2008 年 08 月 26 日

連続性と微分可能性について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日、知り合いから、場合分けされた関数の連続性と微分可能性に関する質問を受けた。それに関して、一つの定理といくつかの例を思い出したが、これらは連続性と微分可能性に対する正しい理解を深めるものとなるかもしれないので、ここにまとめて紹介することにする。

2 連続性

まず、連続性の定義を確認する。

定義 1

$x=a$ の近く ($x=a$ も含む) で定義されている関数 $f(x)$ に対して、それが $x=a$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) \tag{1}$$

が存在し、それが $f(a)$ と一致することを言う。

極限 (1) の存在は、もちろん左右の極限が存在し、かつ一致することなので、この連続性は

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

のように書くこともできるし、厳密にはいわゆる ε-δ 論法によって定義される ([1])。

連続性は元々は各点で定義される性質であるが、区間 I 上のすべての点で連続であれば、その関数は I **上で連続である**、とも言う。なお、その区間が閉区間 $I=[a,b]=\{x;a\leq x\leq b\}$ である場合は、その端点 $x=a,\ x=b$ での連続性は、片側連続性、すなわち

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b-0}f(x)=f(b)$$

で置き変えることになっている。

通常我々は連続な関数を扱うことが多く、関数に不連続な点がある場合でもそのような点はそれほど多くないのが普通である。

例えば、ガウス関数 $[x]$ は以下のように定義される不連続な点を持つ関数である。

$$[x]=x\ \text{以下の最大の整数} \tag{2}$$

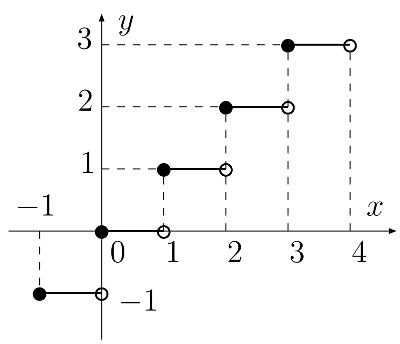

図 1: ガウス関数のグラフ

このガウス関数は、整数の x に対して

$$\lim_{y\to x+0}[x]=x,\quad \lim_{y\to x-0}[x]=x-1$$

となるのでそこで不連続となる関数であるが、ほとんどの点 (整数以外のすべての x) では連続である。

ところが、中にはすべての点で連続でないような関数も存在する (作ることができる)。

$$f_D(x)=\begin{cases}0 & (x\ \text{が無理数のとき})\\ 1 & (x\ \text{が有理数のとき})\end{cases} \tag{3}$$

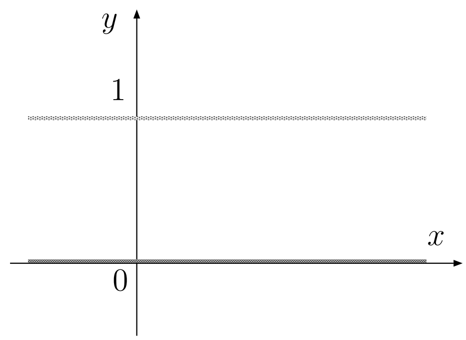

図 2: ディリクレ関数 $f_D(x)$ のグラフ

これはディリクレ関数と呼ばれるもので正確にグラフに表すことはできないが、有理数、無理数はどんな実数 x の近くにも無数に存在し、よってどの x の近くでも関数は 0, 1 の値を無限に繰り返し取るので、0 か 1 のどちらか一方の値に x の周りから近づくことはなく、よってすべての x で不連続な関数である。

これを少し作りかえた次のような関数もある。

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数のとき}) \\ \dfrac{1}{p} & (x \text{ が有理数でその既約表現が } \dfrac{q}{p} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4}$$

ここで、有理数 x の**既約表現** q/p とは、p, q が公約数を持たない整数で、$p > 0$ であることとする。すべての有理数はこのような形の分数に一意に表示されるので、$f_1(x)$ はこれによりちゃんと定義される (グラフは書けない)。

この関数 $f_1(x)$ は、a が有理数ならば a で不連続、a が無理数ならば a で連続となっている。a が有理数の場合は、ほぼ $f_D(x)$ と同じ理由で不連続となるが、a が無理数の場合は、x が a に近づくとき、x も無理数ならば $f_1(x) = f_1(a) = 0$ なので、関数の値は近い (同じ)。x が有理数ならば、その有理数 $x = q/p$ が無理数である a に近づくためには、分母の p (もちろん分子の q の絶対値も) はだんだん大きくならなければならない。そして p が大きくなれば、$f_1(x) = 1/p$ は $0\ (= f_1(a))$ に近づくことになる。よって、いずれにせよ、a が無理数ならば

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = f_1(a) = 0$$

が言えることになるのである。

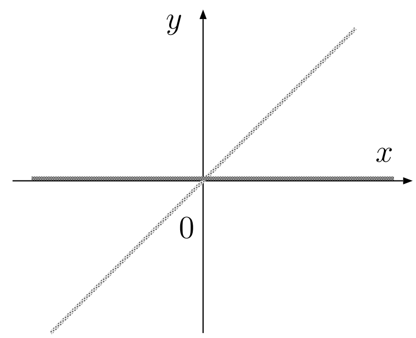

図 3: $f_2(x) = xf_D(x)$ のグラフ

なお、ディリクレ関数 $f_D(x)$ と x の積 $f_2(x) = xf_D(x)$ を考えると、これは $x \neq 0$ のときはあいかわらず x で不連続であるが、$x = 0$ では連続となる (グラフより明らかであろうが、詳しい証明は 5 節を見ればわかる)。

3 微分可能性

次は微分可能性について考えてみる。

定義 2

$x = a$ の近く ($x = a$ も含む) で定義されている関数 $f(x)$ に対して、それが $x = a$ で**微分可能**であるとは、極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{5}$$

が存在することを言う (その場合にこの極限を $f'(a)$ と書く)。

極限 (5) の存在は、もちろん左右の極限が存在し、かつ一致することなので、

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{6}$$

と書くこともできる。なお、例えばこの右極限は、

$$\lim_{x\to a+0} f'(x)$$

とは別物であることに注意する (これについては、4 節でも再び説明する)。

微分可能性もこのように各点で定義される性質であるが、開区間 $I=(a,b)$ 上のすべての点で微分可能であれば、その関数は I **上で微分可能である**、とも言う。

微分可能性と連続性については、良く知られているように次のような上位関係がある。

定理 3

$x=a$ の近くで定義されている関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば、$x=a$ で連続である。

証明

(5) の極限が有限な値として存在するので、それを A とすれば、

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=A\times 0=0$$

となるので、(1) が言える。■

よって微分可能性の方が連続性よりも強いことがわかるが、その逆は言えない。例えば $y=|x|$ は $x=0$ を含みすべての点で連続であるが、$x=0$ では

$$\lim_{x\to+0}\frac{|x|-0}{x-0}=1,\quad \lim_{x\to-0}\frac{|x|-0}{x-0}=-1$$

となり (6) の両辺の値が異るので、$x=0$ では微分可能ではないことがわかる。このように、連続であってもとがっているような点では微分可能ではなくなる。

通常連続な関数は微分可能ではないような点はそれほど多くはないが、中にはすべての点で連続であるが、すべての点で微分可能ではない関数も存在する。例えば以下の

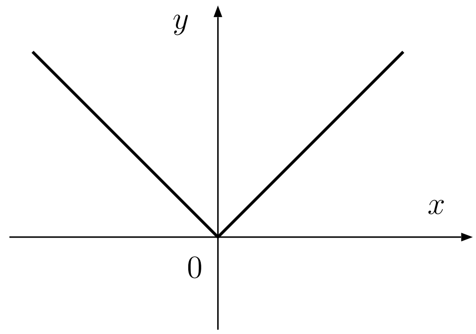

図 4: $|x|$ のグラフ

ワイヤストラスの関数 $f_w(x)$ と呼ばれるものがその一つである (詳しくは、例えば [2], [4] 参照)。

$$f_w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(2\pi m^n x) \quad (0 < a < 1,\ m \text{ は整数で } m \geq 2) \tag{7}$$

この関数の連続性、微分可能性の証明はここではできないが、グラフはつながっているのに、いたるところとがっているような関数となっている。

4 連続性と微分可能性に関連する話題

連続性と微分可能性に関連する定理をここで 2, 3 紹介する。

よく知られている有名な定理の一つに、連続関数の最大最小の定理、連続関数の中間値の定理、および微分可能な関数に対する平均値の定理、というものがある。

定理 4 (最大最小の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続であれば、この区間で最大値と最小値を取る。すなわち、ある c, d ($a \leq c, d \leq b$) が存在し、I 内のすべての x に対して

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

となる ($f(c)$ が最小値、$f(d)$ が最大値)。

定理 5 (中間値の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ であれば、$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 y ($f(a) < y < f(b)$ または $f(a) > y > f(b)$) に対して、$f(c) = y$ となる $x = c$ が I の内部 ($a < c < b$) に少なくとも一つ存在する。

定理 6 (平均値の定理)

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、開区間 (a, b) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $x = c$ が、I の内部 ($a < c < b$) に少なくとも一つ存在する。

これらは、ほとんどの微分の本に載っている有名な事実である (証明も省略する)。

$f(x)$ が開区間で微分可能であるとき、それはその導関数 $f'(x)$ の連続性に言及しているわけではないので、$f'(x)$ は一般には連続であるとは限らない。例えば以下の関数 $f_3(x)$ は、$x = 0$ を含みすべての x で微分可能であるが、$f'(x)$ は $x = 0$ では連続ではない。

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{8}$$

実際、

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \ (= f_3'(0))$$

となるので $x = 0$ で微分可能であるが、$x \neq 0$ に対しては、

$$f_3'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

であり、$\cos(1/x)$ は $x=0$ の近くでは -1 から 1 の間を振動するので $x\to 0$ のときに極限を持たない。よって、$f_3'(0)$ は存在するが $\lim_{x\to 0} f_3'(x)$ は存在せず、$f_3'(x)$ は $x=0$ で連続ではないことがわかる。なおこの例は、

$$\lim_{x\to +0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}\neq \lim_{x\to +0} f_3'(x)$$

も示していて (左辺は 0、右辺は存在しない)、3 節の定義 2 の後に述べた注意に対する例にもなっている。

よって一般に導関数 $f'(x)$ は連続ではないことがわかるが、一方で $f'(x)$ にはいかなる不連続性も許されるのかというとそうではなく、実は $f'(x)$ には (連続ではなくても) 次のような中間値の定理が成り立つことが知られている ([3])。

定理 7

$f(x)$ が、閉区間 $I=[a,b]$ を含むある開区間で連続でかつ微分可能で、$f'(a)\neq f'(b)$ であれば、$f'(a)$ と $f'(b)$ の間の任意の実数 y ($f'(a)<y<f'(b)$ または $f'(a)>y>f'(b)$) に対して、$f'(c)=y$ となる $x=c$ が I の内部 ($a<c<b$) に少なくとも一つ存在する。

証明

$f'(a)<y<f'(b)$ と仮定する ($f'(a)>y>f'(b)$ の場合も同様)。$g(x)=f(x)-yx$ とすると、$g'(a)=f'(a)-y<0,\ g'(b)=f'(b)-y>0$ であるので、$g(x)$ は $x=a$ の付近では減少、$x=b$ の付近では増加するので、少なくとも $g(a), g(b)$ は区間 I での $g(x)$ の最小値ではない。一方で、定理 4 より連続関数 $g(x)$ は区間 I で最小値 $g(c)$ を取るから、$a<c<b$ となっているはずである。仮定より $g'(c)=f'(c)-y$ は存在するが、この c の付近では $g(x)$ は右にも左にも減少はできないので、よって $g'(c)=0$ でなくてはならない。よって $f'(c)=y$ となる。■

よって、区間で微分可能な関数の導関数は、このような中間値の定理が成り立たないような不連続性は許されず、例えばそれが成り立たないガウス関数のような導関数は存在しないことになる。

なお上の $f_3(x)$ で、ある点で導関数が極限を持たないような不連続性の例を示したが、導関数が極限を持つ場合には、その点では連続となることが言える。

定理 8

$f(x)$ が $x=a$ の付近で連続で、$x=a$ を除いては微分可能であり、

$$\lim_{x\to a} f'(x) = A$$

という有限な極限が存在するとき、$f(x)$ は $x=a$ でも微分可能で $f'(a)=A$ となる。

証明

$x>a$ で x が a に近づくとき、平均値の定理 6 により

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) \quad (a<c<x)$$

となる c が存在する (平均値の定理 6 は、$f'(a)$ の存在を必要としない)。x が変わればもちろん c も変わるが、$a<c<x$ であるので、$x\to a$ のときにはそれにともない $c\to a$ となる。よって仮定より、$f'(c)\to A$ となるので、

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$

となる。$x\to a-0$ の場合も同様なので、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$

となり、よって $f'(a)$ が存在して $f'(a)=A$ となる。■

例えば、

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x<0 \text{ のとき}) \\ x^2 & (x\geq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{9}$$

という関数は、$x=0$ を含みすべての x で連続で、$x<0$ では $f_4'(x)=0$, $x>0$ では $f_4'(x)=2x$ であるから、$x=0$ への極限も

$$\lim_{x\to 0} f_4'(x) = 0$$

となる。よってこの定理 8 より $x=0$ でも微分可能で、$f_4'(0)=0$ であることが言える。

5 その他の例

その他、2, 3 の例を紹介しよう。

2 節で見た $f_2(x) = xf_D(x)$ は「$x = 0$ で連続で、その他の x では連続ではない関数」であったが、これを応用すると、「$x = 0$ で連続かつ微分可能で、その他の x では連続ではない関数」も簡単に作れる。例えば $f_5(x) = x^2 f_D(x)$ がそのようなものの一つである。$x \neq 0$ では、あいかわらず連続ではないが、不等式

$$0 \leq x^2 f_D(x) \leq x^2$$

と、はさみうちの原理:

「$x = a$ の近くで $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ であり、

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$$

ならば $\lim_{x \to a} g(x)$ も存在して $\lim_{x \to a} g(x) = b$ となる」

により $\lim_{x \to 0} f_5(x) = 0$ となることがわかるし、

$$\frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = xf_D(x)$$

なので、

$$-|x| \leq xf_D(x) \leq |x|$$

より、再びはさみうちの原理により

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = 0 \ (= f_5'(0))$$

となることもわかる。よって、$f_5(x)$ は $x = 0$ では微分可能となる。

また、ワイヤストラス関数 $f_w(x)$ は「すべての x で連続でかつすべての x で微分可能でない関数」であったが、これを応用すれば、「すべての x で連続で、$x = 0$ でのみ微

分可能な関数」を作ることもできる。それは、$f_6(x) = x^2 f_w(x)$ とすればよい ($x = 0$ での微分可能性は、ほぼ上の $f_5(x)$ と同様に示される)。

最後に、不定形の極限を求めるときによく使われるロピタルの定理に関する例を一つ紹介する。ロピタルの定理とは以下のような定理である。

定理 9 (ロピタルの定理)

$x = a$ の近くで連続かつ微分可能である関数 $f(x)$, $g(x)$ が、$x \neq a$ では $g(x) \neq 0$ で、$f(a) = g(a) = 0$ であり、

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{10}$$

が存在するとき、極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\quad (0/0\text{ の不定形})$$

も存在して、(10) に等しい。

これもほとんどの微分の教科書に載っている定理であり、通常はあまり条件を考えることなく、例えば、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

のように順に分子分母の微分によって計算していくのが普通である。

しかしこのロピタルの定理は、条件を満たさないものに対しては適用できない。学生の計算では、不定形でないものに対して適用する間違いを見ることは多いが、厳密には (10) の存在も確定しなければ成立しないので、このように $=$ と書いた後に微分を計算するのは、厳密に言えば本来順番が逆であり、微分の極限を確認した後でそれが元の極限に等しい、とすべき形になっている[1]。

[1] もちろん、工学部の学生等に対してはそこまで細かくは指摘はしないのが普通であろう。

この、「(10) の存在が確定せず、ロピタルの定理が成立しない」ような例を紹介する。通常は、こういうものがあるとは思わずに、= と書いた後に微分の式を書くのであるが、この例に対してはそのように書くと正しい極限が求められないことになる。

実は既に本質的にはそのような例を見たことになっているのであるが、それは 4 節で紹介した $f_3(x)$ であり、これは $f_3(0)=0$ であるから、極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_3(x)}{x}$$

は不定形の極限である。この極限は、直接

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_3(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

と求められるが、$f_3(x)$ は $x=0$ を含め微分可能であり、分子分母微分した式の極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_3'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

であり、これは極限を持たない。よって、この場合は

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_3(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_3'(x)}{1}$$

は成立しない[2]。

6 おわりに

私もそうであるが、工学の解析の講義では、「連続性」、「微分可能性」の厳密な話やデリケートさに関する説明はあまりせずに、計算演習に重点を置き、ここに述べたような話題は半分も取り上げないのが普通ではないかと思う。

しかし、最後に上げた例のように、形式的な計算だけでは困る場合も中にはあるので、そういうこともある、といったことは本当は知っておいてもらいたいと思う。ここにまとめたことが、少しでもそのような役に立ってくれればと思っている。

[2]分母が x の場合のロピタルの定理は、実質的に $x=0$ での微分係数と導関数の $x=0$ への極限の話に等しい。

参考文献

[1] 「ε-δ のお話」
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/basic1.html#epsdlt

[2] 猪狩惺「実解析入門」岩波書店 (1996)、§4.1「微分の定義」

[3] 杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会 (1980)、第 II 章 §2「平均値の定理」

[4] 「ワイヤストラスの関数」
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/info2/info2.htm