2023 年 07 月 25 日

有理関数のラプラス逆変換の計算 その 2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で、多項式の商である有理関数のラプラス逆変換について紹介したが、そこで一番厄介な形の標準形

$$\frac{1}{(s^2+1)^{k+1}},\quad \frac{s}{(s^2+1)^{k+1}}$$

のラプラス逆変換については、

- 複素数の範囲で部分分数分解する方法
- 3 項漸化式を作る方法
- 積分形の漸化式
- 畳み込みによる漸化式
- 未定係数法

を紹介したが、3 項漸化式以外の方法はあまり簡単ではなく、また一番ましな 3 項漸化式でも、一つの式で表現できない、という難点があった。

一方、以前別な目的で、半奇数次 $(n+1/2)$ のベッセル関数、いわゆる半ベッセル関数について考察したが [2]、今回また上の形のラプラス逆変換のノートを作っているときに、それが [2] で見た式に似ていることに気がついた。それなら、漸化式でなくても一つの式で表現できそうなので、その構造、導出などを含めてここで紹介する。

2 漸化式

本稿の目的は、

$$\mathcal{L}[f_k]=\frac{1}{(s^2+1)^{k+1}},\quad \mathcal{L}[g_k]=\frac{s}{(s^2+1)^{k+1}}\ \ (k\geq 0)$$

となる $f_k(t), g_k(t)$ を求めることであり、これに対して [1] では以下のような漸化式を得た。

$$\hat{f}_{k+1}=(2k+1)\hat{f}_k-t\hat{g}_k,\quad \hat{g}_{k+1}=t\hat{f}_k\quad (k\geq 0) \tag{1}$$

$$f_0(t)=\sin t,\quad g_0(t)=\cos t \tag{2}$$

ここで、$\hat{f}_k, \hat{g}_k$ は

$$\hat{f}_k=2^k k! f_k,\quad \hat{g}_k=2^k k! g_k\quad (k\geq 0) \tag{3}$$

である。(1) から $\hat{f}_k$ のみ、$\hat{g}_k$ のみの三項漸化式も得られていた:

$$\hat{f}_{k+1}=(2k+1)\hat{f}_k-t^2\hat{f}_{k-1},\quad \hat{g}_{k+1}=(2k-1)\hat{g}_k-t^2\hat{g}_{k-1}\quad (k\geq 1) \tag{4}$$

さらに、微分について

$$\hat{f}'_k=\hat{g}_k\quad (k\geq 0) \tag{5}$$

も得られていた。これらを元に最初のいくつかを書くと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\hat{f}_0(t) &= \sin t,\ \ \hat{f}_1(t) = \sin t - t\cos t,\\
\hat{f}_2(t) &= 3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t,\\
\hat{f}_3(t) &= 15\sin t - 15t\cos t - 6t^2\sin t + t^3\cos t,\\
\hat{g}_0(t) &= \cos t,\ \ \hat{g}_1(t) = t\sin t,\\
\hat{g}_2(t) &= t\sin t - t^2\cos t,\\
\hat{g}_3(t) &= 3t\sin t - 3t^2\cos t - t^3\sin t
\end{aligned}$$

なお、(1) より $\hat{f}_k$ がわかれば、$\hat{g}_k$ の方は容易にわかる。

一方で [2] で考察した半奇数次ベッセル関数 (半ベッセル関数) $J_{n+1/2}(x)$ は、

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, x^{n+1} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} \tag{6}$$

と表されるが、これも最初のいくつかを見ると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{1/2}(x) &= \sin x,\\
\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{3/2}(x) &= \frac{\sin x - x\cos x}{x},\\
\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{5/2}(x) &= \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^2},\\
\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{7/2}(x) &= \frac{(15-6x^2)\sin x + (x^3-15x)\cos x}{x^3}
\end{aligned}$$

この右辺の分子はまさに $\hat{f}_0(x)$, $\hat{f}_1(x)$, $\hat{f}_2(x)$, $\hat{f}_3(x)$ となっていて、よって

$$\hat{f}_k(t) = t^k \sqrt{\frac{\pi t}{2}}\, J_{k+1/2}(t) = t^{2k+1} \left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\sin t}{t} \tag{7}$$

が成り立つことが予想される。

もしこれが言えれば、それは $\hat{f}_k$ の、[1] で考察したものとはまた別の計算法になるし、さらに漸化式なしに 1 本の式で $\hat{f}_k$ を表せることになる。ただし、[2] では、少し大きい次数のものに対しては直接 (6) を使って計算したのではなく、やはり (4) と同等の漸化式を用いて計算しているから、そんなに計算しやすいわけではなかったと思う。

3 予想の証明

次は、漸化式 (1)、および微分の関係式 (5) を用いて、前節の予想 (7) を証明する。

(1) に (5) を代入すると

$$\hat{f}_{k+1} = (2k+1)\hat{f}_k - t\hat{f}_k' \quad (k \geq 0) \tag{8}$$

となるから、両辺 t^{2k+2} で割ると、

$$\frac{\hat{f}_{k+1}}{t^{2k+2}} = \frac{2k+1}{t^{2k+2}}\,\hat{f}_k - \frac{1}{t^{2k+1}}\,\hat{f}'_k = -\left(\frac{1}{t^{2k+1}}\right)'\hat{f}_k - \frac{1}{t^{2k+1}}\,\hat{f}'_k = -\left(\frac{\hat{f}_k}{t^{2k+1}}\right)'$$

となり、よって

$$\frac{\hat{f}_{k+1}}{t^{2k+3}} = -\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{f}_k}{t^{2k+1}}\right) \tag{9}$$

となるので、これを繰り返し用いれば、

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}_k}{t^{2k+1}} &= -\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{f}_{k-1}}{t^{2k-1}}\right) = \left(-\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\right)^2\left(\frac{\hat{f}_{k-2}}{t^{2k-3}}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\right)^k\frac{\hat{f}_0}{t}\\ &= \left(-\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\right)^k\frac{\sin t}{t}\end{aligned}$$

が得られ、これで (7) が示されたことになる。なお、

$$\frac{\sin t}{t} = -\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\cos t$$

なので、(7) は、

$$\hat{f}_k(t) = t^{2k+1}\left(-\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\right)^k\frac{\sin t}{t} = t^{2k+1}\left(-\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\right)^{k+1}\cos t \tag{10}$$

と書くこともできる。$\hat{g}_n(t)$ は、(1) より、$k\geq 1$ に対しては、

$$\hat{g}_k(t) = t\hat{f}_{k-1} = t^{2k}\left(-\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\right)^k\cos t \tag{11}$$

と書けることになるが、これは (2) より $k=0$ でも成立するので、(11) は $k\geq 0$ に対して成り立つ。

なお、$\hat{g}_k$ に対しても (8) と同様の漸化式を導くこともでき、そこから $\hat{f}_k$ と同様にして (11) を得ることもできる。

結局、(3), (10), (11) より、f_k, g_k を 1 本で表現する以下の式が得られた。

$$f_k(t) = \frac{t^{2k+1}}{2^k k!}\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k+1}\cos t = \frac{\sqrt{\pi}}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+1/2} J_{k+1/2}(t) \tag{12}$$

$$g_k(t) = \frac{t^{2k}}{2^k k!}\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{k}\cos t = \frac{\sqrt{\pi}}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+1/2} J_{k-1/2}(t) \tag{13}$$

4 公式による計算

本節では、(10) による $\hat{f}_k$ の計算例を紹介する。

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= t\frac{\sin t}{t} = \sin t, \\ \hat{f}_1 &= t^3\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)(t^{-1}\sin t) = t^3(-t^{-1})(-t^{-2}\sin t + t^{-1}\cos t) \\ &= t^3(t^{-3}\sin t - t^{-2}\cos t) = \sin t - t\cos t \end{aligned}$$

となる。なお、t^3 と $-t^{-1}$ をまとめて先に $-t^{-2}$ としなかったのは、次の $\hat{f}_2$ の計算のためであり、この t^3 を除いた部分は次の $\hat{f}_2$ で利用できる。

$$\begin{aligned} \hat{f}_2 &= t^5\left(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^2(t^{-1}\sin t) = t^5(-t^{-1})(t^{-3}\sin t - t^{-2}\cos t)' \\ &= t^5(-t^{-1})(-3t^{-4}\sin t + t^{-3}\cos t + 2t^{-3}\cos t + t^{-2}\sin t) \\ &= t^5\{(3t^{-5} - t^{-3})\sin t - 3t^{-4}\cos t\} = (3 - t^2)\sin t - 3t\cos t \end{aligned}$$

もちろん、順に計算する場合は、上と同等だがむしろ (9) より得られる漸化式

$$\hat{f}_{k+1} = -t^{2k+2}\left(\frac{\hat{f}_k}{t^{2k+1}}\right)'$$

を使う、という手もある。

$$\begin{aligned} \hat{f}_3 &= -t^6(t^{-5}\hat{f}_2)' = -t^6((3t^{-5} - t^{-3})\sin t - 3t^{-4}\cos t)' \\ &= -t^6\{(-15t^{-6} + 3t^{-4})\sin t + (3t^{-5} - t^{-3})\cos t + 12t^{-5}\cos t + 3t^{-4}\sin t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -t^6\{(-15t^{-6}+6t^{-4})\sin t+(15t^{-5}-t^{-3})\cos t\}\\
&= (15-6t^2)\sin t+(-15t+t^3)\cos t,\\
\hat{f}_4 &= -t^8(t^{-7}\hat{f}_3)' \ = \ -t^8(15t^{-7}-6t^{-5}\sin t+(-15t^{-6}+t^{-4})\cos t)'\\
&= -t^8\{(-105t^{-8}+30t^{-6})\sin t+(15t^{-7}-6t^{-5})\cos t\\
&\quad +(90t^{-7}-4t^{-5})\cos t+(15t^{-6}-t^{-4})\sin t\}\\
&= -t^8\{(-105t^{-8}+45t^{-6}-t^{-4})\sin t+(105t^{-7}-10t^{-5})\cos t\}\\
&= (105-45t^2+t^4)\sin t+(-105t+10t^3)\cos t
\end{aligned}$$

等となる。

これらの微分による計算と、[1] でやったような (4) の漸化式による計算を比較すると、漸化式の方は微分計算をしないで代入だけで済む分計算は速い。しかし、漸化式の方は漸化式の公式を確認しながら計算する必要があるが、こちらの微分計算の方は公式は単純なので、機械的に順に計算していけるところが少しメリットと言えるかもしれない。

5 一般のベッセル関数の場合

3 節で示した関係式 (12) は、言い換えれば、半ベッセル関数に対して

$$\mathcal{L}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^{k+1/2}J_{k+1/2}(t)\right]=\frac{k!}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{(s^2+1)^{k+1}}\quad(k=0,1,2,\ldots)$$

が成り立つことを示しているが、このようなベッセル関数のラプラス変換の公式も当然既にあるのではと思い、数学辞典 [3] のラプラス変換表を見たらやはり次のような公式が載っていた。

$$\mathcal{L}[t^\nu J_\nu(t)]=\frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(s^2+1)^{\nu+1/2}}\quad(\nu>-1/2)\tag{14}$$

なお、数学辞典 [3] には $t^\nu J_\nu(at)$ のラプラス変換の形で載っているが、(14) をその形に拡張することは容易である。本節では、この一般の公式 (14) を証明する。

まず、一般のベッセル関数 $J_\nu(x)$ は、

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\quad(x>0)\tag{15}$$

の無限級数で与えられる。2 階の常微分方程式の解、あるいは積分の式で表現する方法もあるが、本節ではこの形を用いる。

まず (15) の無限級数部分であるが、

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!\,\Gamma(\nu+m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2}\Big/\left\{\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right\}\right|\\&\quad=\quad\frac{x^2}{4(m+1)(\nu+m+1)}\end{aligned}$$

なので、ダランベールの判定法より収束半径は無限大、すなわちすべての $x>0$ で絶対収束する。

まずは、ラプラス変換

$$\mathcal{L}[t^\nu J_\nu(t)]=\mathcal{L}\left[\left(\frac{t^2}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}\right] \tag{16}$$

と無限和との順序交換、すなわち

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\,\frac{t^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu}}\,e^{-st}dt\\&\quad=\quad\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\,\frac{t^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu}}\,e^{-st}dt\end{aligned} \tag{17}$$

とできるかを考える。

一般に、区間 I 上の積分に対し、

$$\int_I\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n(x)dx$$

が成り立つための十分条件として、ルベーグ収束定理を考えれば、すべての N に対し、

$$\left|\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\right|\le S(x)\ \ (x\in I),\qquad\int_I S(x)dx<\infty \tag{18}$$

となる、N によらない非負の関数 $S(x)$ が取れればよい。今、

$$S_N(t)=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\,\frac{t^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu}}\,e^{-st}$$

とすると、$\Gamma(x)$ は $x\geq 2$ では単調増加なので、$\nu>-1/2,\,m\geq 2$ に対し、

$$\Gamma(\nu+m+1)\geq\Gamma(m)=(m-1)!$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
|S_N(t)| &\leq \frac{e^{-st}}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{t^{2\nu}}{2^{\nu}}+\frac{e^{-st}}{\Gamma(\nu+2)}\,\frac{t^{2\nu+2}}{2^{\nu+2}}+\sum_{m=2}^{N}\frac{e^{-st}}{m!(m-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}\frac{t^{2\nu}}{2^{\nu}}\\
&\leq \frac{e^{-st}t^{2\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}+\frac{e^{-st}t^{2\nu+2}}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+2)}\\
&\quad+\frac{t^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}}\,e^{-st}\left(\sum_{m=2}^{N}\frac{1}{m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m}\right)\left(\sum_{m=2}^{N}\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m-1}\right)\\
&\leq \frac{e^{-st}t^{2\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}+\frac{e^{-st}t^{2\nu+2}}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+2)}+\frac{t^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}}\,e^{-st}e^{t/2}e^{t/2}\\
&= \frac{e^{-st}t^{2\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}+\frac{e^{-st}t^{2\nu+2}}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+2)}+\frac{t^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}}\,e^{-(s-1)t}
\end{aligned}$$

となる。この最後の式 $S(t)$ とすれば、これは N にはよらず非負で、$\nu>-1/2,\,s>1$ に対し、

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}S(t)dt &= \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\int_0^{\infty}e^{-st}t^{2\nu}dt+\frac{1}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+2)}\int_0^{\infty}e^{-st}t^{2\nu+2}dt\\
&\quad+\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_0^{\infty}e^{-(s-1)t}t^{2\nu+1}dt\\
&= \frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)s^{2\nu+1}}+\frac{\Gamma(2\nu+3)}{2^{\nu+2}\,\Gamma(\nu+2)s^{2\nu+3}}+\frac{\Gamma(2\nu+2)}{2^{\nu+1}(s-1)^{2\nu+2}}
\end{aligned}$$

となりこれは有限値となる。これで (18) の条件が満たされ、(17) の順序交換が可能となり、(16) は、$\nu>-1/2,\,s>1$ に対して、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{\nu}J_{\nu}(t)] &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\,\frac{1}{2^{2m+\nu}}\mathcal{L}[t^{2m+2\nu}]\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\,\frac{1}{2^{2m+\nu}}\,\frac{\Gamma(2m+2\nu+1)}{s^{2m+2\nu+1}}
\end{aligned}\tag{19}$$

となる。ここで、$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ $(x>0)$ より、

$$\frac{\Gamma(2\nu+2m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}=\frac{(2m+2\nu)(2m+2\nu-1)\cdots(2\nu+1)\,\Gamma(2\nu+1)}{(m+\nu)(m+\nu-1)\cdots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}$$

となるが、この右辺の分母は $\Gamma(\nu+1)$ を除いてすべて約分でき、それをさらに変形すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(2\nu+2m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} &= 2^m(2m+2\nu-1)(2m+2\nu-3)\cdots(2\nu+1)\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \\
&= 2^{2m}\left(m+\nu-\frac{1}{2}\right)\left(m+\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \\
&= (-1)^m 2^{2m}\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)\left(-\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\nu-m+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \\
&= (-1)^m 2^{2m}\binom{-\nu-1/2}{m} m!\,\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}
\end{aligned}$$

と書ける。よって (19) は、

$$\mathcal{L}[t^\nu J_\nu(t)] = 2^{-\nu}\,\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\nu-1/2}{m}\frac{1}{s^{2m+2\nu+1}}$$

となるが、$s>1$ では、$0<1/s^2<1$ なので、一般二項定理より、

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\nu-1/2}{m}\frac{1}{s^{2m+2\nu+1}} &= \frac{1}{s^{2\nu+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\nu-1/2}{m}\left(\frac{1}{s^2}\right)^m \\
&= \frac{1}{s^{2\nu+1}}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\nu-1/2} = \frac{1}{s^{2\nu+1}}\,\frac{s^{2\nu+1}}{(1+s^2)^{\nu+1/2}} = \frac{1}{(1+s^2)^{\nu+1/2}}
\end{aligned}$$

となり、よって

$$\mathcal{L}[t^\nu J_\nu(t)] = 2^{-\nu}\,\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{1}{(1+s^2)^{\nu+1/2}}$$

が得られる。あとは、

$$2^{-\nu}\,\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \tag{20}$$

を示せば (14) が言えることになる。

実はガンマ関数に (20) のような関係式が成り立つことは知らなかったが、[4] によればこれは「ルジャンドルの倍数公式」と呼ばれるものらしい。ガンマ関数とベータ関数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p>0,\ q>0)$$

の間の関係式

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を用いると、$a>0$ に対して、

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{\Gamma(a)}\ B(a,a)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx$$

となるが、この積分で $x=(1+t)/2$ と置換すると、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_{-1}^1\left(\frac{1+t}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{a-1}\frac{dt}{2}\\ &= \frac{1}{2^{2a-1}\,\Gamma(a)}\int_{-1}^1(1-t^2)^{a-1}dt \ = \ \frac{2^{2-2a}}{\Gamma(a)}\int_0^1(1-t^2)^{a-1}dt\end{aligned}$$

となるが、$t^2=y$ と置換すると、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} &= \frac{2^{2-2a}}{\Gamma(a)}\int_0^1(1-y)^{a-1}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \ = \ \frac{2^{1-2a}}{\Gamma(a)}\int_0^1(1-y)^{a-1}y^{-1/2}dy\\ &= \frac{2^{1-2a}}{\Gamma(a)}\ B\left(a,\frac{1}{2}\right) \ = \ \frac{2^{1-2a}}{\Gamma(a)}\,\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(a+1/2)} \ = \ \frac{2^{1-2a}\sqrt{\pi}}{\Gamma(a+1/2)}\end{aligned}$$

となる。この式で、$a=\nu+1/2\ (>0)$ とすれば、

$$\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu+1)}=\frac{2^{-2\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)}$$

となり、(20) が得られる。よって $\nu>-1/2,\ s>1$ で (14) が示されたことになる。

ついでに、(14) の両辺を s で微分すると、右辺の微分は、

$$\frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{2s}{(s^2+1)^{\nu+3/2}} = -\frac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\frac{s}{(s^2+1)^{\nu+3/2}}$$

となり、左辺の微分は

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t^\nu J_\nu(t)] = -\mathcal{L}[t^{\nu+1}J_\nu(t)]$$

となるので、ここから、

$$\mathcal{L}[t^\nu J_{\nu-1}(t)] = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{s}{(s^2+1)^{\nu+1/2}}$$

が成立することがわかる。なお、これが成立する ν は、この計算からすると $\nu > 1/2$ ということになるが、(14) の微分ではなく、前と同様の議論で無限級数から導けば、ν の条件は $\nu > 0$ までゆるめられることがわかる。

以上により、(12), (13) の一般化として次が得られたことになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^{p+1}}\right] &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{p+1/2} J_{p+1/2}(t) \quad (p > -1)\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^{p+1}}\right] &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{p+1/2} J_{p-1/2}(t) \quad (p > -1/2)
\end{aligned}$$

なお、当然半ベッセル関数 ($\nu = n + 1/2$) 以外のベッセル関数 J_ν は、三角関数などの簡単な式で表すことはできない。

6 最後に

本稿では、$1/(s^2+1)^{k+1}$, $s/(s^2+1)^{k+1}$ のラプラス逆変換と半ベッセル関数の関係を紹介し、具体例を計算し、その拡張である $1/(s^2+1)^{p+1}$, $s/(s^2+1)^{p+1}$ のラプラス逆変換のベッセル関数による表現式も証明した。

それにより、これらもラプラス変換表の一部として紹介できるようになり、また、分子の次数が分母の次数より小さい有理関数のラプラス逆変換は、原則部分分数分解に

より、指数関数、t の自然数乗と半ベッセル関数 (の分子部分に出る三角関数と多項式との積の和) で容易に表せることがわかった。

工学者向けには、[1] のような計算の方針を示すやり方よりも、本稿のような半ベッセル関数、または $(-t^{-1}d/dt)^k$ による 1 本の式での表現の方がむしろ適切かもしれないので、そういう点では本稿も意味があるかもしれないが、ベッセル関数のラプラス変換自体は昔から知られているものなので、もしかしたらラプラス変換を使う工学者には既に良く知られた事実である可能性も高い。となると、本稿は証明を示しているところ以外はそれほど意味はないかもしれない。

参考文献

[1] 竹野茂治、「有理関数のラプラス逆変換」(2008)
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/ lecture/appla/data/laplace2.pdf`

[2] 竹野茂治、「半ベッセル関数について」(2022)
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/ lecture/misc/data/semibessel1.pdf`

[3] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 3 版」岩波書店 (1985)

[4] Wikipedia、「ガンマ関数」
`https://ja.wikipedia.org/wiki/ガンマ関数`