微分方程式の研究動向

竹野 茂治

新潟工科大学 基礎教育・教養系
(shige@iee.niit.ac.jp)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/koushin/koushin.html

2023 年 10 月 25 日

目次

微分方程式とは: 微分方程式と代数方程式

- **代数方程式**: 代数式の等式を満たす数 x を求める
  例: $3x^2 + 1 = 4x$ (x: 未知数)
- **微分方程式**: 関数 y とその導関数 $y', y'', \ldots$ の関係式を満たす関数 y を求める
  例: $y''' = y$ ($y = y(x)$: 未知関数)

微分方程式とは: 微分方程式の具体例

- 自由落下 ($y = y(t)$: 高さ): $my'' = -mg$
  (2 階単独常微分方程式)
- n 体問題 ($\vec{x_j}$: 星の位置ベクトル):

$$m_j \vec{x_j}'' = \sum_{k \neq j} \frac{G m_j m_k (\vec{x_k} - \vec{x_j})}{|\vec{x_k} - \vec{x_j}|^3} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

  (2 階連立常微分方程式)
- 波動方程式 ($u = u(t, x)$: 変位): $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
  (2 階単独偏微分方程式)

微分方程式とは: 微分方程式の分類

一般的な分類

- **階数**: 方程式内の微分の最高階数
- **常/偏**: 未知関数が 1 変数か (常微分)、多変数か (偏微分)
- **線形/非線形**: 関数、導関数に関して 1 次式か (線形)、そうでないか (非線形)
- **楕円型/放物型/双曲型**: 主に 2 階偏微分方程式に対する分類

微分方程式とは: 楕円型/放物型/双曲型

偏微分方程式の分類

- **1 階**: $\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \ (u = u(y,x))$
- **2 階楕円型**: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- **2 階放物型**: $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- **2 階双曲型**: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- その他

研究の盛んさ: 数学の分野

古い分類	日本数学会の発表分科会	
• 幾何	• 幾何学	• 無限可積分系
• 代数	• 代数学	• 数学基礎論および歴史
• 解析	• トポロジー	• 統計数学
• 応用	• 函数解析学	• 応用数学
	• 函数論	• 函数方程式
	• 実函数論	

研究の盛んさ: 数学の分野

古い分類	日本数学会の発表分科会	
• 幾何	• 幾何学	• 無限可積分系
• 代数	• 代数学	• 数学基礎論および歴史
• 解析	• トポロジー	• 統計数学
• 応用	• 函数解析学	• **応用数学**
	• 函数論	• **函数方程式**
	• **実函数論**	

赤色 は微分方程式の発表がある程度含まれる分科会

研究の盛んさ: 発表件数 (2023 年秋)

発表分科会	発表件数
• 幾何学	36
• 代数学	57
• トポロジー	33
• 函数解析学	24
• 函数論	18
• **実函数論**	28 (DE 13)
• 無限可積分系	14
• 数学基礎論および歴史	21 + 4
• 統計数学	40
• **応用数学**	58 (DE 23)
• **函数方程式**	81 (DE 77)

研究の盛んさ: 発表の方程式の種類

	実函数	応用数	函数方	合計
常微分	0	5	9	14
楕円型	0	5	7	12
放物型	11	9	21	41
双曲型	1	1	9	11
ナビヤ	0	3	15	18
シュレ	0	0	13	13
その他	1	0	3	4

ナビヤ = ナビヤ・ストークス方程式 (流体)
シュレ = シュレーディンガー方程式 (量子力学)

微分方程式の研究: 初期条件、境界条件

例: 自由落下 $y''(t) = -g$

$\rightarrow$ 解 $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + at + b$ (a, b 任意定数)

- 解をひとつに決めるためには、初期値が 2 つ必要
  $y(0) = 5\mathrm{m}$ (高さ), $y'(0) = -1\mathrm{m/s}$ (初速度) ($t > 0$)
  ＝**初期条件** (変数 1 箇所での条件)
- または境界値 2 つが必要
  $y(0) = 5\mathrm{m}$ (高さ), $y(10) = 0\mathrm{m}$ (高さ) ($0 < t < 10$)
  ＝**境界条件** (変数の境界での条件)

$\rightarrow$ いずれの場合も解が「ただひとつ」「存在」

微分方程式の研究: 昔の研究目的

- 微分方程式を解く (解を初等関数や積分等で表す)
- 解を無限級数で表現 ($\rightarrow$ 近似計算)
- 差分法などで近似値を数値計算
- 近似方程式 (線形化等) を解く

$\rightarrow$ 次のような問題がでてきた

- 解けない微分方程式がある (むしろ解けるのは特別なものだけ)
- 解が一つに決まらない場合がある
- 近似計算をしても近似値にならない

微分方程式の研究: 適切性

アダマール (J.S.Hadamard 1865-1963 仏) の適切性:

偏微分方程式に初期条件や境界条件をつけたときに

1. 解の存在性
2. 解の一意性
3. 解の初期値連続性、安定性

が成り立つこと

→ 偏微分方程式の研究は、まず **適切性** を調べること

→ 線形の偏微分方程式ではおおむね解決
(20 世紀後半位)

微分方程式の研究: 非線形

20 世紀後半から偏微分方程式の研究は**非線形**へシフト
$\rightarrow$ 非線形はだいぶ厄介なことが起こる

- 解の爆発
- 解の分岐、不安定 (カオス)
- 滑らかさの喪失 (衝撃波)

解の爆発

- 線形: $y' = 2y$ $\rightarrow y = Ae^{2x}$ (常に有限)
- 非線形: $y' = y^2$ $\rightarrow y = \dfrac{1}{A - x}$
  有限な x で y が無限大に発散 (爆発)

私の研究対象: 流体の方程式

流体: 液体や気体 (固まりで移動するが変形する)

流体の主要な方程式 (4 種類)

- 圧縮性: あり = 気体, なし = 液体
- 粘性: あり = ナビヤ・ストークス方程式, なし = オイラー方程式

例: 粘性の気体 = 圧縮性ナビヤ・ストークス方程式

適切性に関する難しさ

- 圧縮性: 「あり」$>$「なし」 (式も面倒)
- 粘性: 「あり」$<$「なし」 (式は面倒だが)

私の研究対象: 流体の方程式

- 非圧縮性ナビヤ・ストークス: 通常の液体、適切性はミレニアム問題 (100 万ドルの懸賞金)
- 非圧縮性オイラー: 理想流体
- 圧縮性ナビヤ・ストークス: 低速の実在気体、天気予報に使われる
- 圧縮性オイラー: 高速気流

一番易しいのが「非圧縮性ナビヤ・ストークス」
一番難しいのが「圧縮性オイラー」

→ 私の研究対象は「1 次元圧縮性オイラー」
(難しすぎて今だに「1 次元」が主戦場)

私の研究対象: 保存則方程式

正確には、私の研究対象は

「**1 次元双曲型保存則方程式**」

「1 次元圧縮性オイラー方程式」も含む

他に、高速道路の交通流の方程式、油田の二次抽出、弦の非線形振動なども含む (数学的には 70 年前位)

どう難しいか

- 初期値が滑らかでも不連続性が発生 (衝撃波)
- 不連続性を含む解を考えなければいけない (弱解)
- 滑らかな関数用の関数解析的な道具が使えない
- 存在や一意性も一部しか解決していない (40 年前、20 年前にだいぶ進んだ)

私の研究対象: 衝撃波と超関数

不連続関数を微分方程式の解と見る仕組み $=$ **弱解** (超関数解)

超関数 $=$ 不連続な関数でも何回でも微分できるように微分の概念を広げたもの (現代微分方程式では常識)

例:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \delta(x) \text{ (デルタ関数)}$$

$$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx = g(0)$$

私の研究対象: その他

他にも、以下のことに興味を持っている

- 保存則方程式の時間周期解
- くさりの方程式 (水平回転や自由落下位しか解けていない)
- 半線形波動方程式の爆発境界
- 金管楽器の方程式 (ホーン方程式)
- 研究に必要なフリーソフトウェア (FreeBSD, gnuplot, latex2html) の改良やメンテナンス