2008 年 07 月 06 日

# 微分して元に戻る関数について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 1 はじめに

講義の指数関数 $e^x$ の微分のところで、

「微分しても変わらないのは、$e^x$ とその定数倍しかない」

と話したが、それは実際どのようにして示されるのか、などについて考えてみる。

目標は、

$$y' = y \tag{1}$$

となる関数 $y = y(x)$ が、

$$y = Ce^x \tag{2}$$

となることを示すことであるが、(1) は 1 階の微分方程式 (定数係数線形) なので、その方程式の解の一意性の理論からわかることになるが、ここでは、より初等的な方法、すなわち微分しか知らない学生にも理解できる方法で考えてみることにする。

## 2 変数分離形の解法と似た方法

(1) の微分方程式の解法として、変数分離法というものがある。実質的にそれと同等のものを以下に説明する。

ただし、以下の議論では、

$$y' = 0 \ \Rightarrow \ y = \text{定数} \tag{3}$$

が成り立つことは利用する。この事実は、厳密には平均値の定理により証明されるものであるが、感覚的にも「変化率が 0 ならば定数」という事実として納得できるものだろうと思う。

(1) の両辺を $y$ で割れば

$$\frac{y'}{y} = 1$$

となるが、この左辺は、

$$\frac{d}{dx}\left(\log|y|\right)$$

を合成関数の微分を用いて微分したものに等しい。よって、

$$\frac{d}{dx}\left(\log|y|\right) = 1$$

となるが、積分を使わずに話を進めるとすると、$1 = (x)'$ と見て、

$$\frac{d}{dx}\left(\log|y|\right) = (x)', \quad (\log|y| - x)' = 0$$

となるので、よって (3) より $\log|y| - x$ が定数であることになる。それを $C_1$ とすれば、

$$\log|y| = C_1 + x, \quad |y| = e^{C_1+x} = e^{C_1}e^x$$

となるので、$y$ は

$$y = \pm e^{C_1}e^x = C_2e^x$$

と表され、これにより (2) が得られることになる。

ただし、厳密には最初に $y$ で割るところに少し問題がないわけではなく、$y$ が 0 の場合の議論を行う必要があるが、$y$ が 1 点でも 0 でない箇所があれば、自動的に上の議論により $C \neq 0$ の (2) になることがわかるので、よってどの $x$ でも 0 にはならない。

つまり、逆にある 1 点で 0 になるような $y$ は、すべての $x$ で 0 でなければならないことになり、それは、(2) の $C = 0$ に対応する。よって、いずれにせよ (1) を満たす $y$ は、すべて (2) で表されることになる。

# 3　結果から考える方法

(2) であることを示す別の方法として、$y/e^x$ $(= ye^{-x})$ が定数であることを示す、というものもある。この商を微分してみると、

$$\left(\frac{y}{e^x}\right)' = \frac{y'e^x - y(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{y'e^x - ye^x}{(e^x)^2} = \frac{y' - y}{e^x}$$

となるが、$y$ が (1) を満たしていればこの式は 0 になる。なお、商の微分を使う代わりに、積に直して、

$$\left(\frac{y}{e^x}\right)' = (ye^{-x})' = y'e^{-x} + y(e^{-x})' = y'e^{-x} + y(-e^{-x}) = (y' - y)e^{-x}$$

とする方法もある。

いずれにせよ、導関数が 0 になるので、(3) により $y/e^x$ が定数となり、よって (2) が得られることになる。

この方法の方が 2 節の方法よりもシンプルであるし、例えば次のように発展したもの:

「微分したものが元の関数の定数倍、すなわち $y' = ay$ となるものは何か」

もこの方法ならばすぐに解ける。

$(e^{ax})' = ae^{ax}$ であるので、その解は $y = Ce^{ax}$ であることが想像されるが、

$$\left(\frac{y}{e^{ax}}\right)' = (ye^{-ax})' = y'e^{-ax} + y(-ae^{-ax}) = (y' - ay)e^{-ax} = 0$$

となるので、確かに $y/e^{ax} = C$ となり、$y = Ce^{ax}$ が言える。

# 4　2 回微分して戻るもの

ついでに、次のような問題も考えてみよう。

「2 回微分して元に戻るものは、$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ の形の式のみ」

この問題は、2 階の (定数係数線形の) 微分方程式

$$y'' = y \tag{4}$$

を解けばいいわけであるが、ここでは、標準的な定数係数線形微分方程式の解法、およびその理論は用いず、(4) から直接

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} \tag{5}$$

を導くいくつかの方法を紹介する。

(4) の両辺に $y'$ を加えると、

$$y'' + y' = y' + y$$

となるが、左辺は $(y' + y)'$ であるから、$z = y' + y$ とすれば、これは

$$z' = z$$

を意味する。2, 3 節の結果によりこれは $z = C_1e^z$ を意味するので、よって、

$$y' + y = C_1e^x \tag{6}$$

が得られる。

この (6) を、1 階線形微分方程式の解法と同様の変形をしてみよう。(6) の両辺を $e^x$ 倍すると、

$$y'e^x + ye^x = C_1e^{2x}$$

となるが、この左辺は $y'e^x + y(e^x)' = (ye^x)'$ に等しい。$(e^{2x})' = 2e^{2x}$ なので、この両辺は、

$$(ye^x)' = \left(\frac{C_1}{2}e^{2x}\right)'$$

と変形できる。よって

$$\left(ye^x - \frac{C_1}{2}e^{2x}\right)' = 0$$

となるので、(3) によりこのかっこの中味が定数となり、

$$ye^x = \frac{C_1}{2}e^{2x} + C_2$$

となる。よってこの両辺を $e^x$ で割れば

$$y = \frac{C_1}{2e^x}e^{2x} + \frac{C_2}{e^x} = \frac{C_1}{2}e^x + C_2e^{-x}$$

となり、(5) が得られることになる。

ただ、これはいかにも少し作為的にも見えるが、(6) を微分方程式として解くのではなく、もう一本同等のものを導いて利用する、という方法もある。

(4) の両辺から $y'$ を引くと、

$$y'' - y' = -y' + y = -(y' - y)$$

となるので、$w = y' - y$ とすれば、これは $w' = -w$ を意味し、3 節の結果によりここから $w = C_2e^{-x}$、すなわち

$$y' - y = C_2e^{-x} \tag{7}$$

が導かれる。よって、(6) から (7) を引いて 2 で割れば

$$y = \frac{C_1}{2}e^x - \frac{C_2}{2}e^{-x}$$

となり、(5) が得られる。

この (6), (7) を導く方法は、微分演算子 $D ='$ によって (4) を、

$$D^2y = y,\quad (D^2 - 1)y = 0,\quad (D + 1)(D - 1)y = 0,\quad (D - 1)(D + 1)y = 0$$

のように変形した考察、すなわちいわゆる演算子法と実質的に同等である。

# 5 結果から定数を消去

(4) から (5) が導くには、3 節のように結果の形からそれを導く、という方法もある。

もし $y$ が (5) であるとすると、それを $e^x$ 倍すれば

$$ye^x = C_1e^{2x} + C_2$$

となるので、この式を両辺微分すれば $C_2$ が消え、

$$(ye^x)' = 2C_1e^{2x}$$

となる。そして次にこの式を $e^{2x}$ で割って微分すれば $C_1$ も消えて

$$((ye^x)'e^{-2x})' = 0 \tag{8}$$

となるはずである。よって、逆に (4) から (8) が導ければ、上の手順を逆にたどって (5) が得らえるだろう、という方法である。

今、$h = ye^x$ と置くと、

$$\begin{aligned} h' &= (ye^x)' = y'e^x + y(e^x)' = y'e^x + ye^x, \\ h'' &= (ye^x)'' = y''e^x + 2y'(e^x)' + y(e^x)'' = y''e^x + 2y'e^x + ye^x \end{aligned}$$

なので、(4) から

$$h'' = 2(y'e^x + ye^x)$$

となるが、この右辺は $2h'$ に等しく、

$$h'' = 2h' \tag{9}$$

となる。この両辺を $e^{-2x}$ 倍すると、

$$h''e^{-2x} - 2h'e^{-2x} = 0$$

となり、この式の左辺は $h'e^{-2x}$ を微分したものに等しい。つまり

$$(h'e^{-2x})' = 0$$

となるので、(3) により、$h'e^{-2x}$ が定数となり、

$$h' = (ye^x)' = C_1e^{2x}$$

が得られることになる。ここから $y$ を求めるのは、4 節の (6) 以降と同じようにすればよい。

ところで、(9) から 4 節の (6), (7) を導くこともでき、そこから結果として (5) を得ることもできる。

まず (9) より、$(h')' = 2(h')$ であるから、3 節の結果により

$$h' = C_1e^{2x}$$

となるが、$h' = (ye^x)' = y'e^x + ye^x$ なので、

$$y'e^x + ye^x = C_1e^{2x}$$

となり、この両辺を $e^x$ で割れば (6) が得られる。

一方、(9) を $(h' - 2h)' = 0$ と見れば、(3) により

$$h' - 2h = C_2$$

となり、この左辺は、

$$h' - 2h = (ye^x)' - 2ye^x = y'e^x + ye^x - 2ye^x = y'e^x - ye^x$$

なので、

$$y'e^x - ye^x = C_2$$

となり、両辺を $e^x$ で割れば (7) が得られるのである。

# 6 4 回微分して元に戻るもの

3 回微分して元に戻るものを求めるのは少し難しいが、4 回微分して元に戻るものは、

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \tag{10}$$

となる。なお、この式の最初の 2 つの $e^x$, $e^{-x}$ は、それぞれ 1 回、2 回微分して元に戻るものになっている。この (10) を示すことは、実質的に 4 階の微分方程式

$$y^{(4)} = y \tag{11}$$

を解くことになるわけであるが、しかし (10) を示すためには、まず

$$y'' = -y \tag{12}$$

となる $y$ が

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{13}$$

となることを示すことが必要となる ((10) の後半部分) ので、まずこれを考える。これは、5 節のように結果から定数を消す方法で考える。

$y$ がもし (13) であるとすると、

$$\frac{y}{\cos x} = C_1 + C_2 \tan x$$

であるので、これを微分すれば、

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = C_2(\tan x)' = \frac{C_2}{\cos^2 x}$$

となって $C_1$ が消え、この式を両辺 $\cos^2 x$ 倍して微分すれば、

$$\left\{\left(\frac{y}{\cos x}\right)' \cos^2 x\right\}' = 0 \tag{14}$$

となって $C_2$ も消えることになる。

よって、まずは逆に (12) から (14) を導く。

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \frac{y'\cos x - y(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x}$$

となるので、これを $\cos^2 x$ 倍すれば

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)'\cos^2 x = y'\cos x + y\sin x$$

となる。この両辺を微分すると、

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{y}{\cos x}\right)'\cos^2 x\right\}' \\
&= (y'\cos x + y\sin x)' = y''\cos x + y'(\cos x)' + y'\sin x + y(\sin x)' \\
&= y''\cos x - y'\sin x + y'\sin x + y\cos x = (y'' + y)\cos x
\end{aligned}$$

となるので、$y$ が (12) を満たしていれば確かに (14) が成り立つことになる。そして (14) ならば

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)'\cos^2 x = C_1$$

となるから、両辺 $\cos^2 x$ で割って、

$$\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \frac{C_1}{\cos^2 x}$$

であるが、右辺は $C_1 \tan x$ の微分であるので、左辺から右辺を引き算すれば、

$$\left(\frac{y}{\cos x} - C_1 \tan x\right)' = 0$$

となるので、

$$\frac{y}{\cos x} - C_1 \tan x = C_2$$

となる。よってこの両辺を $\cos x$ 倍すれば、

$$y = C_1 \tan x \cos x + C_2 \cos x = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

となって確かに (13) が得られることになる。

そして、これを使えば、4 回微分して元に戻るもの (11) の場合も容易に求めることができる。まず、(11) の両辺に $y''$ を足せば、

$$y^{(4)} + y'' = y'' + y$$

であり、左辺は $(y'' + y)''$ に等しいので、これは $(y'' + y)$ が 2 回微分すると元に戻ることを意味し、よって 4 節の結果により、

$$y'' + y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{15}$$

であることがわかる。

一方、(11) の両辺から $y''$ を引けば、

$$y^{(4)} - y'' = -y'' + y = -(y'' - y)$$

となるので、これは、$(y'' - y)$ が (12) を満たすことを意味し、よって (13) より、

$$y'' - y = C_3 \cos x + C_4 \sin x \tag{16}$$

となる。この (15) から (16) を引いて 2 で割れば、結局

$$y = \frac{C_1}{2} e^x + \frac{C_2}{2} e^{-x} - \frac{C_3}{2} \cos x - \frac{C_4}{2} \sin x$$

となって (10) が得られることになる。

# 7 おわりに

ここでは、すべて (3) を元にして考えたが、これは本質的に不定積分の原理と同じであり、記号としての積分を使ってないだけで実際には積分しているのと変わらない。

また途中の手法も、微分方程式の一般論を使用しないといいつつも、実際には実質的に微分方程式の解法と同じものがいくつか使われているので、目新しい話ではない。

それに、方程式から発見的な方法で解を見つける、というよりも、解も先に提示した上でその途中経過を探す、というだけの話なので、そういう点でも興味は薄いだろう。

しかも、微分方程式の一般論を使えばもっとすっきり話ができるので、ここに上げているのはそういう意味ではさして面白みもないものだろうと思うが、微分を履修中の学生の疑問に答える形で書いてみるとどうなるかを考えてみたものであり、一応そういう意味ではそれなりの一つの回答になっているのではないかと思う。