2018 年 11 月 24 日

数学に関する質問とその背景の数学

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

はじめに

普段、学生から数学の講義などに関して質問を受けたり、あるいはメール等で企業や一般の方から数学に関して聞かれたりすることがある。

その中には、一見やさしそうで実はかなり難しい問題だったり、調べてみると歴史的に面白い経緯をたどっていたりするものなどがある。

今回は、私が実際に質問をうけたもののうちの 4 つを取り上げ、その歴史的経緯や、問題の背景に広がる数学などについて解説する。

目 次

1 第 1 話: ベクトルの内積、外積

1.1 質問

ベクトルには、以下の 2 種類の「積」がある。

- **内積**: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ (高校: 数学 B など)
- **外積**: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ (大学等: 線形代数、ベクトル解析など)

これに関して、学生、あるいは教員から以下のような質問を受けたことがある。

- Q1. 内積、外積は誰が考えたのか、その経緯は。
- Q2. 内積、外積の「内」「外」はどういう意味か。

これらの質問については、特に外積が高校レベルを越える内容のせいか、一般向けの数学の解説書などでも取り上げられることは少なく、解答を見つけることも容易ではない。

しかし調べてみると、意外にもこれは「ベクトル」そのものの誕生とも関連する話であり、その経緯なども含めてここに紹介する。

1.2 内積と外積

高校で扱う 2 次元、3 次元のベクトル (平面ベクトル、空間ベクトル) は、

$$\text{ベクトル} = \text{線分に長さと方向を合わせたもの} \tag{1}$$

という図形的概念と、

$$\overrightarrow{a} = (a_1, a_2) \ \ (\text{平面}), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \ \ (\text{空間}) \tag{2}$$

のように、成分表示によって複数の実数を一つにまとめて考える、という 2 つの概念を持つ。ベクトルの内積、外積にも、それぞれ図形的な意味合いと、成分表記の 2 つの表現がある。

2 つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の **内積** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は、以下のようなものである。

$$\text{図形的表現:} \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta \tag{3}$$

$$\text{成分表記:} \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{4}$$

ここで、θ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ との間の角 $(0 \leq \theta \leq \pi)$ で、(4) の方は、平面ベクトルの場合は a_3b_3 の項はない。

一方、ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の **外積** $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は、通常 3 次元の空間ベクトルのみについて考えるもので、その結果は以下のような空間ベクトルになる。

$$\text{図形的表現:} \begin{cases} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \text{ の長さ} & = \quad \overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ の作る平行四辺形の面積} \\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \text{ の方向} & = \quad \overrightarrow{a} \text{ にも } \overrightarrow{b} \text{ にも垂直} \\ & \quad (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \text{ が右手系となるよう}) \end{cases} \tag{5}$$

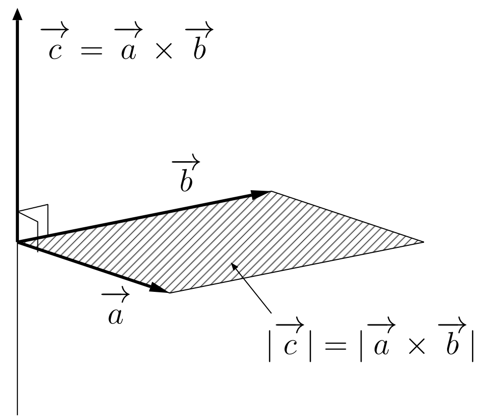

図 1: 3 次元ベクトルの外積

$$\text{成分表記:} \quad \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{6}$$

内積と外積は「積」という名前がついている通り、実数の積と同様の分配法則は成り立つ。表 1 に、内積と外積の性質を比較して紹介する。

項目	内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$	外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
別名	ドット積、スカラー積	クロス積、ベクトル積
値	スカラー (実数)	ベクトル (空間ベクトル)
次元	2, 3 (, 4, . . .)	通常 3 次元のみ
交換法則	成立	$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ (逆向き)
分配法則	成立	成立
ゼロになるとき	$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$
応用	正射影、成分計算等	電磁気学、流体力学等

表 1: 内積と外積

1.3 複素数

平面ベクトルという考え方がまだないころ、それに代わって座標を一つの組として扱う道具として複素数があった。**複素数** $z = a + bi$ (a, b は実数, $i = \sqrt{-1}$) と、平面上の点 (a, b) を対応させると、平面上の点を一つの複素数として扱える。これを複素数平面と呼ぶ (図 2)。

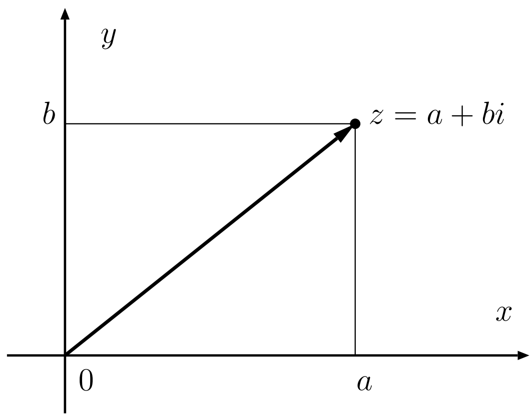

図 2: 複素数平面

複素数 $z = a + bi$, $w = c + di$ の和は、

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

となるので、これは複素数平面上では、(a, b) と (c, d) の和が $(a + c, b + d)$ になること

に対応し、現在の平面ベクトルの和

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

と同じものになっている (図 3)。

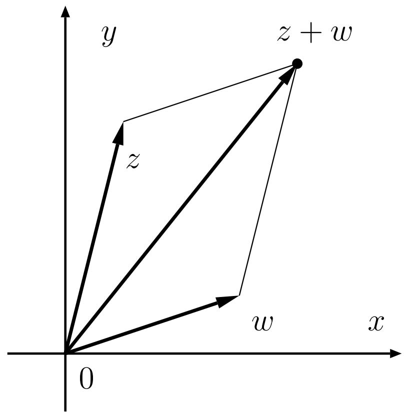

図 3: 複素数の和

複素数 $z=a+bi$ の長さ $|z|$ も $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ と定義されるので、今で言う平面ベクトルの長さと同じになっていて、現在の平面ベクトルをそのまま複素数に置き換えることができ、その有用性が複素数計算で得られることが知られていた。現在でも、電気回路などの分野では複素数をベクトルの代わりによく使っている。

1.4 ハミルトンの四元数

アイルランドの数学者ハミルトン (W.Hamilton 1805–1865) は、前節の考え方を拡張し、複素数の次元を増やすことでそれを 3 次元の幾何や運動の記述に用いようと考えた。

彼は最初 $z=a+bi+cj$ のような形の「数」で新しい数の世界を構築することを考えたがそれはうまくいかず、さらに一つ増やして $z=a+bi+cj+dk$ のようにすればうまくいくことを発見し、それを「四元数」として発表した (1853 年, “Lectures on

Quaternions")。

$$
\begin{aligned}
&z = a + bi + cj + dk \ \ \text{(a,b,c,dは実数)} \\
&\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k,\ \ jk = i,\ \ ki = j \\ ji = -k,\ \ kj = -i,\ \ ik = -j \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}
$$

この計算規則からもわかるように、この四元数の世界では交換法則は成り立たないが、これにより複素数を含む、より広い新しい数の世界が構築できることを示した。

ハミルトンは、この四元数 $z = a + bi + cj + dk$ を実数部分 a と虚数部分 $bi + cj + dk$ に分け、前者を z の **スカラー** 部分 (Sz) と呼び、後者を z の **ベクトル** 部分 (Vz) と呼んだ。これが、「ベクトル」という用語の始まりである。

「スカラー」とは元々ラテン語の scalae (はしごの段) から来ていて、実数が 1 列に順に並んでいることを表しているらしく、また「ベクトル」は vector (運ぶ者) という言葉で、ある点からある点への移動を表すものとして使ったらしい。

ハミルトンは、このベクトル部分、すなわちスカラー部分が 0 の四元数を 3 次元の幾何を記述するのに用いようとした。そのため、ベクトル同士の積を計算し、そこから「スカラー積」と「ベクトル積」を見出した。$z = 0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $w = 0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ に対して、これらの積、すなわちベクトル部分同士の積は、(7) と分配法則を用いれば、

$$
\begin{aligned}
zw &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\
&= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k
\end{aligned}
$$

となり、よってこの積のスカラー部分とベクトル部分は

$$
\begin{cases} S(zw) &= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ V(zw) &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k \end{cases} \tag{8}
$$

となるが、このスカラー部分 $S(zw)$ の (-1) 倍は内積の成分計算の式 (4) に等しく、ベクトル部分 $V(zw)$ は外積の成分表現 (6) に対応することがわかる。

これにより、現在ベクトルの内積、外積として表現できるものが、四元数を用いて表現できることになる。そのような方法を 3 次元の幾何学、あるいは物理学に応用し、テイト (P.G.Tait 1831–1901 英)、マクスウェル (J.C.Maxwell 1831–1879 英) らと共同で色々な結果を導きだしていった。彼等はのちに「四元数派」と呼ばれた。

しかし、四元数派の式の処理はかなり複雑で、なじみのない研究者には取り扱いが難しかったため、それを簡便化しようという動きもあらわれた。ギブス (J.W.Gibbs 1839–1903 米)、ヘビサイド (O.Heaviside 1850–1925 英) らは四元数の計算の内積、外積の便利な式のみを取り出し、それらを 3 次元の座標の組に対する 2 種類の「積」(スカラー積、ベクトル積) という演算規則であると定めて、それらを現在用いられる積記号 $\cdot$, $\times$ で表し、3 次元の物理法則を四元数派の記法から現代流の記法に書き直した。彼等は「ベクトル派」と呼ばれた。

記号がなじみやすいものだったことや、数式がやさしくなることなどもあるため、結局は新しく作られた概念であるベクトル派のベクトルが四元数に代わって現在は使われているのであるが、3 次元のベクトル解析では今でも四元数派のベクトルのなごりとして、3 次元ベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を、

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}$$

のように書き表す習慣が残っている。この場合、$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は、それぞれ

$$\overrightarrow{i} = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{j} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$$

という、x 軸、y 軸、z 軸方向の長さが 1 のベクトル (単位ベクトル) を意味することになる。

なお、「四元数」自体はしばらくほとんど利用されていなかったが、複素数が平面の回転を積で記述できるのと同様、四元数は空間の回転を積で易しく表現できる点が評価され、物理学や CG (コンピュータグラフィックス) などで使われるようになった。現在は、例えば人工衛星の姿勢制御にも使われているそうであるが、他にもいくつかの場面で応用されているようである。

1.5 グラスマンのベクトル

ハミルトンとほぼ同時期に、別の観点でベクトルのようなものを考えたグラスマンという学者がいる。ポーランドの高校の数学教師であったグラスマン (H.Grassmann 1809–1877) は、余暇に電流、色彩学、音声学、サンスクリット語なども研究し、数学の成果も残している。

彼は幾何学の手法を高次元に抽象的に拡張することを考えていた。しかし、彼が最初に発表したもの（1844 年「線形延長論」）は抽象的すぎて、一般に広まることはなかったらしい。

その中で、彼はベクトルの考え方を提示し、その「内積」(最初は線形積と呼んでいた)、および「外積」(最初は幾何積と呼んでいた) を定義している。ベクトルの内積 (inner product)、外積 (outer product) の用語は、実はこのグラスマンに由来する用語である。ただし、グラスマンの外積は、現在我々が用いている 1.2 節の外積とは少し意味が違うもののようである。

グラスマンは、内積を $\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$、外積を $[\boldsymbol{ab}]$ のように書き表しているが、後者の記号は現在もベクトル解析で三重積を表す場合に用いられることがある。

グラスマンの内積、外積は、2 次元のベクトル $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ で言えば、

$$\text{内積}=a_1b_1+a_2b_2,\quad \text{外積}=a_1b_2-a_2b_1 \tag{9}$$

のようなものに相当する。この内積は現在の 2 次元ベクトルの内積と同じものだが、外積の方は 2 つのベクトルが作る平行四辺形の面積 (に符号をつけたもの) に相当する。これらは次のように図形的に解釈できる (図 4):

> $\overrightarrow{a}$ の長さを A とし、$\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{a}$ に平行な成分と垂直な成分 (それぞれ長さを B_1, B_2 とする) に分け、A と B_1, B_2 との積をつくると、これらはそれぞれ
>
> $$AB_1=|a_1b_1+a_2b_2|,\quad AB_2=|a_1b_2-a_2b_1| \tag{10}$$
>
> となり、すなわちそれぞれグラスマンの内積、外積の絶対値に等しい。

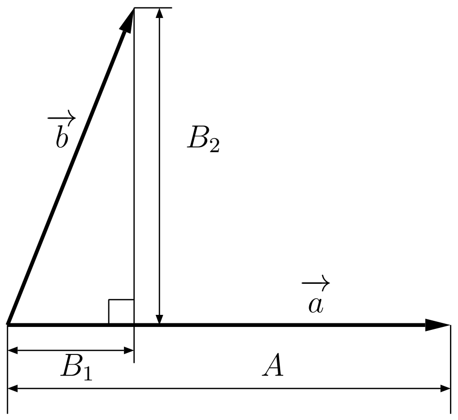

図 4: グラスマンの内積・外積

グラスマンは逆にそれらの積に適当に符号をつける (絶対値を外す) ことで、それらが積の性質を持つことに気がつき、それらを「内積」「外積」と名付けたわけである。そ

して、この「内」「外」がどこから来ているのかという理由もここにあり、グラスマンは、以下のように述べている:

> 「内積の値は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直ならば 0 で、その値が正になるためには、$\overrightarrow{b}$ が少し $\overrightarrow{a}$ の『内側』の方に入らないといけないから、これを『内積』と呼ぶ。」

ここからすれば「外積」も同様だろう。すなわち、

> 「外積は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば 0 で、その値が正になるためには $\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{a}$ の方向の『外』に出なければいけないから」

という理由だと思われる。

2 第 2 話: e と自然対数

2.1 質問

微積分でよく使われる定数に

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284590\ldots \tag{11}$$

という無理数がある。円周率 π と同じくらい高等数学では重要な定数なのであるが、上の定義のように極限を使わなければ定義できず、円周率のように簡単に説明できるものではないので、やはり一般向けの書物ではあまり紹介されることはない。

この e は、「ネピア数」「自然対数の底」と呼ばれることもあるが、普通は単に「イー」とだけ呼ばれていて、微積分を習うとすぐに出てきて、その後も微積分に関係する色々な場面で使われるものである。

この e に関しても、学生、あるいは教員から以下のような質問を受けたことがある。

- Q1. e はどこからでてきたのか、なぜ「e」と名付けられたのか。
- Q2. なぜ底が e の対数 $\log_e x$ を「自然対数」と呼ぶのか。

個人的には、教科書では e は自然対数よりも先に出てくるのに「自然対数の底」と呼ばれることに昔から疑問を感じていたが、調べてみると e は対数の誕生そのものと深い関係があることや、教科書の順と歴史的な順番とに違いがあることなどがわかったので、質問の内容そのものとは少し離れるところもあるが、対数の誕生の話などからここで紹介していきたい。

2.2 e にまつわる公式

まず、高等数学に現れる e にまつわる公式の一部をまとめて紹介する。

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$ 特に、$e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots$

2. $(e^x)' = e^x, \quad (\log_e x)' = \dfrac{1}{x}$
3. オイラーの公式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $(i = \sqrt{-1})$、特に $e^{i\pi} = -1$
4. スターリングの公式: $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}(1 + \varepsilon_n), \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$
5. ラプラス変換: $\mathcal{L}[f](s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
6. フーリエ変換: $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-i\xi x} f(x) dx$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
8. ポアソン分布の確率関数: $P(n; \lambda) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$
9. 正規分布の密度関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
10. 定数係数線形微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解は $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$
(α, β は、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の根、A, B は任意定数)
11. 懸垂線の方程式: $y = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$

2.3 積の計算

次に、対数の発見の歴史を順に紹介していく。

15, 16 世紀、天文学や大航海時代の座標計算の要請で、精度の高い計算が必要とされた時代があった。7 桁、8 桁の筆算の計算は、和や差ならば 1 行で計算が済むが、積、商、あるいは平方根の計算となると、必要となる桁の数だけの計算列が必要となり、それだけ和や差に比べて時間がかかる。当時はそのために計算職人がいたほどであった。対数表の発見 (発明) は、この積や商の計算を和や差で済ませる、現在の電卓に相当する大発見だった。

対数が見つかる前に三角関数はすでに知られていて、半角の公式や加法定理などによって、当時から精度の高い三角関数表は作られていた。天文学者ウェルナー (J.Werner 1468–1522 独) などは、その精度の高い三角関数表を用いて、積 (商) の計算を簡単に行う方法を見つけていた。

彼の方法は、cos に関する公式 (積→和の公式と呼ばれる)

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} \tag{12}$$

を用いる「ような」方法であった。例えば、$x = 1.234567$ と $y = 3.141592$ の積を求めるのに以下のようにする。

1. x, y を 0.1 倍することで、1 以下の値にして、

   $$0.1234567 = \cos A, \quad 0.3141592 = \cos B$$

   となるような角度 A, B を三角関数表から求める:

   $$A = 82°54'30''(= 82.90836°), \quad B = 71°41'24''(= 71.68994°)$$

2. $A + B$ と $A - B$ を計算 (筆算 2 回)

   $$A + B = 154°35'54''(= 154.5983°), \quad A - B = 11°13'06''(= 11.21842°)$$

3. $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$ の値を、三角関数表から求める:

   $$\begin{array}{lll} \cos(A+B) & = \cos 154°35'54'' & = -0.9033228, \\ \cos(A-B) & = \cos 11°13'06'' & = 0.9808930 \end{array}$$

4. この平均を求める (筆算 2 回):

   $$-0.9033228 + 0.9808930 = 0.0775702, \quad 0.0775702 \div 2 = 0.0387851$$

5. 1. で 0.1×0.1 倍した分を元に戻して 100 倍すると $xy = 3.87851$ が得られる (正確な値は $3.8785058\ldots$)。

この方法であれば、何桁の積であっても、それに対応する三角関数表があれば、桁数に関係なく 3 回の和と差、および 1 回の 2 での割り算で計算できることになり、筆算よりもある程度早く計算できることになる。

2.4 対数の発見

対数の考え方は、歴史的には、天文学者でもあったシュティフェル (M.Stifel 1486–1567 独) という僧侶の著書の中に現れているそうである。彼は著書の中で表 2 のような表を示しているが、この表では、上の行は公差 1 の等差数列、下の行は公比 2 の等比数列になっている。そのため、下の行の数同士の積や商は、上の行の数同士の和や差に対応する。

等差数列 (y)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
等比数列 ($x=2^y$)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

表 2: 2 のベキの表

つまり、少なくともこの表の下の行にある数同士ならば、積や商が和や差で簡単に計算できることになるので、下の行の数字のすきまを埋めるような表を作ることができれば、多くの数が和や差で簡単に計算できることになる。

このシュティフェルの表では公比が 2 なので、そのすきまを埋めることは容易ではないが、公比として 1 に近い値を選べば下の行のすきまが少ない表を作ることができる。

$$1.01,\ 1.01^2=1.0201,\ 1.01^3=1.030301,\ \ldots$$

そのことに気がついた数学者ネピア (J.Napier 1550–1617 英) は、$a=1-1/10^7=0.9999999$ に対する $x=a^y$ の表を作成し、世界初の対数表を発表した (1614 年「驚くべき対数法則の集成」)。「対数」(logarithm) という名前も彼の発明によるものであり、ラテン語の logos (言葉) と arithmos (数) を結合した言葉であると言われている。

また、ほぼ同時期のスイスの時計職人でもあり天文学者でもあったビュルギ (J.Bürgi 1552–1632) は、$a=1+1/10^4=1.0001$ に対する $x=a^y$ の表を作成して発表している (1620 年「算術および幾何級数表」) が、実際に作成されたのは 1603 年から 1611 年ころであることから、ネピアとは全く独立の結果であることが知られている。

さらに、ブリッグス (H.Briggs 1556–1630 英) は、ネピアの仕事に感銘を受け、彼とともにネピアの対数表を底が 10 の対数表、すなわち常用対数の表に作り直していった。底 a が 10 の常用対数表は 10 進法の計算では便利だったため、このブリッグスの対数表が最終的には一気に広まっていくこととなった。1617 年には 8 桁の対数表が、1624

年には 14 桁の対数表 (「対数算術」) が作成された。当時、この対数表は、「天文学者の寿命を 2 倍に伸ばした」と評される大発明であった。

さらに対数表は、ガンター (E.Gunter 1581–1626 英)、オートレッド (W.Oughtred 1574–1660 英) らによって「計算尺」の発明へとつながり、重い対数表を持ち歩かなくても、簡易に技術者が正確な計算ができる時代に移行していく。

2.5 ネピアの対数と e の関係

ここで、最初に作成されたネピア、ビュルギの対数と e との関係について考える。

まず、彼等の対数表の作成法を説明する。δ が 0 に近いとし、底 a を $a = 1 + \delta$ と書く (ネピアの場合は $\delta = -1/10^7$、ビュルギの場合は $\delta = 1/10^4$)。

ある y まで $x = a^y = (1+\delta)^y$ の値が計算できたとして、その次の $\bar{y} = y + 1$ に対する x の値 $\bar{x}$ を求めるには、

$$\bar{x} = (1+\delta)^{\bar{y}} = x + \delta x \tag{13}$$

となるので、例えばビュルギの $\delta = 1/10^4$ の場合、x の値と x を 4 桁ずらした値を筆算で加えれば $\bar{x}$ の値が求まることになる。同様に、ネピアの $\delta = -1/10^7$ の場合、7 桁ずらして引き算すればいいわけである。基本的にはこれを繰返していけば単純な和、差の計算によって表が作成できることになる。

さて、e の定義は (11) で示した通りであるが、実は次の性質も知られていることをまず注意しておく:

$$e = \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} \tag{14}$$

ビュルギの対数は、

$$x = \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y = \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4\times y/10^4} = \left\{\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right\}^{y/10^4}$$

という x と y の関係の表であり、一方ネピアの対数は、

$$x = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{-10^7\times(-y/10^7)} = \left\{\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{-10^7}\right\}^{-y/10^7}$$

という関係なのであるが、この両者のかっこの中にある数は、(14) からもわかる通り、

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2.718146\ldots \doteqdot e, \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{-10^7} = 2.7182812\ldots \doteqdot e$$

と、いずれも e に近い値になっている。すなわち、x から y を見れば、ビュルギはほぼ $y = 10^4 \log_e x$、ネピアはほぼ $y = -10^7 \log_e x$ の表を作っていたことに相当し、すなわち底が e の対数、すなわち自然対数の表を作っていたことになる。

2.6 自然対数と e の由来

ほぼ自然対数に近いものがネピア、ビュルギによって得られたことは前節で見たとおりであるが、実際に「自然対数」という用語が導入されたのはデンマークの数学者メルカトル (N.Mercator 1600–1687) によってである。なおこれは、世界地図の「メルカトル図法」で知られるベルギーの地理学者のメルカトル (G.Mercator 1512–1594) とは別人である。

彼は、$1/x$ という関数のグラフの下にできる面積の研究を行い、それにより

$$F(x) = \ 1/x \text{ のグラフの下の } 1 \text{ から } x \text{ までの範囲の面積} \quad \left(= \int_1^x \frac{1}{x}dx\right) \tag{15}$$

によって対数が定義できることを発見し、これを「双曲線対数」、そして後に「自然対数」と呼んだ。厳密な意味での自然対数が定義されたのもこれが初めてのようである。

メルカトルがこの対数をなぜ「自然」と名付けたのかまでは調べることはできなかったが、経緯からして、簡単なグラフの面積として得られること、また綺麗な級数展開式も見つかったことなどがその理由として想像される。

一方、「e」の由来の方は、円周率の π や虚数単位の i と同じく大数学者オイラー (L.Euler 1707–1783 スイス) が広めた記法である。e に関してオイラーは、オイラーの公式 (2.2

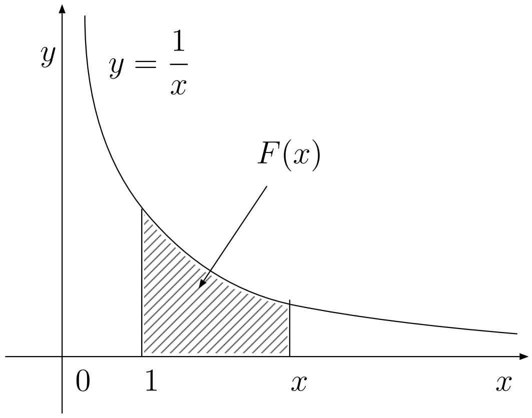

図 5: メルカトルの自然対数 $F(x)$

節参照) を含め非常に多くの発見をしているが、例えば、現在の形で「指数関数」を定義しているのは彼であり、対数関数は指数関数の逆関数として定義できる、としたのも彼であるらしい。それ以前は、指数関数は「指数による関数」という考え方ではなく、むしろ今の逆で対数関数の逆関数としてとらえられていたらしい。

「e」としてアルファベット e を用いた理由については、現在以下の 2 つの説が広く流布している。

1. オイラーの名前の頭文字から取った
2. 指数 = exponential の先頭の文字

前者はいくつかの本にも載っているし、昔からそういう話はあるようであるが、逆にそれを否定する話も多く、以下のようないくつかの理由から前者だとは考えにくい。

- オイラーは、π や i にも意味を考えて当てているが、そこからすると 2. の方が自然。
- 他人が「オイラーにちなんで」とつけるのなら自然だが、本人が自分の名にちなむ、というのはかなり不自然だし、オイラーの謙虚な人柄にも合わない。
- オイラーは数式の書き方において、一般的な定数名には a,b,c,... を使い、変数名には x,y,z,... を使うべき、のように言っている。同時代のラプラス (P.S.Laplace 1749–1827 仏) は c を使ったりしているし、オイラー自身も a を使っていたころがあるようだが、それらは一般定数と紛らわしい、と考えて、そこから少し外れたものとして e を選んだ、ということも自然に思える。

3 第 3 話: 斜円錐の側面積

3.1 質問

ある企業の知人から、頂点が底面の中心の真上からずれている斜円錐の側面積について聞かれたことがある。彼は、その問題はそれほど難しくないだろうと考えていたようであったが、数学者にはこれは一見してかなり難しそうな問題に感じる。今度はその問題について紹介する。

元の問題は以下の通り。

- Q1. 円 (半径 r) の円周上のある点の真上 (高さ h) に頂点があるような斜円錐 (図 6) の側面積 S は、底面の円の中心の真上に頂点がある場合 (直円錐) の側面積に対する公式

$$S = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} \tag{16}$$

で求めて構わないか。

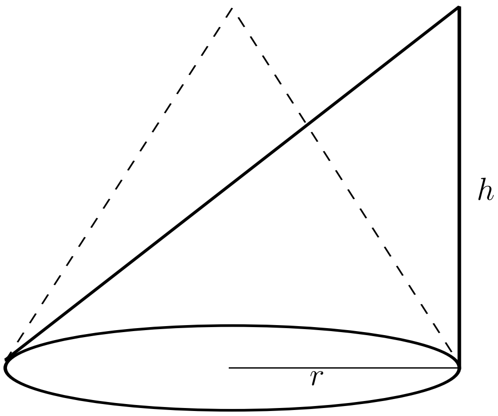

図 6: 直円錐と斜円錐

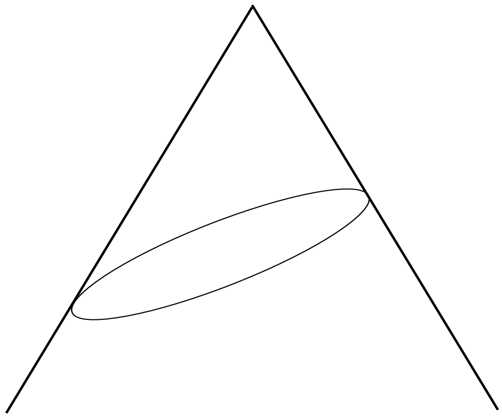

図 7: 直円錐を斜めに切りとる

この問題の出所は、このような斜円錐の形状の製品があり、その表面の塗装にはどれくらいの塗料が必要か、という話のようであった。

なお、この斜円錐は直円錐を斜めに切りとったものではないことに注意する (図 7)。直円錐を斜めに切りとると、その底面は楕円になってしまうからである。その場合は問題の質はかなり変わってしまう。

3.2 問題の難しさ

数学者がこの斜円錐の側面積の問題が難しいと感じるのは、これが楕円積分の話を思い出させるからである。

楕円積分 とは、楕円の周の長さを表す積分公式のことであり、楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a \geq b > 0)$ の周の長さ L は以下の式で与えられることが知られている。

$$L = 4a \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx \quad \left(k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right) \tag{17}$$

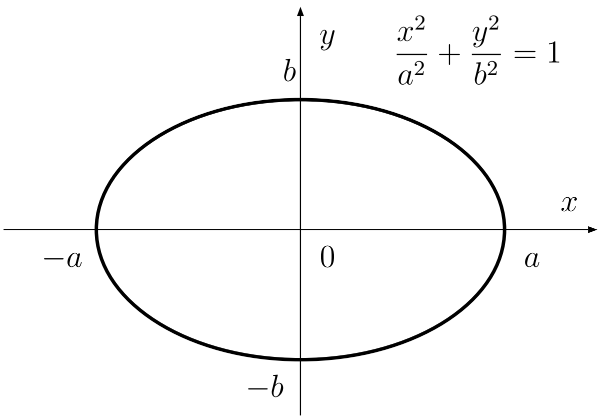

図 8: 楕円

分類上、この積分は現在 **第 2 種 (完全) 楕円積分** と呼ばれているが、「楕円積分」という名前は、もちろんこの積分が楕円の周の長さを求めるときに出てくることに由来する。

楕円の面積は、円の面積と同様 πab のように簡単に求められるのに対し、楕円の周の長さ L を表す積分 (17) は、$a = b$ の円の場合以外は簡単な関数では答を表せないことが知られている。面積はやさしくても周の長さを求めるのはやさしくはないことになる。

斜円錐の問題も、体積を求めるのは直円錐と同じで (底面積)×(高さ)/3 でよいが、側面の方は直円錐とは違ってゆがんでいるので、楕円の周と同じようにややこしい状況になっているだろうと想像するわけである。

例えば、円錐の側面積を求めるには、その展開図を書き、弧長から中心角を求めることでその扇形の面積を求めるのが普通であろう (図 9)。

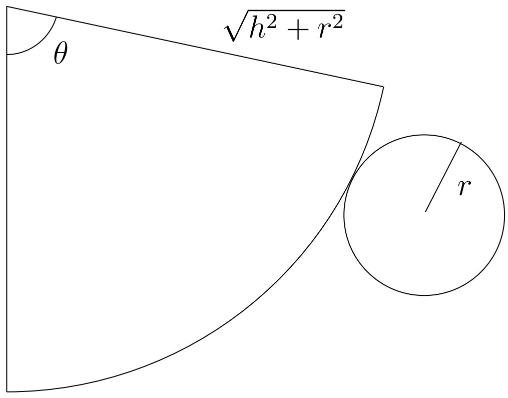

図 9: 直円錐の展開図

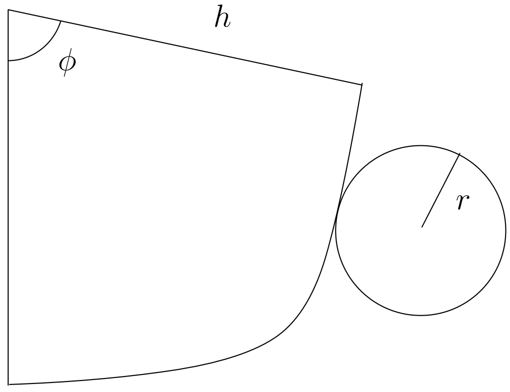

図 10: 斜円錐の展開図 (正確ではない)

しかし、斜円錐の側面は、ちゃんと平面に展開はできるものの、その展開図から側面積を求めるのはやさしくはない。その形は扇形ではないし、中心角 ϕ すら簡単には求まらない (図 10)。

なお、斜円「柱」の側面積も簡単そうであまり簡単ではない (図 11)。斜柱になっている

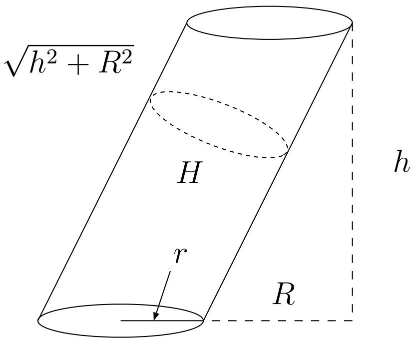

図 11: 斜円柱

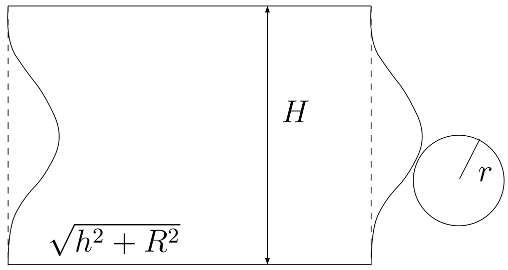

図 12: 斜円柱の展開図

分、側面の展開図の端には凹凸があるが、底面と天井面の凹凸の形状は同じ (母線の長さが一定) なので、丁度それを埋めることができ、側面の面積は底辺が $L=\sqrt{h^2+R^2}$ の長方形の面積と同じものと見ることができる (図 12)。しかし、問題はその高さ H の方で、底面の円の円周 $2\pi r$ は、この H に等しいのではなく、凹凸部分の曲線の長さに等しく、H の方は母線に垂直な面による切り口の周囲長に等しくなるが、その切り口は楕円なので H は楕円の周の長さとなり、結局簡単な式では表せないことになるわけである。

3.3　積分表現

展開図を使って斜円錐の側面積を求める式を作るのは難しいが、他の方法を使って式で表すことは可能である。例えば、側面の 3 次元的な曲面を数式で表し、曲面積を求める公式を利用する方法や、区分求積を用いて考える方法などがある。

詳細は省くが、斜円錐の側面積 S は以下のような積分による数式で表される。

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{h^2r^2+(r^2\cos\theta-r^2)^2}\,d\theta = r^2\int_0^{\pi}\sqrt{H+(1-\cos\theta)^2}\,d\theta \quad (H = h^2/r^2 > 0) \tag{18}$$

この式 (18) は一見するとそれほど難しくはなさそうに見えるかもしれないが、この積分も簡単ではない。

実際に式変形を行うと、この積分は 3 種類の楕円積分の標準形を用いて表せる。それらは簡単な関数では表すことができないことが知られているので、これによりこの積分 (18) も簡単な関数では表すことができないことになる。

3.4　数値計算

側面積 (18) は簡単な関数では表せないが、コンピュータを使えば H の各値に対して近似値を求めることは可能であり、そして当初の目的、すなわち、(18) と、直円錐の側面積 (16):

$$\pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r^2\sqrt{1+H} \tag{19}$$

にどれくらい違いがあるかも調べることができる。

そのため、(18) と (19) の比

$$\frac{(18)}{(19)} = \frac{r^2\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{H+(1-\cos\theta)^2}\,d\theta}{\pi r^2\sqrt{1+H}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1+H}}\int_0^{\pi}\sqrt{H+(1-\cos\theta)^2}\,d\theta$$

を H の関数と見て $F(H)$ とし、この値と 1 とのずれの大きさをコンピュータで調べた。

まず、数値計算を行う前にあらかじめ微分などによって、

- $H < 1/2$ では $F(H)$ は増加
- $H > 1$ では $F(H)$ は減少
- $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

であることはわかっていたが、これによりずれが一番大きいところ、すなわち $F(x)$ の 1 から一番離れた値は $1/2 \le H \le 1$ の範囲にあることがわかるので、この範囲での数値計算を行なった。ちなみに、元の質問者が必要としていたのは高さと半径の比が $2 \le h/r \le 4$ のような範囲で、よって $4 \le H \le 16$ なので、その間の $F(H)$ の最大値は $F(4)$ で、その範囲では $H = 4$ で一番ずれが大きくなることがわかる

数値計算した結果の $F(H)$ のグラフは図 13 の通り。

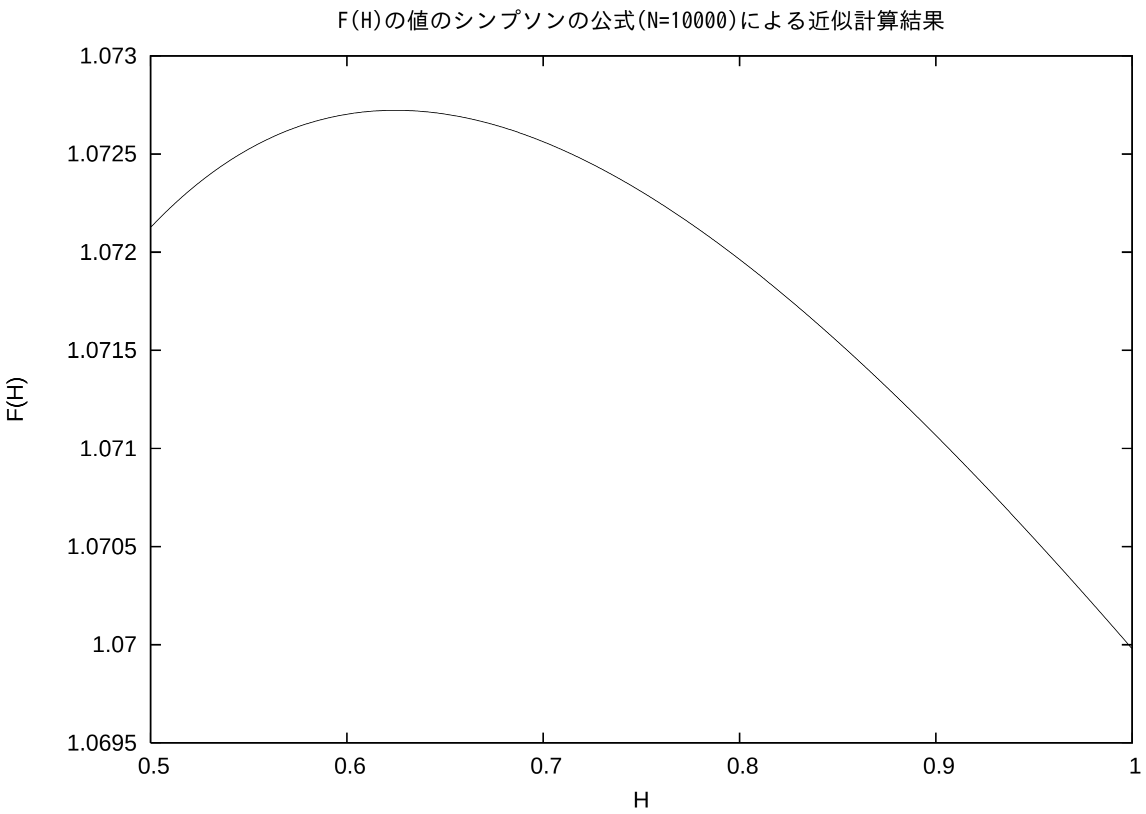

図 13: $F(H)$ の $1/2 \le H \le 1$ のグラフ

このグラフを含む数値計算等から、結局以下のことがわかる。

- $F(H)$ は $0 < H < 0.6245$ では増加で、$0.6245 < H$ では減少
- $H > 0$ では $F(H) > 1$ (よって (18)>(19)) で、最大値は $F(0.6245) = 1.0727$
- $H = 0.6245$ のときは高さと半径の比は $h/r = 0.7903$
- $F(4) = 1.0399$

このことから、(18) が (19) とは違うといっても 1.07 倍程度であり、$2 \leq h/r \leq 4$ の場合は 1.04 倍程度だということがわかる。

なお、この値を元の質問者に報告したところ、それくらいの違いであれば、他の要因のためにも多少余裕を見ているので、全く問題ないという話であった。

4 第 4 話: 懸垂線の長さ

4.1 質問

これは、以前この講習会で質問されたものであるが、懸垂線に関する質問を 2 名の高校の先生から聞いた。その質問は以下のような話であった。

- Q1. 懸垂線の式を、支えとなる 2 点の位置と、ひもの長さ L でちゃんと表すことができるか。

これは、「懸垂線が cosh で表されることは知っているが、そこに現れるパラメータを、すべてその与えた条件で決定することができるか」という話のようで、よくよく聞いてみると、それはどうやら、

- Q2. 実際に計算してみると、そのパラメータを決定する方程式は解くのが難しそうな方程式になるが、これはちゃんと解けるのか。
- Q3. それが解けない場合、例えば電線工事のように、数値としてそれらを必要とする人はどうしたらいいのか。

という質問であることがわかった。実際に工事関係の方からそのような話を聞いた、という方もおられた。

この計算自体はそれほど難しいものではないが、この講習会で出た質問でもあるので、ここで紹介したいと思う。

4.2 問題の定式化

懸垂線の方程式は、一般に以下のようになる。

$$y = \frac{1}{k}\cosh(kx+a)+b \quad \left(k=\frac{\rho g}{\alpha}\right) \tag{20}$$

ここで、$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ であり、a, b は位置などによって決まる定数、$\rho\,(>0)$ はひもの線密度、$g\,(>0)$ は重力加速度、$\alpha\,(>0)$ はひもにかかる張力の x 成分で、これも場所によらず定数となる (この式の導出については例えば [15])。

この α は定数であるが、実際にはひもを張った張り具合によって変わるので、事前に知ることは無理で、これも位置とひもの長さ、および ρ によって決まる値となる。

ここでは、この (20) のパラメータ a, b, k を以下の条件の下で求めることができるか、という問題を考える。

- [ア] (20) は 2 点 $(x, y) = (0, 0)$ と (A, H) を通る $(A > 0, H \geq 0)$
- [イ] その 2 点間のひもの曲線長は L $(L > \sqrt{A^2 + H^2})$

例えば、山中の送電線などを考えれば、支える 2 点は必ずしも水平位置にあるとは限らないので、ここでは $H = 0$ とは仮定せずに計算することにする。また、実際の電線では、電線の「のび」も考慮する必要があるだろうが、ここでは「のび」は無視して考える。

4.3 パラメータの満たすべき方程式

まずは、位置の条件 [ア] を (20) に代入する。$(x, y) = (0, 0)$ を代入すると、

$$0 = \frac{1}{k}\cosh a + b$$

より $b = -\cosh a/k$ となるから、(20) は

$$y = \frac{1}{k}\cosh(kx + a) - \frac{1}{k}\cosh a \tag{21}$$

と表されることになる。この式 (21) に $(x, y) = (A, H)$ を代入すると

$$\cosh(kA + a) - \cosh a = kH \tag{22}$$

が得られる。

次に条件 [イ] であるが、曲線の長さは

$$L = \int_0^A \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \tag{23}$$

で得られるが、(21) より

$$\sqrt{1+(y')^2}\ =\ \sqrt{1+\sinh^2(kx+a)}\ =\ \sqrt{\cosh^2(kx+a)}\ =\ \cosh(kx+a)$$

となるので、

$$\int_0^A \cosh(kx+a)\,dx\ =\ \left[\frac{1}{k}\sinh(kx+a)\right]_{x=0}^{x=A}\ =\ \frac{1}{k}\sinh(kA+a)-\frac{1}{k}\sinh a$$

となり、よって [イ] は、

$$\sinh(kA+a)-\sinh a = kL \tag{24}$$

となる。この 2 つの条件 (22), (24) から 2 つのパラメータ k と a を決めることが目標となる。

4.4 パラメータの決定

式変形を行うために、以後、

$$\frac{k}{2}=\bar{k},\quad a=\bar{a}-\frac{Ak}{2}=\bar{a}-\bar{k}A \tag{25}$$

と書いて、k, a の代わりに $\bar{k}$, $\bar{a}$ を決定することを考えることにする。

(25) より $kA+a=\bar{a}+\bar{k}A$ となるので、cosh, sinh の加法定理 (cf. [15]) により、(22), (24) の左辺は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\cosh(kA+a)-\cosh a\ &=\ \cosh(\bar{a}+\bar{k}A)-\cosh(\bar{a}-\bar{k}A)\ =\ 2\sinh\bar{a}\sinh\bar{k}A,\\ \sinh(kA+a)-\sinh a\ &=\ \sinh(\bar{a}+\bar{k}A)-\sinh(\bar{a}-\bar{k}A)\ =\ 2\cosh\bar{a}\sinh\bar{k}A\end{aligned}$$

よって、(22), (24) は

$$\sinh\bar{a}\sinh\bar{k}A=\bar{k}H,\quad \cosh\bar{a}\sinh\bar{k}A=\bar{k}L \tag{26}$$

と書ける。この (26) の両者の比を取れば、

$$\tanh \bar{a} = \frac{H}{L} \tag{27}$$

となるので、$\bar{a}$ は

$$\bar{a} = \operatorname{arctanh}\left(\frac{H}{L}\right) \tag{28}$$

と表されることになる。ここで、$x = \operatorname{arctanh} y$ は、$y = \tanh x$ の逆関数 (cf. [15])。

また、$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ なので、(26) の自乗の差を考えれば

$$\sinh^2 \bar{k}A = \bar{k}^2(L^2 - H^2)$$

となり、よって $\bar{k} > 0,\ A > 0$ より

$$\sinh \bar{k}A = \bar{k}\sqrt{L^2 - H^2}$$

となる。この両辺を $\bar{k}A$ で割れば

$$\frac{\sinh \bar{k}A}{\bar{k}A} = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{A} \tag{29}$$

が得られる。ここで、$L > \sqrt{A^2 + H^2}$ なので $L^2 - H^2 > A^2$ だからこの式の右辺は 1 より大きいことに注意する。

今、関数 $f_0(y)$ を

$$x = f_0(y) = \frac{\sinh y}{y}$$

とすると、(29) は

$$f_0(\bar{k}A) = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{A}$$

となるので、この $x=f_0(y)$ の逆関数 $y=f_0^{-1}(x)$ により $\bar{k}A$ は

$$\bar{k}A = f_0^{-1}\left(\frac{\sqrt{L^2-H^2}}{A}\right)$$

と書けるので、よって結局 $\bar{k}$ は

$$\bar{k} = \frac{1}{A}f_0^{-1}\left(\frac{\sqrt{L^2-H^2}}{A}\right) \tag{30}$$

と表されることになる。

なお、$f_0(y)=\sinh y/y$ が、$y>0$ で単調増加であることは、例えば $\sinh y$ のマクローリン展開により示される。

$$\sinh y \;=\; \frac{e^y-e^{-y}}{2} \;=\; \frac{y}{1!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\frac{y^7}{7!}+\cdots$$

より

$$f_0(y) \;=\; \frac{\sinh y}{y} \;=\; 1+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}+\frac{y^6}{7!}+\cdots$$

であるから、

$$f_0'(y) \;=\; \frac{2y}{3!}+\frac{4y^3}{5!}+\frac{6y^5}{7!}+\cdots$$

となり、この右辺は $y>0$ で正なので、よって $f_0'(y)>0$ となる。ゆえに $x=f_0(y)$ には逆関数 $y=f_0^{-1}(x)$ が存在することがわかる。また、ロピタルの定理により

$$\lim_{y\to+0} f_0(y) = \lim_{y\to+0}\cosh y = 1, \quad \lim_{y\to\infty} f_0(y) = \lim_{y\to\infty}\cosh y = \infty$$

なので、$f_0^{-1}(x)$ は $x\geq 1$ を定義域とし、$f_0^{-1}(+1)=0$ で、$x>1$ で滑らかになる。よって、$\sqrt{L^2-H^2}/A>1$ より (30) の右辺は一意に定まる正の実数値となる。なお、$f_0'(+0)=0$ なので、$(f_0^{-1})'(+0)=\infty$ となっている。

4.5 考察

4.4 節の (28), (30) により $\bar{k}$, $\bar{a}$ が求められたので、よって k, a は (25) より

$$\begin{cases} k = 2\bar{k} = \dfrac{2}{A} f_0^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{L^2 - H^2}}{A}\right), \\ a = \bar{a} - \bar{k}A = \operatorname{arctanh}\left(\dfrac{H}{L}\right) - 2f_0^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{L^2 - H^2}}{A}\right) \end{cases} \tag{31}$$

と求まることになる。

さて、これが最初の Q2, Q3 に答えているかどうかを考えてみよう。

まず Q2 であるが、「解くのが難しそうな方程式」とは多分 (29) のことを指しているのだろう。これは、いわゆる「超越方程式」であり、累乗根や三角関数、指数・対数関数などの簡単な関数で答え ($\bar{k}$) を表すことはできない。よって、左辺を f_0 のように置いてその逆関数によって答を表す、ということを行ったのであるが、このような解答は Q2 の質問者には「ごまかし」のように見えるかもしれない。つまり、「逆関数を用いずに」三角関数、指数・対数関数、累乗根などで表現することは確かに無理なので、その意味では、Q2 の質問に対しては「解けない」という答えになる。

ただ、f_0^{-1} は指数関数と 1 次関数によって作られる初等的な関数の逆関数なので、例えば「逆三角関数」が許容できる程度には、この f_0^{-1} も許容できそうな気がする。すなわち Q2 は、「『解く』ということの意味をどういう範囲で考えるか」によって答の変わる質問だとも言えるだろう。

なお、(31) の式のうち、arctanh は

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

なので (cf. [15])、この部分は逆関数を用いなくても簡単な関数で表現可能である。

また Q3 であるが、上にあるように arctanh は簡単に関数電卓などで値を計算できるが、f_0^{-1} は関数電卓では直接計算はできない。しかし、$x = f_0(y) = \sinh y/y = (e^y - e^{-y})/(2y)$ の値は、関数電卓でも簡単に計算できるので、それによって y から x への「数表」を作成することは難しくない。しかも、多分実用的には、H は A よりもだいぶ小さく、そして $L < 2A$ 位まででで十分だと思われるので、

$$\frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{A} \leq \frac{L}{A} < 2$$

より $1 < x < 2$ 位の表があれば十分である。$f_0(y)$ は、$f_0(2.2) = 2.026$ 位なので、よって $0 < y < 2.2$ の範囲の表を作ればよいことになる。この範囲を必要な桁数だけ分割し、関数電卓などで計算すればよいが、コンピュータを使えば数表は一瞬で作ることもできる。

ただ、$f_0'(+0) = 0$ であるから、実は $y = 0$ 付近での x の変化は小さい。もしそれで問題がある場合は、$f_0(y)$ の代わりに $f_1(Y) = f_0(\sqrt{Y})$ の表を作るといいかもしれない。それは、

$$f_1(Y) = f_0(\sqrt{Y}) = 1 + \frac{Y}{3!} + \frac{Y^2}{5!} + \frac{Y^3}{7!} + \cdots$$

より

$$f_1'(Y) = \frac{1}{3!} + \frac{2Y}{5!} + \frac{3Y^2}{7!} + \cdots$$

すなわち $f_1'(+0) = 1/6$ となり、$Y = 0$ の付近でも線形に変化するからである。

5 本講習会で聞いた質問等の一覧

最後に、本講習会参加者から聞いた質問等 (学生から受けた質問、あるいは自分自身が疑問に思うことなど) の一覧をあげておく。なお、これら、およびこれらに対する私の回答や意見は、[17] で公開している。

- 2012 年度
  - (マイナス)×(マイナス)=(プラス) のいい説明は
  - $y = \dfrac{a}{x}$ は 1 次式と呼ばないか
  - 中学生に興味を持たせるような数学の話題は
  - 内積の図形的な定義式は何に使われるか
  - e ってそもそも何かと良く聞かれる
  - 「$x^2 + x + 2 < 0$ を解け」という問題に「解がない」という答えはおかしいと言われた
  - インテグラルの記号はどのようにしてできたのか
  - 「abc 予想」を雰囲気だけでも教えてもらえないか
- 2013 年度
  - 懸垂線のパラメータはちゃんと決定できるか
  - sin はどこからできたのか
  - 計算尺は積も計算できるのか
  - n^n はどんなところにでてくるか
  - 相乗平均はどこで使うか
- 2014 年度
  - 0 で割るのがいけない等のいい説明は
  - a^x の x が実数の場合のいい説明は
  - 1 が素数でないことのいい説明は
  - 「順列」より「組み合わせ」が先では
  - グラスマンのベクトルは行列式か
  - 数列の漸化式が特性方程式で解ける理由は

- 2015 年度
  - 内積の「・」を「○」の形で書いてはいけないか
  - 学生が退屈する分野の面白いエピソードはないか
  - 数学好きの高校生にお勧めの本はないか
  - $\sin x$ に関する循環論法とは
  - 3 階微分はグラフでどういう意味を持つか
- 2016 年度
  - 高校のベクトルの内積の記号は色々あったような気がするが変わっているのか
  - 対数方程式で真数条件が書いてないのはなぜかと聞かれた
  - 物理を履習していない生徒へ内積の図形的な意味を説明するには
  - 必要条件、十分条件のいい説明は
  - 互除法や判別式に関する豆知識を教えて
  - 等式の両辺を定数でかける、割る作業に「移項」のようないい言葉はないか
  - 数学を好きになるようないいネタはないか
  - 分数を足すときになぜ分母を同じにしないといけないか、を分かりやすく教えるには
  - sin, cos, tan の歴史的背景は
  - ある 3 次元模型の立体図形の展開図を考えて欲しいと言われた
  - 底が負の指数関数のいい説明は
  - log は英語圏でも「ログ」と読むのか
  - 四元数をさらに発展させたものはあるか、またそれらの応用例は
- 2017 年度
  - 「分母が 0 だと分数は値なし、分子が 0 だと分数は 0」ということをわかりやすく伝えるには
  - 分数の割り算のうまい説明方法は
  - 工学部ではどのような数学を勉強するか
  - 有理化をするかしないかはどのように分けるか
  - 平方根の値の求め方はどのように教えたらいいか

- 組立除法がなぜそうなるかの易しい説明は
- $\int\ dx$ の記号を使うことのいい説明は
- 相乗平均はどこで使うか
- ○○屋の「10% ポイント還元」は何割引きか
- 「$\zeta(-1) = -1/12$」をわかりやすく説明できないか
- $\sin 20^\circ \times \sin 40^\circ \times \sin 80^\circ$ が簡単な値になる理由は

参考文献

• 第 1 章

[1] コルモゴロフ、ユシュケヴィッチ監修 (小林昭七監訳) 「19 世紀の数学 II – 幾何学・解析関数論 –」、朝倉書店 (2008)

[2] ボイヤー (加賀美鐵雄、浦野由有訳) 「数学の歴史 5 – 19 世紀から 20 世紀まで –」、朝倉書店 (1985)

[3] M.J.Crowe, "A history of vector analysys", Dover Publications (1985)

[4] 公田蔵「四元法 (Quaternion) と明治前期の日本 –日本の『高等数学』教育史の一断面 –」、数理研講究録 **1257** (2002)、244–259

[5] 公田蔵「日本の数学教育とベクトル この百二十五年」数理研講究録 **1317** (2003)、190–204

[6] 今野紀雄「四元数」、森北出版 (2016)

[7] 堀源一郎「ハミルトンと四元数」、海鳴社 (2007)

• 第 2 章

[8] E. マオール (伊理由美訳) 「不思議な数 e の物語」、岩波書店 (1999)

[9] 小杉肇「e の数学」、恒星社厚生閣 (1989)

[10] 志賀浩二「数の大航海」、日本評論社 (1999)

[11] 堀場芳一「対数 e の不思議」、講談社 Blue Backs (1991)

[12] E. ハイラー、G. ヴァンナー (蟹江幸博訳)「解析教程 上」、丸善出版 (2012)

• 第 3 章

[13] 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論 (増補版)」、岩波書店 (1954)

[14] 竹野茂治、「斜円錐の側面積について」、
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#syaensui (2005)

• 第 4 章

[15] 竹野茂治「双曲線関数について」、
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/basic3.html#hyper1 (2010)

- その他全般

[16] "The MacTutor: History of Mathematics archive" (University of St. Andrews),
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/history/

- 私が作成している **Web** ページ

[17] 教員免許状更新講習の Web ページ
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/koushin/koushin.html

[18] 数学に関する書き物の一覧
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/mathlist.html

[19] 講義に関する page
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/index.html

[20] その他雑多なこと (質問など)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html

[21] 竹野研究室 QandA (Japanese)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~foo/qa-top.html