2015 年 07 月 20 日

ロピタルの定理について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

大学の 1 年生の微積分等で出てくる「ロピタルの定理」は有名であるが、多くのバリエーションがある定理としても知られている。

大学の教科書では、その証明は、最も典型的なもの、証明の易しいものだけ紹介し、「後は同様」としていることが多いようである。

しかし、少し考えてみると、中には必ずしも「後は同様」では済まないものもあるようなので、せっかくであるから、その多くのバリエーションの証明を本稿でいくつか紹介する。

2 ロピタルの定理

ロピタルの定理は、おおざっぱに言えば以下のようなものである (工学部向けの本だと、この程度しか書いてないものもある):

「$I=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ か $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形 (不定形) であれば、$I=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ となる」

もう少しまともに書けば、以下の通り。

定理 1 (ロピタルの定理)

$f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

1. a を含むある開区間 J 上で $f(x)$, $g(x)$ は連続
2. $J\setminus\{a\}$ で $f(x)$, $g(x)$ は微分可能で、かつ $g'(x)\neq 0$
3. $f(a)=g(a)=0$

このとき、

$$I_1 = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \ (= \beta) \tag{1}$$

が存在すれば、$I_0 = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して、$I_0 = I_1$ となる。

これは、条件 3 により $\dfrac{0}{0}$ の不定形の場合を意味するが、「存在すれば」は I_1 の方に対する条件であり、そのとき $I_0 = I_1$ が成り立つという定理であり、通常の使い方とは実はむしろ逆である。例えば、$I_0 = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ は $\dfrac{0}{0}$ の形なので、普通は、

$$I_0 = I_1 = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x - 2)'} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{1} = 1$$

と求めるだろうが、定理 1 から言えば、本来は

$$「I_1 = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x - 2)'} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{1} \text{ となるので、} I_0 = I_1 = 1 \text{ となる」}$$

としなくてはならず、つまり「$I_0 = I_1$」を最初に書いてはだめで、I_1 が求まって初めて「$I_0 = I_1$」と書けることになる。特に 2 回ロピタルを使う問題の場合はさらに面倒なことになる。

その辺は、普通は大目に見るのであるが、できれば、本当は I_1 の存在が保証されて初めて「$I_0 = I_1$」が言えるということも頭に置いてもらいたい事実である。例えば、以下の例では、I_0 は存在するが、I_1 は存在せず、よって $I_0 = I_1$ とはならない。

$$\begin{aligned}
I_0 &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \\
I_1 &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \dfrac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cos \dfrac{1}{x}}{1} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

最後の式を見るとわかるが、I_1 の最初の項は 0 に収束するが、後ろの項は収束しない。よって、定理 1 の最後の仮定が満たされず、$I_0 = I_1$ も成立しない。つまりこれは普通のロピタルの使い方が通用しない例である。

3 定理のバリエーション

ロピタルの定理 1 には、色んな細かいバリエーションがある。それをこの節で紹介する。

まずは、定理 1 の条件 1 の a と区間に関するもので、J を $J=[a,b)$、または $J=(c,a]$ として、極限を $\lim_{x\to a+0}$、または $\lim_{x\to a-0}$ の片側極限とするバリエーションがある。

さらに、$a=\infty$、または $a=-\infty$ とし、J は $J=(K,\infty)$、または $J=(-\infty,K)$ のような半無限区間とし、の条件 3 を $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$、または $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ とし、極限を $\lim_{x\to\infty}$、または $\lim_{x\to-\infty}$ とするバリエーションがある。

これらに対しても、ロピタルの定理の結果はそのまま成り立つことが知られているが、このような x の収束先 (a) の変更が 5 通りある。

また、不定形が $\dfrac{0}{0}$ でなく $\dfrac{\infty}{\infty}$ の場合のバリエーションもある。つまり、条件 3 を「$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$、$\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$」などとした場合であるが、この場合もロピタルの定理が成立することが知られているが、この極限の ∞ は $-\infty$ に置き換えることもできるので、それだけで 4 通りあり、上と同様の x の収束先の変更も考えるとそれがそれぞれ 4 通りある (この場合は $\lim_{x\to a}$ は考えず、通常片側極限を扱う) ので、全部で 16 通りあることになる。

ここまでで 21 通りのバリエーションがあることになるが、さらに、(1) の β が、有限な値ではなく、∞ か $-\infty$ の場合でも定理が成り立つことが知られている。すなわち、「$I_1=\infty$ ならば I_0 も $I_0=\infty$ となる」といった形である。よって、これらを上の 21 通りすべてに適用すれば、合計で 63 通りのバリエーションがあることになる。

もう一度、分類を整理してみる。すべてのパターンを (p,q,r) のような記号で表現する。各成分の意味は以下の通り。

- p は、x の収束先に関するバリエーション。a (有限), $a+0$, $a-0$, ∞, $-\infty$ の 5 通り。
- q は、不定形が $\dfrac{0}{0}$ か $\dfrac{\infty}{\infty}$ かのバリエーション。$0/0$, ∞/∞, $-\infty/\infty$, $\infty/(-\infty)$, $(-\infty)/(-\infty)$ の 5 通り (通常は、後者 4 つをまとめて $\dfrac{\infty}{\infty}$ と呼ぶ)。
- r は β に関するバリエーション。β (有限), ∞, $-\infty$ の 3 通り。

このうち、q が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の場合は、通常 $p=a$ を外して考えるので、全部で $5\times5\times3-4\times1\times3=63$ 通りとなる。

通常、教科書に載っている証明は、実質的に $(a+0, 0/0, \beta)$ に対するもののみであることが多く、あとは「他も同様」で片づけられていることが多いと思う。

ただ、(∞, q, r) の場合の証明は $(a+0, q, r)$ の場合とは少し違いがあるし、$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形の場合はさらに異なる。

よって、次節以降でこれらのうち典型的なものに関する証明をいくつか紹介する。

4 証明その 1

まずは典型的な $(a+0, 0/0, \beta)$ の場合の証明を紹介する。

この場合に限らず、いずれの場合も証明には基本的に「コーシーの平均値の定理」を用いる。それをまず説明する。

$f(a) = g(a) = 0$ より、I_0 は

$$I_0 = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

であるが、もし $f'(a)$、$g'(a)$ があって $g'(a) \neq 0$ であれば、

$$I_0 = \lim_{x\to a+0} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

となるので、さらに $f'(x)$, $g'(x)$ が a で連続であればこの最後の値は I_1 に等しいことになり、ロピタルの定理が成立することになる。ただし、この論法では元のロピタルの定理より強い仮定をいくつか使ってしまっている (が、シンプルな証明の一つと言えるし、実例ではこれで十分な場合も多い)。

元の条件の下で証明するために、通常の平均値の定理を使うと、$x > a$ に対して、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(p)(x-a)}{g'(q)(x-a)} = \frac{f'(p)}{g'(q)}$$

となるような p, q $(\in (a, x))$ が取れる。この式で x を a に近づけると p, q は a に近づくので最後の項は I_1 に近づきそうだが、p と q が揃っていないので、その極限が I_1

に等しいことの保証にはならない。この $p,\ q$ を同じ値に揃えることができる、というのがコーシーの平均値の定理である。

定理 2 (コーシーの平均値の定理)

$f(x),\ g(x)$ が $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能で、かつ $g'(x)\neq 0$ であるとき、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が (a,b) 内に少なくとも一つ存在する。

この定理の証明は、

$$F(x)=f(x)-g(x)\,\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

に対して通常の平均値の定理を使えば得られる。

なお、コーシーの平均値の定理の条件にある「$g'(x)\neq 0$」は外すことができない。例えば、$f(x),\ g(x)$ が、

- $f(x)$ は $f(0)=0,\ f(1)=1,\ 0<x<1/2$ では増加、$1/2<x<1$ では減少、$f'(1/2)=0$ (例えば、$f(x)=4x^3-12x^2+9x$)
- $g(x)$ は $g(0)=0,\ g(1)=1,\ 0<x<1/2$ では減少、$1/2<x<1$ では増加、$g'(1/2)=0$ (例えば、$f(x)=4x^3-3x$)

のような関数であれば、$(f(1)-f(0))/(g(1)-g(0))=1$ であるが、$0<x<1$ では、$x=1/2$ 以外では $f'(x)/g'(x)<0$ であり 1 に等しくなることはない。$x=1/2$ では $g'(x)=0$ となるので、これがコーシーの平均値の定理の条件を満たさない。これが、ロピタルの定理 1 の条件 2 に含まれる「$g'(x)\neq 0$」の由来になる。

このコーシーの平均値の定理を用いて、$(a+0,0/0,\beta)$ の場合のロピタルの定理の証明を、$\epsilon-\delta$ 論法で行う。

$I_1=\beta$ より、任意の $\epsilon>0$ に対して、$a<x<a+\delta$ であるすべての x に対して、

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\beta\right|<\epsilon \tag{2}$$

となるような $\delta > 0$ が取れる。

$a < x < a + \delta$ となる任意の x に対して、コーシーの平均値を用いると、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(p)}{g'(p)},$$

で $a < p < x\ (< a + \delta)$ となる p が存在する。よって、(2) より

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \beta\right| = \left|\frac{f'(p)}{g'(p)} - \beta\right| < \epsilon$$

となる。x は $a < x < a + \delta$ の任意の x で、$\epsilon > 0$ も任意なので、これは I_0 が存在して $I_0 = \beta$ であることを示している。これで、$(a + 0, 0/0, \beta)$ の場合の証明が終わった。

この証明は、$(a-0, 0/0, \beta)$ の場合もほぼ同じであるし、その 2 つを合わせれば $(a, 0/0, \beta)$ の場合になるので、これも同様に示されることになる。これで、$q = 0/0$, $r = \beta$ の場合のうち 3 通りのものの証明が終わる。

5 証明その 2

次は、$(\infty, 0/0, \beta)$ の場合の証明を紹介する。

この場合は、定理 1 の条件 3 は

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \tag{3}$$

であり、$f(x)$, $g(x)$ は $J = (K, \infty)$ で連続で微分可能、かつ $g'(x) \neq 0$ で、$I_1 = \beta$ の存在が仮定となる。

よって、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$x > L$ のすべての x に対して

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \beta\right| < \epsilon \tag{4}$$

となるような $L(> K)$ が取れることになる。

この場合は、$y > x > L$ である x, y に対してコーシーの平均値の定理を使うと、$y > p > x$ となる p が存在して、

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \beta\right| = \left|\frac{f'(p)}{g'(p)} - \beta\right| < \epsilon$$

となる。条件 (3) より、この式で $y\to\infty$ とすると、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\beta\right|\leq\epsilon$$

となり、よって、x,ϵ の任意性より I_0 の存在と $I_0=\beta$ が言えることになる。

これは、4 節の証明とそれほど違うわけではないが、コーシーの平均値の定理の使い方などが少し違っていることがわかると思う。

同じようにして $(-\infty,0/0,\beta)$ の場合も証明できる。これで、$q=0/0,\ r=\beta$ の場合のうち、残りの 2 通りのものの証明が終わる。

6 証明その 3

次は、$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形である $(a+0,\infty/(-\infty),\beta)$ の場合の証明を紹介する。これは、4 節、5 節の証明とはかなり異なる。

まず普通に思いつくのは、$\dfrac{\infty}{\infty}$ を $\dfrac{0}{0}$ に変換することだろう。すなわち、$\hat{f}(x)=1/f(x)$, $\hat{g}(x)=1/g(x)$ とすれば、

$$I_0=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)}$$

で、

$$\lim_{x\to a+0}\hat{f}(x)=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{f(x)}=0,\quad \lim_{x\to a+0}\hat{g}(x)=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{g(x)}=0$$

となって、$\dfrac{0}{0}$ の形になる。しかし、これで $(a+0,0/0,\beta)$ の結果を利用できるかというと、必ずしもそうではない。それは、$\hat{g}/\hat{f}$ に対する I_1 (これを $\hat{I}_1$ と書く) が、

$$\hat{I}_1=\lim_{x\to a+0}\frac{\hat{g}'(x)}{\hat{f}'(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{-g'(x)/g(x)^2}{-f'(x)/f(x)^2}=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\frac{g'(x)}{f'(x)}=\frac{I_0^2}{I_1}$$

となり、$(a+0,0/0,\beta)$ の定理の仮定である「I_1 の存在」だけからは、この $\hat{I}_1$ の存在が保証できないために $(a+0,0/0,\beta)$ の定理を適用することができないからである。

よって、このような置き換えではうまくいかないので、別の方法を考える。今、$(a+0, \infty/(-\infty), \beta)$ の場合の仮定は、$f(x)$, $g(x)$ は $J=(a,b)$ で連続、かつ微分可能で、

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty,\ \ \lim_{x\to a+0} g(x)=-\infty,\ \ I_1=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\beta \tag{5}$$

となる。このとき、任意の $\epsilon>0$ に対して、$a<x<a+\delta$ なるすべての x に対して

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\beta\right|<\epsilon$$

となるような $\delta>0$ が取れる。$a<x<y<a+\delta$ となる任意の x, y に対して、コーシーの平均値の定理を適用すると、ある p $(x<p<y)$ が存在して、

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-\beta\right|=\left|\frac{f'(p)}{g'(p)}-\beta\right|<\epsilon \tag{6}$$

となることは前と同じであるが、今回は y を、δ に対して例えば $y=a+2\delta/3$ $(=y_0$ とする) と固定する。この y_0 に対し、(5) を使えば、$a<x<a+\eta(<y_0)$ であるすべての x に対して

$$\left|\frac{f(y_0)}{f(x)}\right|<\epsilon,\ \ \left|\frac{g(y_0)}{g(x)}\right|<\epsilon \tag{7}$$

となるような $\eta>0$ が取れる。さらに、必要ならばより小さくすることで、$\epsilon<1/2$ であると仮定してよい。

$a<x<a+\eta$ のとき、$f(x)$, $g(x)$ は、(7) によりそれぞれ $f(y_0)$, $g(y_0)$ に比べて絶対値は大きいので、$(f(x)-f(y_0))/(g(x)-g(y_0))$ の値はほぼ $f(x)/g(x)$ に近い値となる。これは、以下のように変形すればよりよくわかる:

$$\frac{f(x)-f(y_0)}{g(x)-g(y_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\times\frac{1-f(y_0)/f(x)}{1-g(y_0)/g(x)}$$

この後ろの分数の分子、分母にある分数は、(7) によりその絶対値は少なくとも 1/2 より小さい。(6) にこの後ろの分数の逆数をかけると、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\beta\,\frac{1-g(y_0)/g(x)}{1-f(y_0)/f(x)}\right|<\epsilon\,\left|\frac{1-g(y_0)/g(x)}{1-f(y_0)/f(x)}\right| \tag{8}$$

となるが、(7) より、

$$\left|1-\frac{f(y_0)}{f(x)}\right| \geq 1-\left|\frac{f(y_0)}{f(x)}\right| \geq 1-\epsilon > \frac{1}{2},\ \left|1-\frac{g(y_0)}{g(x)}\right| \leq 1+\left|\frac{g(y_0)}{g(x)}\right| \leq 1+\epsilon < \frac{3}{2}$$

となるので、(8) より

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\beta\,\frac{1-g(y_0)/g(x)}{1-f(y_0)/f(x)}\right| < \epsilon\,\frac{3/2}{1/2} = 3\epsilon \tag{9}$$

となる。一方、(7) より、

$$\begin{aligned}&\left|\beta\,\frac{1-g(y_0)/g(x)}{1-f(y_0)/f(x)}-\beta\right| \\ =\ & |\beta|\left|\frac{f(y_0)/f(x)-g(y_0)/g(x)}{1-f(y_0)/f(x)}\right| \leq |\beta|\,\frac{|f(y_0)/f(x)|+|g(y_0)/g(x)|}{1/2} \\ \leq\ & 4|\beta|\epsilon \end{aligned} \tag{10}$$

となるので、結局 (9), (10) より、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\beta\right| \leq (3+4|\beta|)\epsilon$$

となることになる。x は $a<x<a+\eta$ の任意の値、ϵ は任意の値であったので、これは $I_0=\beta$ を意味する。これで、$(a+0,\infty/(-\infty),\beta)$ の場合のロピタルの定理が証明できた。

上の証明からわかる通り、これは $q=\infty/\infty,\ -\infty/\infty,\ -\infty/(-\infty)$ の場合でも全くこのまま通用するし、また $p=a+0$ は $p=a-0$ に簡単に置き換えることができ、さらに $p=\infty, p=-\infty$ に関する証明に変えることも、4 節の証明を 5 節で書き換えた方法を用いれば可能になる。

これで、$r=\beta$ の場合の、q の 0/0 以外の 4 通りの場合で、$p=a$ 以外の 4 通り、すなわち合計 16 通りの証明が終わる。

7 証明その 4

今度は、$(a+0,0/0,\infty)$ の場合の証明を紹介する。

この場合は、4 節の議論のうち、(2) の部分が、以下のように変わる:
$I_1=\infty$ より、任意の $N>0$ に対して、$a<x<a+\delta$ であるすべての x に対して

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>N \tag{11}$$

となるような $\delta>0$ が取れる。あとは、コーシーの平均値の定理により、$a<x<a+\delta$ である x に対して

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(p)}{g'(p)}>N\ \ (a<p<x)$$

となるので、これで $I_0=\infty$ が言える。

同様にすれば、$r=-\infty$ の場合も同様に言える。さらに、4 節、5 節、6 節で証明したもの $(3+2+16=21$ 通り$)$ に対しても、同様にすればいずれも $r=\infty,\ -\infty$ の場合のものに書き換えることができる。例えば、6 節の議論は、

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>N$$

が仮定なので、コーシーの平均値の定理により、$a<x<y_0<a+\delta$ に対して、

$$\frac{f(x)-f(y_0)}{g(x)-g(y_0)}=\frac{f'(p)}{g'(p)}>N\ \ (x<p<y_0)$$

となり、

$$\frac{f(x)}{g(x)}>N\,\frac{1-g(y_0)/g(x)}{1-f(y_0)/f(x)}>N\,\frac{1/2}{3/2}=\frac{N}{3}$$

となるので $I_0=\infty$ となることが言える。

これで、残り 42 通りが全部示されることになる。

8 最後に

ここでは、コーシーの平均値の定理を使ったロピタルの定理の証明を紹介した。これはごく基本的な $\epsilon-\delta$ の証明の一例に過ぎず、そう難しいものではないが、基本的な

ケースの証明以外はあまり本などにも書いてないことが多いようなので、その他の場合の証明を疑問に思う人もいるのではないかと思うから、それなりに本稿の意味はあるのではないかと思う。

ロピタルの定理にまつわる話題は、他にも例えば、

- 循環論法の問題
- 名前の由来の話
- テイラー展開による考え方

などがあり、調べると面白い話もあるのだが、それは他の文献、インターネットの情報等を見て頂きたい。