2008 年 04 月 07 日
(2023 年 07 月 20 日 4,6 節追加)

留数計算によるラプラス逆変換の計算

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

(本稿は、2008 年春に書きかけになっていた原稿の、4, 6 節部分を書き足して公開するものであり、教科書や科目名は 2008 年当時の設定で書かれていることに注意。)

応用数理 A で使用した教科書 [1] には、ベクトル解析、常微分方程式、複素関数論、ラプラス変換の 4 分野が含まれていて、講義ではそのうち常微分方程式とラプラス変換の講義を行っている。工学部では、この 4 分野を別々の講義として教えることも多く、よって各分野別々の教科書ももちろんたくさんある。

ところで、ラプラス変換は複素関数論との関連もあり、変換後の関数を複素関数として議論したり、ラプラス逆変換を複素平面上の線積分として表したりすることもできるので、ラプラス変換を学ぶには、ある程度複素関数論の知識があるといいのであるが、ラプラス変換単独の教科書では、複素関数論の知識をあまり仮定はしづらいようで、複素数の利用はごく基本的なところにとどまっていることが多い。実はラプラス逆変換の計算にも留数を利用した計算方法があるのであるが、そのような事情でラプラス変換単独の本ではその公式は紹介されていないことが多い。

しかし、この教科書 [1] には複素関数論も含まれていて、ローラン展開や留数計算なども説明されているので、その留数を利用したラプラス逆変換の計算方法も紹介されている。

この公式の理解や実際の計算には複素関数論の知識がある程度必要であるが、かなり有用な計算方法でもあるし、通常のラプラス逆変換の計算法 ([3] 参照) と比べても計算量もそれほど多くはなく、ものによってはそれなりによい計算方法だと思うので、教科書 [1] とは少し違った形ではあるが、本稿でその公式を説明し、具体的な計算をいくつか紹介しようと思う。

2 留数を用いたラプラス逆変換の公式

この教科書 [1] で紹介されている、留数計算を利用したラプラス逆変換の計算方法とは、以下のようなものである ([1] 第 IV 部 第 3 章 §2「ラプラス逆変換公式」の式 (4))。

定理 1

$F(s)$ が、有限個の極 $s = s_1, s_2, \ldots, s_N$ 以外では正則な関数で、あるところから外では有界:

$$\sup_{|s|>R_0} |F(s)| < \infty \tag{1}$$

で、かつ遠方への減衰条件

$$\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0 \tag{2}$$

を満たすとすると、そのラプラス逆変換 $f(t)$ は次の式で与えられる:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_j] \tag{3}$$

ここで、$\mathrm{Res}[g(z), \alpha]$ は $g(z)$ の極 $z = \alpha$ での留数、すなわち $z = \alpha$ での $g(z)$ のローラン展開の $1/(z-\alpha)$ の係数を意味するものとする。

[3] でも見たように、多項式、三角関数、指数関数の和や積で表される関数のラプラス変換は、分母の次数が分子の次数より大きい有理関数となり、そのような有理関数は有界性 (1) と減衰条件 (2) を満たすので、そのラプラス逆変換の計算にはこの公式が適用できる。

しかし、例えば $F(s) = \sin s/s$ のような場合、一見この定理の条件を満たすように見えるかもしれないが、$s = iy$ に対して

$$F(iy) = \frac{\sin iy}{iy} = \frac{e^{i^2y} - e^{-i^2y}}{2i^2y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2y}$$

となり、この直線上は減衰しないので減衰条件 (2) を満たさない。また、$F(s) = 1/s(e^s - 1)$ のような場合も条件を満たすように見えるかもしれないが、$e^s = 1$ となる s は有限個ではなく、$s = 2n\pi i$ (n は整数) がすべて極となるので (よって虚軸上では有界にもならない)、定理の条件を満たさない。

つまり、この定理の条件を満たす関数はだいぶ限られていて、実は、それは分母の次数が分子の次数より大きい有理関数しかないこともちゃんと証明できる (5 節参照)。そ

れでも応用としては十分広い範囲であり、留数計算のみでラプラス逆変換を求めることができる、という点で十分有用な公式であると思う。

なおこの公式 (3) の説明は、本稿では教科書 [1] とは少し違う説明を 3 節で行う。そのため、教科書の公式と上の定理 1 とは少し違いがあり、教科書の定理の方が減衰条件がやや強い形で上げられている。しかし教科書の形だと、実は分母の次数が分子の次数より 1 だけ大きい有理関数が含まれないことになってしまうが、この公式 (3) 自体はもちろんそのような関数にも適用できる。

3 公式の説明

この節では、公式 (3) の「説明」を行う。教科書 [1] (第 IV 部 第 3 章 §2) では、ラプラス逆変換を表すブロムウィッチ積分を用いてそれを説明しているのであるが、ここではそれとは少し違う説明を行う。なお、一部厳密性を欠く説明が含まれるため、「証明」ではなく、あくまで「説明」であるとしておくが、理屈はこれでも十分理解できると思う。

方針としては、基本的に (3) の右辺をラプラス変換し、それが $F(s)$ に等しくなることを示すのであるが、その前に、留数定理を用いて (3) の右辺を複素積分の形に書き直すことから始める。

各 $s = s_1, \ldots, s_N$ は孤立している点なので、それぞれを中心として、いずれも交わらない円 C_j を s 平面に書くことができる。その向きを左に取れば留数定理より、

$$\mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_j] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} e^{st}F(s)ds \quad (1 \leq j \leq N) \tag{4}$$

となるから (3) の右辺は、

$$g(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} e^{st}F(s)ds \tag{5}$$

と書けることになる。さらに、$e^{st}F(s)$ はこの s_j を除いては正則なので、この C_j すべてを内部に含む大きな円 C' を取れば (5) は、

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{st}F(s)ds \tag{6}$$

となる。この C' が $C' \subset \{\Re s < \sigma\}$ であるとして、この (6) のラプラス変換を考えると、

$$\mathcal{L}[g(t)](s_0) \;=\; \mathcal{L}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{st}F(s)ds\right](s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \mathcal{L}[e^{st}](s_0)F(s)ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds \tag{7}$$

となる。$\mathcal{L}[e^{st}](s_0) = 1/(s_0 - s)$ は $\Re s_0 > \Re s$ で成り立つので、$\Re s_0 > \sigma$ であれば (7) が言えることになる。

今、$R > 0$ を十分大きく取ることで、原点中心、半径 R の円 $C_R = \{|s| = R\}$ が C' と s_0 をいずれも内部に含むようにする。この場合、$F(s)/(s_0 - s)$ の極はこの C_R 内にすべて含まれることになるので、(7) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds + \mathcal{L}[g(t)](s_0) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで、C_0 は s_0 を中心とし $C_R \cap \{\Re s > \sigma\}$ に含まれる円とする。

この C_0 の内部では、$F(s)/(s_0 - s)$ は s_0 に 1 位の極を持つだけなので、コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds = -F(s_0) \tag{9}$$

となる。よって、(8), (9) より、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds = -F(s_0) + \mathcal{L}[g(t)](s_0) \tag{10}$$

がわかる。この右辺の値は R には関係ない値であるが、この左辺の値は実は 0 であることを以下に示す。

C_R 上の積分を $s = Re^{i\theta}$ として θ に関する積分に直すと、

$$\int_{C_R} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds = \int_0^{2\pi} \frac{F(Re^{i\theta})}{s_0 - Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta$$

となるが、

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{F(Re^{i\theta})}{s_0 - Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^{2\pi} \frac{|F(Re^{i\theta})|}{|s_0 - Re^{i\theta}|} d\theta$$

であり、

$$|s_0 - Re^{i\theta}| \geq |Re^{i\theta}| - |s_0| = R - |s_0|$$

なので、結局

$$\left| \int_{C_R} \frac{F(s)}{s_0 - s} ds \right| \leq \frac{R}{R - |s_0|} \int_0^{2\pi} |F(Re^{i\theta})| d\theta \tag{11}$$

となるが、$R \to \infty$ とすると右辺の最初の分数は 1 に収束し、後ろの積分は、減衰条件により各 θ に対して

$$\lim_{R\to\infty} |F(Re^{i\theta})| = 0$$

であるから (厳密には有界性条件 (1) も考え合わせると) 0 に収束する。よって、(11) の右辺は 0 に収束することになるので、(10) で考えれば、

$$0 = -F(s_0) + \mathcal{L}[g(t)](s_0)$$

すなわち、$\mathcal{L}[g(t)](s_0) = F(s_0)$ となることが示されたことになる。よって、g のラプラス変換が F であるということになり、$\mathcal{L}^{-1}[F] = g(t)$ が示されたことになる。

なお厳密に言えば、$g(t)$ のラプラス変換の存在、(7) のラプラス変換と積分の順序交換 (2 つ目の等号)、(11) の右辺の積分が 0 に収束すること、$\Re s_0 > \sigma$ 以外での s_0 でも $\mathcal{L}[g(t)](s_0) = F(s_0)$ となること、などの証明が必要なのであるが、ほぼ上のような説明で理屈は納得できるのではないかと思う。

4 具体例

定理 1 を利用して、いくつかの有理関数 $(F_j(s))$ のラプラス逆変換 $(f_j(t))$ を計算してみる。また、通常の計算との優位性についても考えてみる。

なお、$F(s)$ の極 $s = \alpha$ の位数が $k\ (\geq 1)$ である場合、そこでの留数 $\mathrm{Res}[F(s), \alpha]$ は、

$$\mathrm{Res}[F(s), \alpha] = \lim_{s\to\alpha} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{ds}\right)^{k-1} \{(s-\alpha)^k F(s)\} \tag{12}$$

で計算でき、位数が 1 の場合は易しい。

例 1

まずは分母が 1 次式の積に因数分解される場合。

$$F_1(s) = \frac{s^2 - 2s + 5}{(s-3)(s^2-1)} \tag{13}$$

この場合、$e^{st}F_1(s)$ の極は $s = 3, -1, 1$ で、いずれも 1 位なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[e^{st}F_1(s), 3] &= \lim_{s\to 3} e^{st}F_1(s)(s-3) = \lim_{s\to 3} e^{st}\frac{s^2-2s+5}{s^2-1} \\ &= e^{3t}\frac{9-6+5}{9-1} = e^{3t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[e^{st}F_1(s),1] &= \lim_{s\to 1} e^{st}F_1(s)(s-1) \ = \ \lim_{s\to 1} e^{st}\frac{s^2-2s+5}{(s-3)(s+1)} \\
&= e^t\frac{1-2+5}{(-2)\cdot 2} \ = \ -e^t, \\
\mathrm{Res}[e^{st}F_1(s),-1] &= \lim_{s\to -1} e^{st}F_1(s)(s+1) \ = \ \lim_{s\to -1} e^{st}\frac{s^2-2s+5}{(s-3)(s-1)} \\
&= e^{-t}\frac{1+2+5}{(-4)\cdot(-2)} \ = \ e^{-t}
\end{aligned}$$

となるので、よってラプラス逆変換 $f_1(t)$ は、定理 1 より

$$f_1(t) = \mathrm{Res}[e^{st}F_1(s),3] + \mathrm{Res}[e^{st}F_1(s),-1] + \mathrm{Res}[e^{st}F_1(s),1] = e^{3t} - e^t + e^{-t}$$

となる。

通常は、$F_1(s)$ を部分分数分解して $1/(s-3)$, $1/(s-1)$, $1/(s+1)$ の線形結合にしてから求めるが、この場合はこの留数計算の方が部分分数分解より少し易しいかもしれない。

例 2

次は、分母が実数の範囲では 1 次式に因数分解できない 2 次式の場合。

$$F_2(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \tag{14}$$

これも、極 $s=-1\pm i$ は 1 位なので極限は易しいが、複素数の計算が必要になる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[e^{st}F_2(s),-1+i] &= \lim_{s\to -1+i} e^{st}F_2(s)(s+1-i) \ = \ \lim_{s\to -1+i} e^{st}\frac{s+2}{s+1+i} \\
&= e^{(-1+i)t}\frac{1+i}{2i} \ = \ e^{-t}e^{it}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}\right), \\
\mathrm{Res}[e^{st}F_2(s),-1-i] &= \lim_{s\to -1-i} e^{st}F_2(s)(s+1+i) \ = \ \lim_{s\to -1-i} e^{st}\frac{s+2}{s+1-i} \\
&= e^{(-1-i)t}\frac{1-i}{-2i} \ = \ e^{-t}e^{-it}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\right)
\end{aligned}$$

よって、逆変換 $f_2(t)$ は、

$$f_2(t) = e^{-t}\left\{e^{it}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}\right) + e^{-it}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\right)\right\} = e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

となる。なお、これはむしろ、ラプラス変換の性質、公式を利用して、$s+1=y$ として

$$\begin{aligned}
F_2(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \ = \ \frac{y+1}{y^2+1} \ = \ \mathcal{L}[\cos t + \sin t](y) \\
&= \mathcal{L}[\cos t + \sin t](s+1) \ = \ \mathcal{L}[e^{-t}(\cos t + \sin t)](s)
\end{aligned}$$

とする方が早いように思う。

例 3

次は、分母が 1 次式の累乗の形の場合。

$$F_3(s) = \frac{3s^2 - 2s + 4}{(s+2)^4} \tag{15}$$

この場合、極 $s = -2$ は位数が 4 となる。なお、そこでの $F_3(s)$ の留数は 0 だが、$e^{st}F_3(s)$ の留数は 0 ではない。(12) を用いると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[e^{st}F_3(s), -2] &= \lim_{s\to -2}\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{ds}\right)^3\{(s+2)^4 e^{st}F_3(s)\} \\
&= \lim_{s\to -2}\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{ds}\right)^3\{e^{st}(3s^2 - 2s + 4)\} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{s\to -2}\{t^3 e^{st}(3s^2 - 2s + 4) + 3t^2 e^{st}(6s - 2) + 3te^{st}6 + 0\} \\
&= \frac{e^{-2t}}{6}\{t^3(12 + 4 + 4) + 3t^2(-12 - 2) + 18t\} \ = \ e^{-2t}\left(\frac{10}{3}t^3 - 7t^2 + 3t\right)
\end{aligned}$$

となる。

この $F_3(s)$ の場合、微分する関数の分母がなくなるのでライプニッツの公式を使えば微分はそれほど面倒ではないが、さらに分母に $(s-3)^2$ などがついていると微分の計算もだいぶ面倒になる。

留数を使わなければ、通常は $s + 2 = y$ として、

$$\begin{aligned}
F_3(s) &= \frac{3s^2 - 2s + 4}{(s+2)^4} \ = \ \frac{3(y-2)^2 - 2(y-2) + 4}{y^4} \\
&= \frac{3(y^2 - 4y + 4) - 2y + 4 + 4}{y^4} \ = \ \frac{3y^2 - 14y + 20}{y^4} \ = \ \frac{3}{y^2} - \frac{14}{y^3} + \frac{20}{y^4} \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{3t}{1!} - \frac{14t^2}{2!} + \frac{20t^3}{3!}\right](y) \ = \ \mathcal{L}\left[3t - 7t^2 + \frac{10t^3}{3}\right](s+2) \\
&= \mathcal{L}\left[e^{-2t}\left(3t - 7t^2 + \frac{10t^3}{3}\right)\right](s)
\end{aligned}$$

とやるだろう。分母に $(s-3)^2$ などが別にあれば部分分数分解が厄介になるが、この $F_3(s)$ ならそれは難しくないので、この例では通常の方法と留数の計算はそれほど計算量は違わない気がする。

なお、上では微分を利用して留数を求めたが、$s+2=y$ を利用してローラン展開を直接考えることもできる。

$$\begin{aligned} e^{st}F_3(s) &= e^{(y-2)t}\frac{3(y-2)^2-2(y-2)+4}{y^4} = e^{-2t}e^{yt}\frac{3y^2-14y+20}{y^4} \\ &= e^{-2t}\left(1+\frac{yt}{1}+\frac{y^2t^2}{2}+\frac{y^3t^3}{6}+\cdots\right)\left(\frac{3}{y^2}-\frac{14}{y^3}+\frac{20}{y^4}\right) \\ &= e^{-2t}\left(\frac{a_{-4}}{y^4}+\frac{a_{-3}}{y^3}+\frac{a_{-2}}{y^2}+\frac{10t^3/3-7t^2+3t}{y}+\cdots\right) \end{aligned}$$

この y^{-1} の係数が留数なので、

$$f_3(t) = e^{-2t}\left(\frac{10}{3}t^3-7t^2+3t\right)$$

となる。

例 4

最後は、部分分数分解後、および標準変形後に残る一番厄介な形。

$$F_4(s) = \frac{as+b}{(s^2+1)^k} \quad (k=2) \tag{16}$$

とりあえず $k=2$ の場合を考えるが、この場合極 $s=\pm i$ は 2 位なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[e^{st}F_4(s),i] &= \lim_{s\to i}\{e^{st}F_4(s)(s-i)^2\}' = \lim_{s\to i}\left\{e^{st}\frac{as+b}{(s+i)^2}\right\}' \\ &= \lim_{s\to i}\left\{te^{st}\frac{as+b}{(s+i)^2}+e^{st}\frac{a}{(s+i)^2}-2e^{st}\frac{as+b}{(s+i)^3}\right\} \\ &= e^{it}\left(t\frac{ai+b}{-4}+\frac{a}{-4}-2\frac{ai+b}{-8i}\right) \\ &= -\frac{e^{it}}{4}\{t(ai+b)+a+(-a+bi)\} = -\frac{e^{it}}{4}\left(bt-\frac{at+b}{i}\right), \\ \mathrm{Res}[e^{st}F_4(s),-i] &= \lim_{s\to -i}\{e^{st}F_4(s)(s+i)^2\}' = \lim_{s\to -i}\left\{e^{st}\frac{as+b}{(s-i)^2}\right\}' \\ &= \lim_{s\to -i}\left\{te^{st}\frac{as+b}{(s-i)^2}+e^{st}\frac{a}{(s-i)^2}-2e^{st}\frac{as+b}{(s-i)^3}\right\} \\ &= e^{-it}\left(t\frac{-ai+b}{-4}+\frac{a}{-4}-2\frac{-ai+b}{8i}\right) \\ &= -\frac{e^{-it}}{4}\{t(-ai+b)+a+(-a-bi)\} = -\frac{e^{-it}}{4}\left(bt+\frac{at+b}{i}\right) \end{aligned}$$

よって、

$$f_4(t) = -\frac{bt}{4}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{at+b}{4i}(e^{it} - e^{-it}) = -\frac{bt}{2}\cos t + \frac{at+b}{2}\sin t$$

となる。

通常は多分、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t\cos t] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos t] = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{(s^2+1)^2} = \mathcal{L}[\sin t] - \frac{2}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin t - t\cos t],$$

また、

$$\mathcal{L}[t\sin t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin t] = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

より

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}[t\sin t],$$

よって、

$$F_4(s) = \frac{a}{2}\mathcal{L}[t\sin t] + \frac{b}{2}\mathcal{L}[\sin t - t\cos t] = \mathcal{L}\left[\frac{at+b}{2}\sin t - \frac{bt}{2}\cos t\right]$$

となる、といったところだと思う。これは留数計算よりも少し早いような気がする。

また、分母の次数の k が増えた場合は、極の位数があがるので、微分しなければいけない階数も上がり、留数計算はだいぶ面倒になりそうな気がする。

通常の方法でも、$k > 1$ の場合は $t^j \cos t,\ t^j \sin t\ (0 \le j < k)$ のラプラス変換が必要になるので、上のように漸化式なしで一からやろうとするとかなり大変だが、漸化式を使えば比較的楽に計算できるはずである。

5 定理の条件を満たす関数

この節では、定理 1 を満たす関数について考える。実はそのような関数は、有理関数に限られることが証明できる。

定理 2

$F(s)$ が、有限個の極 $s = s_1, s_2, \ldots, s_N$ 以外では正則な関数で、有界性条件 (1) と減衰条件 (2) を満たすとすると、それは分子の次数が分母の次数より小さい有理関数となる。

これはローラン展開とリューヴィルの定理から導かれる。その概略を以下に示す。

$F(s)$ を $s = s_j$ でローラン展開すると

$$F(s) = \frac{a^j_{-m_j}}{(s-s_j)^{m_j}} + \cdots + \frac{a^j_{-1}}{s-s_j} + a^j_0 + a^j_1 s + \cdots$$

のようになるが、この負巾の項の和を $F_j(s)$ とする:

$$F_j(s) = \frac{a^j_{-m_j}}{(s-s_j)^{m_j}} + \cdots + \frac{a^j_{-1}}{s-s_j}$$

すると、$F - F_j$ は $s = s_j$ の周りで正則になり、また F_j は $s = s_j$ 以外では正則な関数であるから、

$$G(s) = F(s) - \sum_{j=1}^{N} F_j(s)$$

とすると、この $G(s)$ はすべての $s = s_j$ 周りで正則、つまり全平面で正則な関数となり、有界性条件 (1) から $G(s)$ は全平面で有界であることが言え、また減衰条件 (2) から

$$\lim_{|s|\to\infty} G(s) = \lim_{|s|\to\infty} F(s) - \sum_{j=1}^{N} \lim_{|s|\to\infty} F_j(s) = 0$$

であることがわかる。よってリューヴィルの定理から $G(s)$ は定数で、その値は 0 となる。それはゆえに

$$F(s) = \sum_{j=1}^{N} F_j(s)$$

を意味し、この右辺を通分すれば、分子の次数が分母の次数より小さい有理関数となる。

6 最後に

本稿では、[1] で紹介されているラプラス逆変換の留数による計算法に別の説明を与え、その計算の具体例をいくつか紹介し、最後にそれが適用できる範囲を示した。

こういう話は、他の工学的な本ではあまり見ることがないので、本稿もそれなりに意味があるだろうと思うが、具体例を見ると留数計算の方が優位なのは、実数の 1 位の極のみを持つ場合にほぼ限定されそうなことが少し残念であった。このことからすると、留数計算をラプラス逆変換の計算に利用しようと思う人はそんなに出てこない気がする。

参考文献

[1] 矢野健太郎、石原繁「基礎解析学 改訂版」裳華房 (1993)

[2] 竹野茂治、「$t\sin t$ のラプラス変換」(2008)
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/appla/data/laplace1.pdf`

[3] 竹野茂治、「有理関数のラプラス逆変換」(2008)
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/appla/data/laplace2.pdf`