数学のデモの紹介

竹野 茂治

新潟工科大学 基礎教育・教養系
(shige@iee.niit.ac.jp)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/koushin/koushin.html
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/mathlist.html

2024 年 09 月 27 日

目次

数学のデモの必要性

- **政治的事情**
  大学も社会への貢献を求められる (公開講座、出張授業、オープンキャンパス、研究室公開)
- **授業の食いつき**
  現在の授業の数学は「実学」「具体的」でなく「**普遍的**」「**抽象的**」(対象が数学的対象物)
  → 学生にはつまらない
  → やる気を持ってもらうには「実学」「具体性」などの実演が効果的

1. ラジアンの sin, cos のグラフ: 1 概要

- 縦横縮尺が等しく、横幅 2π、縦幅 2 の $y = \sin x$, $y = \cos x$ の正確なグラフが簡単に作れる
- 透明な正方形のフィルムを用意するだけ (クリアファイルを裁断機でカット等)
- 対角線を引いて丸めるだけ
- 理屈は動画でも紹介している

  `http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/basic1.html#sinanim1`

2. 対数表の作成: 1 概要

- 高校生に「17 世紀の電卓を作る」として実施
- 対数は本来「積・商」を「和・差」で計算するもの

  桁が多いと、積・商の計算は、和・差に比べて大変
  (5 桁＋5 桁の筆算は 1 行、5 桁×5 桁は 6 行必要)

- 底が 10 でない対数表なら作成可能
- 対数の発明の歴史にもつながる

2. 対数表の作成: 2 実施内容

- 指数表と和・積の関係

n	1	2	3	4	5	6	7
2^n	2	4	8	16	32	64	128

下の行の積・商が、上の行の和・差に対応

$$4 \times 16 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 4 = 6$$
$$128 \div 16 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 7 - 4 = 3$$

$\rightarrow$ 下の表の数字のすきまを埋めれば積・商を和・差で計算できる

$\rightarrow$ 2^n でなく、1 に近い数の n 乗なら n を変えても値があまり変わらない (表のすきまが狭い)

2. 対数表の作成: 3 実施内容

- ネピア: $1 - 10^{-7}$ の n 乗による対数表 (1614)
  ビュルギ: $1 + 10^{-4}$ の n 乗による対数表 (1620)
- そのような $(1 \pm 10^{-m})^n$ の表の作成は容易
  例えば、1.00001 の積は、シフトと和のみ
- 高校生には、実際に 1.1^n の $1 \leq n \leq 12$ の表を作ってもらい、それを元に積、商、2 乗、平方根の計算を実演した。

n	1	2	3	4	5	6	7
1.1^n	1.1	1.21	1.33	1.46	1.61	1.77	1.95

3. 2 進法手品 (数当て): 1 概要

- 1 から 15 までの数を一つ選んでもらい、その数が 4 枚見せる紙の中にあるかどうかを答えてもらい、その数を即座に当てる手品
- 原理は **2 進法**
- 小学生向けにも、高校生向けにもできる
- 手を動かして自作してもらえる
- 発展も可能 (記号当て、計算しないバージョン)
- 紙を増やせば数の種類も増やせるが 4 枚が適当

3. 2 進法手品 (数当て): 2 作成法

1 から 15 までの数は、1,2,4,8 の高々 1 回ずつの和ですべて表される:

$1 = 1$	$6 = 2+4$	$11 = 1+2+8$
$2 = 2$	$7 = 1+2+4$	$12 = 4+8$
$3 = 1+2$	$8 = 8$	$13 = 1+4+8$
$4 = 4$	$9 = 1+8$	$14 = 2+4+8$
$5 = 1+4$	$10 = 2+8$	$15 = 1+2+4+8$

このうち右辺に 1 が含まれている数を 1 枚目、2 が含まれている数を 2 枚目、4 が含まれている数を 3 枚目、8 が含まれている数を 4 枚目に書く

3. 2 進法手品 (数当て): 3 作成法

4 枚の紙に書く数字は以下の通り

- 1 枚目: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
- 2 枚目: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15
- 3 枚目: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15
- 4 枚目: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

当てるには、「ある」と言われた紙の一番小さい数字 (1,2,4,8) を足すだけ。

例: 11 は 1,2,4 枚目にあり、それぞれの一番小さい数字は 1,2,8 なので、$1+2+8=11$ が答え。

4. 最速降下線: 1 概要

- 研究室公開のときにホワイトボード 3 面で実施
- 1 面目では、プラスチックの曲線を 3 レーン作ってビー玉で実演(上に凸、直線、下に凸)
- 等時性に関する実演も
- 2 面目では、サイクロイドの簡単な説明
- 3 面目では、サイクロイドトンネルのクイズ

4. 最速降下線: 2 概要

- ホワイトボード上にレーンを作るメリット:
  傾ける → 重力を小さくし減速可能
- 等時性:
  サイクロイドレーンではどの高さから落しても最下点に同時に到着
- サイクロイドトンネルのクイズ:
  柏崎から東京まで (215km) サイクロイドのトンネルを掘ると、ビー玉はどれくらいで到着するか
  (A) 6 日 (B) 6 時間 (C) 6 分 (D) 6 秒

4. 最速降下線: 3 クイズの答え

2 地点間の距離 $L = 215\text{km}$ に対して、

- 最下点の深さ $H = L/\pi = 215/\pi = 68.4\text{km}$
- L までの到達時間 $T = \sqrt{2\pi L/g}$
  $= \sqrt{2\pi \times 215000/9.8} = 371$ 秒 $=$ 約 6 分
- 最下点での速度 $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2gL/\pi}$
  $= \sqrt{2 \times 9.8 \times 215000/\pi} = 1158 m/s$
  $=$ マッハ 3.41 (4170km/h)

参考:

真空、あるいは減圧トンネルでの高速輸送計画もある (ハイパーループ等)

5. 1/n 和のブロック積み: 1 概要

- 同形のブロックをできるだけ横にはみ出して崩れないように積んでいく
- 1 個分はみ出せるとは考えにくいよう (意外性)
- 最大はみ出し幅の限界値は
  $$S_n = \frac{L}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{L}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
  $\rightarrow$ 理論的には**無限に**はみ出せる
- ただし、現実的には **2 個分** でも相当難しい (マージンが必要、必要な個数が指数的に増大)

n	4	31	227	1674	12367	91380
S_n	1L	2L	3L	4L	5L	6L

5. 1/n 和のブロック積み: 2 理屈

上から k 番目のブロックのはみ出る幅を x_k とすると、k 番目までのブロックの重心が $k+1$ 番目の左端より右にあることが条件。$k=3$ なら

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(g_1+g_2+g_3) > x_1+x_2+x_3 \\
&\tfrac{L}{2}+\left(\tfrac{L}{2}+x_1\right)+\left(\tfrac{L}{2}+x_1+x_2\right) > 3x_1+3x_2+3x_3
\end{aligned}$$

より、$k=1, k=2$ も合わせると

$$x_1 < \frac{L}{2}, \quad x_1+2x_2 < \frac{2L}{2}, \quad x_1+2x_2+3x_3 < \frac{3L}{2}$$

5. 1/n 和のブロック積み: 3 理屈

不等式の x_k の限界値 $\bar{x}_k$ は、

$$\bar{x}_1 = \frac{L}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{L}{4}, \quad \bar{x}_3 = \frac{L}{6}, \quad \ldots, \quad \bar{x}_n = \frac{L}{2n}$$

より、その和 (全体のずれ) は

$$\frac{L}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

参考: 一松信 米田信夫、「数学セミナー増刊 数学の問題 エレガントな解答を求む 第 1 集」(問題 4)、日本評論社 (1977)

6. 金管楽器の等比・等差数列: 1 概要

- 音 ＝ 空気を伝わる周期振動の圧力波 (周期関数)
- 音高と周波数: 指数・対数の関係＝**等比数列**
- 木管楽器: 管長を**短くして**音高を変化
  (管の穴を開け閉め)
- 金管楽器: 管長を**長くする**＋自然倍音を利用
  (バルブ操作の迂回路、自然倍音＝**等差数列**)

6. 金管楽器の等比・等差数列: 2 等比

- 人間の耳 (脳): 2 倍の周波数の音 (弦楽器の半弦長の音) を 1 オクターブ上の音と認識
  $\rightarrow$ 音高が 1, 2, 3 オクターブ上の音の周波数は元の音の周波数の 2, 4, 8 倍になる
  (下のド ＝ 262Hz、上のド ＝ 523Hz)
  $\rightarrow$ 周波数と音階は**指数・対数**の関係
- 1 オクターブは 12 半音階
  (ミとファ、シとドの間は 1 半音、他は 2 半音)
  $\rightarrow$ 半音階の周波数は、公比 $2^{1/12}$ の**等比数列**
  (平均律音階)

6. 金管楽器の等比・等差数列: 3 等差

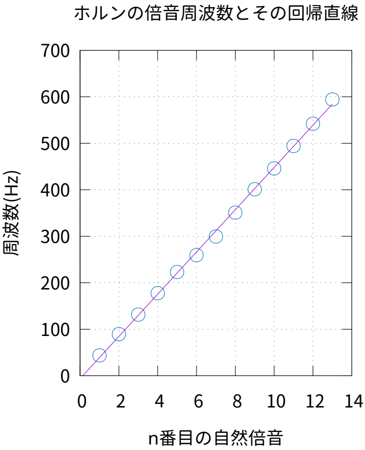
- 自然倍音: f_0(Hz) の音に対して、nf_0(Hz) ($n = 2, 3, 4, \ldots$) の音 (**等差数列**)
- 金管楽器には 2 種類の「自然倍音」がある
  [1] 一つの音程の音に含まれる自然倍音 (音色)
  $f(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \cdots$
  (フーリエ級数展開)
  [2] 金管楽器の共鳴振動数 (特定の音のみを選別)
- 金管楽器が多くの音を出せるのは [2] の自然倍音のおかげ (＋バルブ)
- バルブによる迂回路: 1 番: 2 半音下げ、2 番: 1 半音下げ、3 番: 3 半音下げ

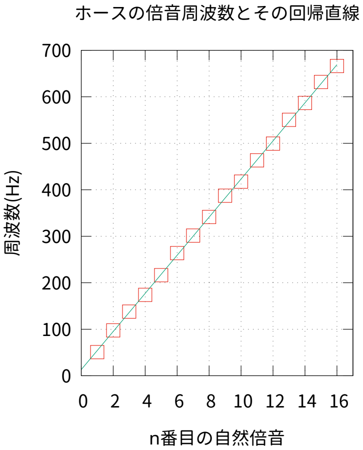
6. 金管楽器の等比・等差数列: 4 等差

- [2] の自然倍音列は **等差数列** (ほぼ nf_0)
  $\rightarrow$ 音階としては対数的: 下の音階は間隔が広く、上の音階は間隔が狭いし、音階には合わない倍音もある
- バルブでは最大 6 半音下げられるので、7 半音間の自然倍音の間の半音階は出せる
- 高い自然倍音は間隔が狭く吹き分けが難しい (ホルンはオーケストラで最も難しい楽器)
- 広がる管形状が [2] の nf_0 に近い倍音列を構成
  $\rightarrow$ 直管だと $(n-0.5)f_0$ の等差数列 (いい音階にはならない)

6. 金管楽器の等比・等差数列: 5 等差

[2] の自然倍音列の実測グラフ (ホルンとホース)





その他:

- **Mathematical Etudes**: `https://etudes.ru/` (ロシア語、英語表示もあり)
  Nicklay Andreev (ステクロフ数学研究所) らのグループのサイト。数学デモの動画等があり、言葉はわからなくても見ているだけで面白い (Parabolic billiard 等)。数学の啓蒙・普及に貢献した人に国際数学者会議で表彰する Leelavati 賞を 2022 年に受賞。
- **Homepage of Yutaka Nishiyama**: `http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/`
  西山豊 (大阪経済大名誉教授) 氏のサイト