2006 年 3 月 31 日

$\varepsilon - \delta$ のお話

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

工学部に限らず、理学部数学科以外の大学の初年度の数学では、数列の極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{1}$$

や、関数の極限

$$\lim_{x\to a} f(x) = \beta \tag{2}$$

の厳密な定義を取り上げることはあまりないし、またやるにしても定義を紹介するくらいで、実際にその定義を使って何かを証明する、ということはめったにやらないだろうと思う。私が例年使用している工学部初年度向けの微積分の本にも厳密な極限の定義は書かれていない。

しかし、理学部数学科ではそれ、すなわち、いわゆる「ε–δ 論法」を使って基本的な定理を証明するだけでなく、具体的な問題を解くのにもそれを使うことがある。

工学部の学生であっても「極限」の考えはどのように厳密化されているのか、ということが気になる人もいるかもしれないので、少し、例もまじえてそれを紹介してみようと思う。

そこには、工学部の学生が普段目にする「式の取り扱い方」としての数学とは少し違う、厳密さや論理性を追求した数学が見えてくる。「ε–δ 論法」は、数学のそういう面を見るための一つのよい例にもなっていると思う。

なお、この文章は参考文献 [1] に負うところが多い。詳しい話を知りたい人は、[1] を参照するといいだろう。

2 高校での極限の扱い

高校の数学、あるいは工学部等向けの数学の教科書では極限 (1) の「意味」は、

> n が大きくなるときに、数列 a_n の値が限りなく α に近づくこと

のように書かれている。しかし、これは極限の意味を感覚的に伝えている「説明」にすぎず、数学的に厳密な「定義」とは言いがたく、例えば「限りない」とはどういうことか、といったような説明はそこにはない。

例えば、これを定義とみて、次の性質

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta \tag{3}$$

を「証明」するのは難しい。しかしここでひとつ「証明らしきもの」を紹介しよう。

> 証明すべきことは $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ なので、つまり、
>
> > n が大きくなるときに、数列 $a_n b_n$ の値が限りなく $\alpha\beta$ に近づくこと
>
> を示せばよい。a_n は限りなく α に近づいていくので、
>
> $$a_n = \alpha + c_n, \quad c_n \to 0 \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$
>
> と書ける。同様に、
>
> $$b_n = \beta + d_n, \quad d_n \to 0 \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$
>
> と書けるので、
>
> $$a_n b_n = (\alpha + c_n)(\beta + d_n) = \alpha\beta + \alpha d_n + \beta c_n + c_n d_n$$
>
> となるが、
>
> $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0 \tag{4}$$
>
> なので、$\alpha d_n \to 0$, $\beta c_n \to 0$, $c_n d_n \to 0$ より
>
> $$\alpha d_n + \beta c_n + c_n d_n \to 0 \tag{5}$$
>
> となり、確かに $a_n b_n$ の値は限りなく $\alpha\beta$ に近づく。

この「証明らしきもの」は一見正しいように見えるかもしれないが、最後の段階の (4) から (5) を導くところでこの命題の結論自身、すなわち

$$c_n \to 0, \quad d_n \to 0 \quad \text{ならば}\, c_n d_n \to 0$$

を使ってしまっているので論理的には正しくはない。

しかし逆に言えば、この場合、すなわち 0 に収束する場合 (c_n, d_n の場合) を示せば、一般の場合 (a_n, b_n の場合) の場合はそれを使って証明できることになりそうだとわかる。

よって今度は、これも含めて「0 に収束する」ということを考えてみることにする。

3 0 への収束

2 節にも述べたように、高校などの説明によれば、a_n が 0 に収束する、とは

n が大きくなるとき、a_n が限りなく 0 に近づく

ことを意味する。この「限りなく 0 に近づく」とは、どういうことだろうか。

これは、0 に近づく度合いに限りがない、つまりいくらでも 0 に近づく、ということを意味しているのであるが、これをいくつかの例で考えてみる。

数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

は 0 に収束する代表的な数列であるが、これは果たして「限りなく」0 に近づいているだろうか。確かに n が大きくなると $1/n$ は小さくはなっているが、いくらでも 0 に近づいているのだろうか。

例えば、0.1 ($= 1/10$) よりも近くなるか、と言えば、それは $n > 10$ ならば確かに $1/n < 0.1$ なので、$n > 10$ のときはそうだと言えるだろう。

0.001 ($= 1/1000$) よりも近くなるか、と言えば、それは $n > 1000$ ならば $1/n < 0.001$ なのでそうだと言えるし、0.00001 ($= 1/100000$) よりも近くなるか、と言えば、それは $n > 100000$ ならば $1/n < 0.00001$ なのでそうだと言えるだろう。

ここに、「$n > 100000$ ならば」のような条件がついているが、極限の説明には「n が大きくなると」と書かれているので、こういう条件がつくことには問題はない。つまり、「限りなくいくらでも 0 に近くできる」というのは、「それに必要なくらい n を大きくしていけば」という条件の下で、ということを意味しているのだとわかる。

よって、0.1 に対して、「$n > A$ ならば $-0.1 < a_n < 0.1$」となるような A を取ることができ、0.001 に対して、「$n > B$ ならば $-0.001 < a_n < 0.001$」となるような B を取ることができ、0.00001 に対して、「$n > C$ ならば $-0.00001 < a_n < 0.00001$」となるような C を取ることができ、といったことが、どんな小さな数に対してもいつでもできるようならば、「a_n は 0 に収束する」と言う、というのが自然な定義であるように思える。

これをもう少し明確に述べたのが、次の定義 1 である。

定義 1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

とは、どんな正の数 ε (> 0) を取っても、

$$n > N \text{ ならば } -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

となるような N を取ることができることを意味する。

「a_n が α に収束する」という場合は、その差 $c_n = a_n - \alpha$ が 0 に収束すればよく、よって、$n > N$ ならば

$$-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$$

となればよい。これは、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

と同じであるので、よって次のような定義となる。

定義 2

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

とは、どんな正の数 ε (> 0) を取っても、

$$n > N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるような N を取ることができることを意味する。

4 ∞ への発散

ついでに、∞ への発散

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

も定義してみる。この場合は、

n が大きくなるとき、a_n の値は限りなく大きくなる

ということを意味していて、「限りなく大きくなる」とは「大きくなる度合いに際限がない」「いくらでも大きくなる」ということを意味する。例えば次のような数列は限りなく大きくなる。

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$$

しかし、次のような数列は「限りなく大きく」はならない。

- $1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ \ldots,\ n/(n+1), \ldots$
- $1^2, 2^2, 0, 4^2, 5^2, 0, \ldots, (3n+1)^2, (3n+2)^2, 0, \ldots$

上の方の例は、だんだん大きくはなっているが、1 より大きくなることはないし、また、下の方の例は、全部そろって大きくなっているわけではなく、飛び飛びに大きくないものが含まれている。これらは「いくらでも大きくなる」とはいいがたい。

よって、「限りなく大きくなる」∞ への発散は、次のように定義される。

定義 3

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

とは、どんな正の数 K (>0) を取っても、

$$n > N \text{ ならば } a_n > K$$

となるような N を取ることができること、を意味する。

5 積の収束の証明

では、3 節の極限の定義 2 を使って、積の収束 (3) を証明してみよう。

この場合、どんな ε (>0) に対しても、$n > N$ ならば

$$|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon \tag{6}$$

となるような N が取れればいい。そのような N を実際に探してみる。

まず、2 節のように、

$$c_n = a_n - \alpha, \quad d_n = b_n - \beta$$

とすると、a_n, b_n は α, β にそれぞれ収束するという仮定から、極限の定義 2 により、どんな τ (>0) に対しても

- $n > A$ ならば $|a_n - \alpha| < \tau$ となるような A が取れ、

- $n > B$ ならば $|b_n - \beta| < \tau$ となるような B が取れる

はずである。つまり、この場合、

$$n > A \text{ ならば } |c_n| < \tau, \quad n > B \text{ ならば } |d_n| < \tau$$

となることになる。

2 節で計算したように、

$$a_n b_n - \alpha\beta = \alpha d_n + \beta c_n + c_n d_n$$

であることに注意する。まず、$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ の場合を考える。

仮定より、$\tau = \varepsilon/(3|\alpha|)$ と考えれば、

$$n > B_1 \text{ ならば } |d_n| < \frac{\varepsilon}{3|\alpha|} \tag{7}$$

となるような B_1 が取れるはずである。同様に、$\tau = \varepsilon/(3|\beta|)$ と考えれば

$$n > A_1 \text{ ならば } |c_n| < \frac{\varepsilon}{3|\beta|} \tag{8}$$

となるような A_1 が取れるはずであるし、$\tau = |\alpha|$ と考えれば

$$n > A_2 \text{ ならば } |c_n| < |\alpha| \tag{9}$$

となるような A_2 も取れるはずである。

この、B_1, A_1, A_2 の一番大きいものを N としよう。そうすると、$n > N$ ならば、もちろん $n > B_1$ だから (7) より

$$|\alpha||d_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

なので、

$$-\frac{\varepsilon}{3} < \alpha d_n < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10}$$

となる。同様に $n > A_1$ だから (8) より

$$|\beta||c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

なので、

$$-\frac{\varepsilon}{3} < \beta c_n < \frac{\varepsilon}{3} \tag{11}$$

である。そして、$n > A_2$ かつ $n > B_1$ だから、(7) と (9) より

$$|c_n||d_n| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{3|\alpha|} = \frac{\varepsilon}{3}$$

なので、

$$-\frac{\varepsilon}{3} < c_n d_n < \frac{\varepsilon}{3} \tag{12}$$

である。この (10),(11),(12) を合わせると、$n > N$ に対しては

$$-\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} < \alpha d_n + \beta c_n + c_n d_n < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

すなわち、

$$-\varepsilon < a_n b_n - \alpha\beta < \varepsilon$$

が言え、(6) が言えることになる。

$\alpha = 0$ で $\beta \neq 0$ のときは、$\tau = \varepsilon/(2|\beta|)$ とすれば

$$n > A_3 \text{ ならば } |c_n| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

である A_3 が取れ、$\tau = |\beta|$ とすれば

$$n > B_2 \text{ ならば } |d_n| < |\beta|$$

であるような B_2 が取れる。よって、A_3 と B_2 の大きい方を N とすれば、$n > N$ であれば

$$|\beta c_n| = |\beta||c_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |c_n d_n| = |c_n||d_n| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}|\beta| = \frac{\varepsilon}{2}$$

なので、

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \beta c_n + c_n d_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

となり、よって

$$-\varepsilon < a_n b_n - \alpha\beta < \varepsilon$$

が言える。その他の場合も同様である。

6 関数の収束

数列の場合と同様に、関数の極限

$$\lim_{x \to a} f(x) = \beta$$

は、「x が a に近づくときに、$f(x)$ の値が限りなく β に近づくこと」であるから、これは次のように定義される。

定義 4

$$\lim_{x \to a} f(x) = \beta$$

とは、どんな正の数 ε (> 0) を取っても、

$$x \neq a \text{ かつ } |x - a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

となるような δ を取ることができること、を意味する。

なお、ここに「$x \neq a$」というものが入っているが、関数の極限では $x = a$ での値、すなわち $f(a)$ が β に近いかどうかは問わない (逆に、この極限 β が $f(a)$ に等しいときは $f(x)$ は $x = a$ で「連続」であるという)。

このような極限の定義は A.L.Cauchy (1789–1857, 仏) によって始められた極限の定義方法であるが、よく「$\varepsilon - \delta$ 論法」と呼ばれている。

理学部数学科向けの数学の本では、英語を直訳したような独特の表現で、

> 任意の正数 ε (> 0) に対してある δ (> 0) が存在し、
>
> $x \neq a$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \beta| < \varepsilon$
>
> となる

のように書いたり、さらに「任意の」を「$\forall$」、「ある $\sim$ が存在する」を「$\exists$」のように記号的に書いて、

> $\forall\varepsilon$ (> 0), $\exists\delta$ (> 0), s.t. $x \neq a$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \beta| < \varepsilon$
> (s.t. = such that ($\sim$ を満たすような))

のように書いたりすることもある。慣れればなんでもないのであるが、初学者はこのような妙な言いまわしにとまどうことも多い。

7 その他の証明

5 節では $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて (3) のような基本的な定理を証明したが、実際の計算を伴うような式ではむしろその基本的な定理の結果の方を利用し、$\varepsilon - \delta$ 論法自身は直接は使わないように思われるかもしれない。

しかし、$\varepsilon - \delta$ 論法自身を具体的な問題で利用することも可能だし、一見基本的な定理の利用や計算で証明できそうなものでも、$\varepsilon - \delta$ 論法を利用しないと証明が難しいものもある。そのようなものを 2 つ程紹介する。

例 5

まずは、関数 $\sqrt{x}$ $(x > 0)$ の連続性を証明する。関数 $f(x)$ が $x = a$ で **連続** であるとは、感覚的にはグラフがつながっていることを意味するが、数学的には次の条件を満たすことである。

- a の近くで $f(x)$ が定義されていて $f(x)$ の値は有限
- $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

そして、関数 $f(x)$ が **連続関数** であるとは、定義域内のすべての x で連続であること、と定義される。

$f(x) = \sqrt{x}$ の定義域を $x > 0$ とすれば ($x = 0$ は除いておく)、定義域のすべての x でもちろん $f(x)$ の値は有限なので、すべての $a > 0$ に対して、

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \tag{13}$$

を証明すればよい。もちろん、これは高校の教科書等では証明せずに利用している事実であるが、$\varepsilon - \delta$ 論法を利用しないとこれは証明は難しい。

$\varepsilon - \delta$ 論法からすると、証明すべきことは、どんな ε (> 0) に対しても、

$$|x - a| < \delta \text{ ならば } |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \tag{14}$$

であるような δ をとることができればよい。

まず、$\delta \leq a/2$ とする。そうしておけば、

$$|x - a| < \delta \leq \frac{a}{2}$$

なので、

$$-\frac{a}{2} < x - a < \frac{a}{2}$$

となり、よって

$$x > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

なので、x は $\sqrt{x}$ の定義域にちゃんと入ることになる。

また、

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

なので、$\delta \leq \varepsilon\sqrt{a}$ とすれば、

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

となる。

よって、どんな ε に対しても、δ を $\varepsilon\sqrt{a}$ と $a/2$ の小さい方とすれば (14) を満たすことができることがわかり、(13) が言えたことになる。

例 6

次の命題は、一見基本的な定理の利用や計算で証明できそうなもので、$\varepsilon - \delta$ 論法を利用しないと証明が難しいものの一つである。

命題 7

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ のとき、} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$$

証明は煩雑なので紹介しないが、興味があるならば参考文献 [1] を参照するといいだろう。

8 おわりに

工学部の学生から、理学部数学科ではどんな数学をやっているのですか、と聞かれることがあるが、数学科ではもちろん計算もやるが、むしろこのような基本的な定理を

厳密に証明する訓練が主であり、同じ分野を勉強しても、内容 (対象) は異なっていることが多いし、数学科の講義は工学部の講義よりもむしろ進みにくい。この文章がそのような質問に対する一つの回答にもなっていると思う。

また、$\varepsilon - \delta$ 論法は、実は理学部数学科の学生にとっても難しく、初年度の微積分でこれで話を進められてしまい、高校の微積分とのギャップの大きさにつまずく学生が多いのであるが、[1] は、このようなギャップを埋める良書である。

私も $\varepsilon - \delta$ 論法を最初にちゃんと理解したのは [1] であるが、この文書の内容は [1] の第 1 章の内容の一部分を解説したようなものにもなっている。[1] は、2 章以降も非常に丁寧に書かれていて、語り口も軽妙で、今読んでもおもしろい。工学部の学生でも、数学の理論面に関心の深い学生にはおすすめの一冊である。

参考文献

[1] 田島一郎「解析入門」岩波全書 (1981)