるだけであるから当然成立する。これで (1), (2) が

$$P_1 : 「0^\circ \leq \alpha < 90^\circ \text{ かつ } 0^\circ \leq \beta < 90^\circ」$$

で成立することが示された。

なお、厳密に言えば、上では $\alpha = 0^\circ$ のときはすべての一般角の β に対して成立することが示され、 $\beta = 0^\circ$ のときはすべての一般角の α に対して成立することが示されたのだが、多少損をして、 P_1 の範囲で成り立つといっても間違いではない。

3 角の拡張その 1

次は、(1), (2) が成り立つ範囲を P_1 から少しずつ広げていく。

まず、

$$P_2 : 「90^\circ \leq \alpha < 180^\circ \text{ かつ } 0^\circ \leq \beta < 90^\circ」$$

の場合を考える。この場合は、 $\gamma = \alpha - 90^\circ$ とすると $0^\circ \leq \gamma < 90^\circ$ なので、 P_1 より γ と β に対しては加法定理が成立するので、

$$\sin(\theta \pm 90^\circ) = \pm \cos \theta, \quad \cos(\theta \pm 90^\circ) = \mp \sin \theta \quad (4)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\gamma + \beta + 90^\circ) = \cos(\gamma + \beta) \\ &= \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta \\ &= \cos(\alpha - 90^\circ) \cos \beta - \sin(\alpha - 90^\circ) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\gamma + \beta + 90^\circ) = -\sin(\gamma + \beta) \\ &= -(\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta) \\ &= -\sin(\alpha - 90^\circ) \cos \beta - \cos(\alpha - 90^\circ) \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

となって、 P_2 に対して (1), (2) が成り立つことが示される。なお、上では $\sin$ の加法定理は $\cos$ の加法定理により導かれていて、 $\cos$ の加法定理は $\sin$ の加法定理により導かれていることに注意する。

加法定理 (1), (2) は α, β について対称なので、 P_2 の代わりに

$$P_3: [0^\circ \leq \alpha < 90^\circ \text{ かつ } 90^\circ \leq \beta < 180^\circ]$$

とした場合も、上と同じように加法定理の成立を示すことができることになる。

さらに、

$$P_4: [90^\circ \leq \alpha < 180^\circ \text{ かつ } 90^\circ \leq \beta < 180^\circ]$$

の場合を考えると、 $\gamma = \alpha - 90^\circ$ とすれば、 γ, β は P_3 の状態になり、 γ, β に対し加法定理は成立するので、よって上と同じ計算によって α, β に対する加法定理の成立を示すことができる。

これで、 P_1, P_2, P_3, P_4 により、

$$P_5: [0^\circ \leq \alpha < 180^\circ \text{ かつ } 0^\circ \leq \beta < 180^\circ]$$

の場合に (1), (2) が成り立つことが示された。

4 角の拡張その 2

3 節の論法はさらに繰り返すことができる。すなわち、

$$P_6: 「180^\circ \leq \alpha < 270^\circ \text{ かつ } 0^\circ \leq \beta < 180^\circ」$$

の場合に加法定理が成立することが、3 節と同じ論法で (具体的な計算なしに) 示され、同様に、

$$P_7: 「0^\circ \leq \alpha < 180^\circ \text{ かつ } 180^\circ \leq \beta < 270^\circ」,$$

$$P_8: 「180^\circ \leq \alpha < 270^\circ \text{ かつ } 180^\circ \leq \beta < 270^\circ」$$

の場合に成立することも、同じ論法で (具体的な計算なしに) 示されるので、結局

$$P_9: 「0^\circ \leq \alpha < 270^\circ \text{ かつ } 0^\circ \leq \beta < 270^\circ」$$

で加法定理が成立することになる。

これを無限に (厳密には帰納法で) 繰り返すことですべての 0° 以上の角に対する加法定理の成立を示すこともできるのであるが、とりあえずはもう 1 回だけ繰り返すことで、

$$P_{10}: 「0^\circ \leq \alpha < 360^\circ \text{ かつ } 0^\circ \leq \beta < 360^\circ」$$

で (1), (2) が成立することまでは言える。あとは、 $\sin, \cos$ の周期性

$$\sin(\theta + 360^\circ n) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 360^\circ n) = \cos \theta \quad (n \text{ は任意の整数}) \quad (5)$$

を用いる。すなわち、任意の角 α, β に対し、

$$\begin{cases} \alpha = \gamma + 360^\circ m, & 0^\circ \leq \gamma < 360^\circ \\ \beta = \delta + 360^\circ n, & 0^\circ \leq \delta < 360^\circ \end{cases} \quad (6)$$

となる角 γ, δ , 整数 m, n が取れ、 γ, δ に対しては加法定理が成立しているので、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\gamma + \delta + 360^\circ(m + n)) = \sin(\gamma + \delta), \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\gamma + \delta + 360^\circ(m + n)) = \cos(\gamma + \delta), \\ \sin \gamma &= \sin \alpha, \quad \cos \gamma = \cos \alpha, \\ \sin \delta &= \sin \beta, \quad \cos \delta = \cos \beta \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\gamma + \delta) = \sin \gamma \cos \delta + \cos \gamma \sin \delta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\gamma + \delta) = \cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

となり α, β に対しても加法定理が成立することがわかる

これで、すべての一般角に対して加法定理 (1), (2) が成立することが示された。

5 複素版

実は、三角関数は「複素関数論」では複素数変数にまで拡張されていて、そこでも加法定理が成り立つことがわかっている。それもついでに紹介する。

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数、 $i = \sqrt{-1}$) に対して、

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x\end{aligned}\quad (8)$$

のように定義される。なお、 $\cosh y, \sinh y$ は

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

で定義される双曲線関数と呼ばれるものである。

この (7), (8) に対しても加法定理 (1), (2) が成立することを計算で直接示す。 $\alpha = p + qi$, $\beta = s + ti$ (p, q, s, t は実数) とする。

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \sin(p + qi) \cos(s + ti) \\ &= (\cosh q \sin p + i \sinh q \cos p)(\cosh t \cos s - i \sinh t \sin s) \\ &= \cosh q \cosh t \sin p \cos s + \sinh q \sinh t \cos p \sin s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i(-\cosh q \sinh t \sin p \sin s + \sinh q \cosh t \cos p \cos s), \\
\cos \alpha \sin \beta &= \cos(p + qi) \sin(s + ti) \\
&= (\cosh q \cos p - i \sinh q \sin p)(\cosh t \sin s + i \sinh t \cos s) \\
&= \cosh q \cosh t \cos p \sin s + \sinh q \sinh t \sin p \cos s \\
& \quad +i(\cosh q \sinh t \cos p \cos s - \sinh q \cosh t \sin p \sin s)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
& \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
&= (\cosh q \cosh t + \sinh q \sinh t)(\sin p \cos s + \cos p \sin s) \\
& \quad +i(\sinh q \cosh t + \cosh q \sinh t)(\cos p \cos s - \sin p \sin s) \\
&= (\cosh q \cosh t + \sinh q \sinh t) \sin(p + s) \\
& \quad +i(\sinh q \cosh t + \cosh q \sinh t) \cos(p + s)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\cosh q \cosh t + \sinh q \sinh t &= \frac{e^q + e^{-q}}{2} \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^q - e^{-q}}{2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\
&= \frac{e^{q+t} + e^{-q-t}}{2} = \cosh(q + t), \\
\sinh q \cosh t + \cosh q \sinh t &= \frac{e^q - e^{-q}}{2} \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^q + e^{-q}}{2} \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\
&= \frac{e^{q+t} - e^{-q-t}}{2} = \sinh(q + t)
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta &= \cosh(q + t) \sin(p + s) + i \sinh(q + t) \cos(p + s) \\
&= \sin((p + s) + (q + t)i) = \sin(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

となって $\sin$ の加法定理が得られる。

次は $\cos$ の加法定理。

$$\begin{aligned}
\cos \alpha \cos \beta &= \cos(p + qi) \cos(s + ti) \\
&= (\cosh q \cos p - i \sinh q \sin p)(\cosh t \cos s - i \sinh t \sin s) \\
&= \cosh q \cosh t \cos p \cos s - \sinh q \sinh t \sin p \sin s \\
& \quad -i(\cosh q \sinh t \cos p \sin s + \sinh q \cosh t \sin p \cos s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \sin \beta &= \sin(p + qi) \sin(s + ti) \\
&= (\cosh q \sin p + i \sinh q \cos p)(\cosh t \sin s + i \sinh t \cos s) \\
&= \cosh q \cosh t \sin p \sin s - \sinh q \sinh t \cos p \cos s \\
&\quad + i(\cosh q \sinh t \sin p \cos s + \sinh q \cosh t \cos p \sin s)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
&= (\cosh q \cosh t + \sinh q \sinh t)(\cos p \cos s - \sin p \sin s) \\
&\quad - i(\sinh q \cosh t + \cosh q \sinh t)(\cos p \sin s + \sin p \cos s) \\
&= \cosh(q + t) \cos(p + s) - i \sinh(q + t) \sin(p + s) \\
&= \cos((p + s) + (q + t)i) = \cos(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

となって $\cos$ の加法定理も得られる。

6 多項の加法定理

ついでに、もうひとつ別の方向の加法定理の拡張も紹介しておく。

2 節の (3) のように、 $\sin, \cos$ の加法定理は $\tan, \cos$ によって次のように書き表すこともできる。

$$\sin(\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta) \cos \alpha \cos \beta \quad (9)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = (1 - \tan \alpha \tan \beta) \cos \alpha \cos \beta \quad (10)$$

これらは、元の加法定理 (1),(2) とは別の対称性を持っている。

これらを用いて、3 項の $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ の展開式を試みる。まず (9) より、

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + (\beta + \gamma)) = \{\tan \alpha + \tan(\beta + \gamma)\} \cos \alpha \cos(\beta + \gamma)$$

となるが、これに $\tan$ の加法定理と (10) を用いると、

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha + \beta + \gamma) \\
&= \left(\tan \alpha + \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} \right) \cos \alpha (1 - \tan \beta \tan \gamma) \cos \beta \cos \gamma \\
&= (\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad (11)
\end{aligned}$$

同様に、(10) より、

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos(\alpha + (\beta + \gamma)) \\
 &= \{1 - \tan \alpha \tan(\beta + \gamma)\} \cos \alpha \cos(\beta + \gamma) \\
 &= \left(1 - \tan \alpha \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma}\right) \cos \alpha (1 - \tan \beta \tan \gamma) \cos \beta \cos \gamma \\
 &= (1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \tan \gamma - \tan \beta \tan \gamma) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma
 \end{aligned} \tag{12}$$

のようになる。

今、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の k 次基本対称式 ($1 \leq k \leq n$)、すなわち $X_1, X_2, \dots, X_n$ から k 個を選んでそれらをかけたものの、 k 個の選び方すべての組み合わせに対する和を

$$\begin{aligned}
 S_k^n &= S_k^n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \prod_{m=1}^k X_{j_m} \\
 &= X_1 X_2 \cdots X_k + X_1 X_2 \cdots X_{k-1} X_{k+1} + \cdots + X_{n-k+1} X_{n-k+2} \cdots X_n
 \end{aligned} \tag{13}$$

とする。なお、 $S_0^n = 1$ としておく。例えば、

$$\begin{aligned}
 S_1^2 &= X_1 + X_2, & S_2^2 &= X_1 X_2, \\
 S_1^3 &= X_1 + X_2 + X_3, & S_2^3 &= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3, & S_3^3 &= X_1 X_2 X_3
 \end{aligned}$$

となるが、これを用いれば、(9),(10),(11),(12) は $X_j = \tan \theta_j$ に対し

$$\begin{aligned}
 \sin(\theta_1 + \theta_2) &= S_1^2 \prod_{j=1}^2 \cos \theta_j \\
 \cos(\theta_1 + \theta_2) &= (1 - S_2^2) \prod_{j=1}^2 \cos \theta_j \\
 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= (S_1^3 - S_3^3) \prod_{j=1}^3 \cos \theta_j \\
 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= (1 - S_2^3) \prod_{j=1}^3 \cos \theta_j
 \end{aligned}$$

のように表すこともできる。実は一般に、

$$\sin \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right) = \left\{ \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k S_{2k+1}^n \right\} \prod_{j=1}^n \cos \theta_j$$

$$= (S_1^n - S_3^n + S_5^n - \cdots) \prod_{j=1}^n \cos \theta_j \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \cos \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right) &= \left\{ \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k S_{2k}^n \right\} \prod_{j=1}^n \cos \theta_j \\ &= (1 - S_2^n + S_4^n - \cdots) \prod_{j=1}^n \cos \theta_j \end{aligned} \quad (15)$$

となることが証明できる。その証明は、オイラーの公式とその指数法則を認めれば、そう難しくはない。

$$\begin{aligned} \cos \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right) + i \sin \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right) &= \exp \left(i \sum_{j=1}^n \theta_j \right) = \prod_{j=1}^n e^{i\theta_j} \\ &= \prod_{j=1}^n (\cos \theta_j + i \sin \theta_j) = \prod_{j=1}^n \cos \theta_j \prod_{j=1}^n (1 + i \tan \theta_j) \end{aligned} \quad (16)$$

となり、

$$\prod_{j=1}^n (1 + i \tan \theta_j) = \prod_{j=1}^n (1 + i X_j) = (1 + i X_1)(1 + i X_2) \cdots (1 + i X_n)$$

を展開すれば、

$$\prod_{j=1}^n (1 + i X_j) = 1 + i S_1^n + i^2 S_2^n + i^3 S_3^n + \cdots + i^n S_n^n$$

となることが容易にわかる。よって、実部虚部に分ければ、

$$\prod_{j=1}^n (1 + i X_j) = (1 - S_2^n + S_4^n - \cdots) + i(S_1^n - S_3^n + S_5^n - \cdots)$$

となるので、(16) の実部が (15) に、(16) の虚部が (14) になることがわかり、これらが示されたことになる。

なお、(14), (15) の外にある $\cos \theta_j$ の積を $\tan \theta_j$ の対称式にかけ算することで、通常の加法定理のように (14), (15) を $\sin \theta_j$ と $\cos \theta_j$ の n 次の項の和、差の形に直すこともできる。例えば、

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\
&\cos(\alpha + \beta + \gamma) \\
&= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma
\end{aligned}$$

といった具合である。

7 最後に

本稿では、一般角に対する $\sin$ と $\cos$ の加法定理と、複素数に対する加法定理の証明、および多項の加法定理を紹介した。

3 節, 4 節の一般角に対する加法定理の証明は、 90° ずつ増やしていく形の証明だが、これ以外にもやり方是有り、例えば高校の教科書に載っている単位円周上の 2 点と原点がつくる三角形の方法に少し考察を加えることでも任意の一般角に対する証明を行うことは可能だろう。

また、5 節の複素数版の加法定理の証明は、複素変数を使わずに実数部分、虚数部分に直した形での直接証明であるが、複素関数論の本では (7), (8) の上の複素指数形の表現式を使用し、先にその複素指数に対する指数法則を示し、それを利用して証明するのが普通であろう。本稿では複素変数関数の話は避けて、少し煩雑な計算を示したが、逆にあまり本では見ない計算かもしれない。

6 節の多項の加法定理も通常本などには書かれていないが、 $\sin, \cos$ で表現するよりも $\cos, \tan$ で表現する方が見通しがよいという所は多少面白いかもしれない。

参考文献

- [1] 竹野茂治、「三角関数の加法定理について」、
<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/basic1.html#sinadd> (2003, 2011)