順圧気体方程式の進行波型時間周期解について

竹野 茂治 *

(平成 30 年 10 月 31 日受理)

On time periodic solutions of travelling wave type for barotropic gas equations

Shigeharu TAKENO*

For the scalar conservation law with a time periodic outer force, we considered periodic solutions with integer times of the period. In this article we consider the similar form of solutions of travelling wave type for barotropic gas dynamics equations, which is the system of conservation laws. We show the existence of similar continuous solution to the scalar equation, and the non-existence of similar discontinuous solution.

Keywords: system of conservation laws, barotropic gas dynamics, time periodic solution with periodic outer force, travelling wave type, discontinuous solution, Rankine-Hugoniot condition

1　はじめに

これまで, 時間周期外力を伴う 1 次元の単独保存則方程式の空間周期的な境界値問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = g(t,x) & (t>0,\ 0<x<1) \\ u(t,0) = u(t,1) & (t>0) \end{cases} \tag{1}$$

($u=u(t,x)$ は実数値関数, $f(u)$ は滑らかな実数値関数, $g(t,x)$ は $g(t+T,x)=g(t,x)$ の時間周期的な滑らかな関数) に対して, 外力周期の整数倍の周期を持つ周期解の存在, 周期や初期平均を変化させたときの周期解の構造や周期の変化, 極大周期解や極小周期解と整数倍周期解の関係などを, 具体的な厳密解や数値計算などで示してきた [1],[2]. なお, この方程式 (1) の一般的な周期解の存在性に関する研究や [3], 粘性項をつけた方程式の周期解の構造に関する研究も行われている [4].

連立の保存則方程式, 特に 1 次元理想気体の固定境界値問題に対しても同様の考察を行うために, これまでは波動方程式に対するダランベール解のような 2 つの波による解を考えてきたが [5],[6], 今回は空間周期境界条件の下で, 単独の場合と同様の 1 つの波による進行波型の解で, 単独保存則と同様の構造の周期解, 特に外力の整数倍の周期解の存在と, 2 つの周期解をつなぐ形の不連続周期解の存在に関して考察してわかったことについて報告する.

* 工学科 (基礎教育・教養系) 准教授
Associate Professor, Division of Fundamental Education and Liberal Arts, Department of Engineering

2　理想気体の順圧方程式の進行波型周期解

本稿で考察する理想気体の 1 次元順圧 (barotropic) 運動方程式は以下の形である.

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = \rho f(t, x) \end{cases} \qquad (t > 0,\ 0 < x < 1) \tag{2}$$

ここで, t は時刻, x は位置, $\rho = \rho(t, x)$ は気体密度 ($\rho > 0$), $u = u(t, x)$ は x 方向の気体速度, $P = P(\rho)$ は気体の圧力, $f(t, x)$ は気体に働く単位質量当たりの外力で時間に関して周期的 ($f(t + T, x) = f(t, x)$) であるとする.

本稿では, 気体の圧力 P は密度のみによって変化する順圧状態 $P = P(\rho)$ を考えるが, 方程式 (2) は非線形双曲型方程式系の真性非線形性 (genuinely nonlinear) の条件を満たすとし, その場合 $P(\rho)$ は

$$2P' + \rho P'' > 0 \qquad (\rho > 0) \tag{3}$$

を満たすことになる. 例えば等温流 ($P = A\rho$) や等エントロピー流 ($P = A\rho^\gamma$, $1 < \gamma < 3$) はこの条件を満たし, (2) はこれらを含む.

これまでは方程式 (2) を, 固定壁を想定した境界条件

$$(\rho u)(t, 0) = (\rho u)(t, 1) = 0 \qquad (t > 0)$$

で考察するために $\phi(x + st) + \psi(x - st)$ のような波動方程式のダランベール解のような形の解を考察してきたが, 本稿では, 単独保存則方程式の場合と同じ周期境界条件

$$(\rho(t, 1), u(t, 1)) = (\rho(t, 0), u(t, 0)) \qquad (t > 0) \tag{4}$$

の下で考え, 特に進行波型の周期解について, 単独保存則方程式と同様の構造の周期解が存在するかについて考察する. すなわち, 解 (ρ, u) として,

$$\rho(t, x) = \hat\rho(x - st), \qquad u(t, x) = \hat u(x - st) \tag{5}$$

の進行波型の解を考える. ここで, $\hat\rho(\xi)$, $\hat u(\xi)$ は滑らかな周期関数, s は定数であるとする.

(2) の最初の式 (質量保存則) より

$$-s\hat\rho' + (\hat\rho\hat u)' = 0$$

なので, これを積分することで

$$\hat u = s + \frac{c_0}{\hat\rho} \tag{6}$$

が得られる (c_0 は定数). これで解は $\hat\rho(\xi)$ のみに帰着される.

また, (2) の 2 本目の式 (運動量保存則) より

$$-s(\hat\rho\hat u)' + (\hat\rho\hat u^2 + P(\hat\rho))' = \hat\rho f$$

であるから, 外力 f も $f=\hat{f}(x-st)$ の形であり, また

$$\begin{aligned} -s(\hat{\rho}\hat{u})'+(\hat{\rho}\hat{u}^2)' &= (-s\hat{\rho}'+(\hat{\rho}\hat{u})')\hat{u}+(-s+\hat{u})\hat{\rho}\hat{u}' \;=\; c_0\hat{u}' \;=\; -c_0^2\frac{\hat{\rho}'}{\hat{\rho}^2}, \\ (P(\hat{\rho}))' &= P'(\hat{\rho})\hat{\rho}' \end{aligned}$$

となるので,

$$\hat{f}=-c_0\frac{\hat{\rho}'}{\hat{\rho}^3}+P'(\hat{\rho})\frac{\hat{\rho}'}{\hat{\rho}}=\left(\frac{c_0^2}{2\hat{\rho}^2}+D(\hat{\rho})\right)' \qquad \left(D(\rho)=\int\frac{P'(\rho)}{\rho}\,d\rho\right)$$

と変形できる. よって, $\hat{f}$ の原始関数

$$F(\xi)=\int_0^{\xi}\hat{f}(\tau)d\tau+c_1 \tag{7}$$

に対して

$$\frac{c_0^2}{2\hat{\rho}^2}+D(\hat{\rho})=F(\xi) \tag{8}$$

が成り立つことになる.

(8) より $\hat{\rho}$ が周期関数ならば $F(\xi)$ も周期関数となり, よって $\hat{f}(\xi)$ の周期 p に対して

$$\int_0^{p}\hat{f}(\xi)d\xi=0 \tag{9}$$

が成り立つ必要がある. そしてこの場合 $F(\xi)$ と $\hat{f}(\xi)$ は同じ周期を持つ.

今, (8) の左辺を,

$$G(\rho)=\frac{c_0^2}{2\rho^2}+D(\rho) \tag{10}$$

とすると,

$$G'(\rho)=-\frac{c_0^2}{\rho^3}+\frac{P'}{\rho}=\frac{\rho^2P'-c_0^2}{\rho^3}$$

となるが, (3) より

$$(\rho^2P')'=2\rho P'+\rho^2P''>0$$

であるので, これにより $G(\rho)$ の形がある程度決定される. ρ^2P' は単調なので,

$$m=\inf\rho^2P'=(\rho^2P')(+0)\ (\geq 0), \qquad M=\sup\rho^2P'=(\rho^2P')(\infty)\ (\leq\infty)$$

とすると, $c_0\leq m$, あるいは $c_0\geq M$ の場合は $G(\rho)$ が単調となり, (8) の $G(\hat{\rho}(\xi))=F(\xi)$ から $\hat{\rho}(\xi)$ は $F(\xi)$, そして $\hat{f}(\xi)$ と同じ周期を持つことになり, その場合は解と外力の周期がずれることはない. よって, 以後は $m<c_0^2<M$ の場合を考える.

この場合, $\rho_0^2P'(\rho_0)=c_0^2$ となる $\rho_0>0$ が存在し,

$$\rho>\rho_0 \text{ では } G(\rho) \text{ は増加}, \qquad 0<\rho<\rho_0 \text{ では } G(\rho) \text{ は減少} \tag{11}$$

となる.

今, $D(\rho)$ の積分定数を調整して, $G(\rho_0) = 0$ となるようにし, $G_0 = G(+0)$ $(\le \infty)$, $G_\infty = G(\infty)$ $(\le \infty)$ とする. この場合, $0 \le \beta < \beta_1 = \min\{G_0, G_\infty\}$ に対して, ρ の方程式 $G(\rho) = \beta$ は,

$$\rho = H_1(\beta), H_2(\beta) \qquad (0 < H_1(\beta) \le \rho_0 \le H_2(\beta)) \tag{12}$$

の 2 つの解を持つ. $H_1(\beta)$, $H_2(\beta)$ は, $G(\rho) = \beta$ の, それぞれ $0 < \rho \le \rho_0$, $\rho \ge \rho_0$ での逆関数で, よって

$$H_1'(\beta) < 0, \quad H_2'(\beta) > 0, \quad G(H_1(\beta)) = G(H_2(\beta)) = \beta, \quad H_1(0) = H_2(0) = \rho_0 \tag{13}$$

となる. この H_1, H_2 を用いることで, 単独保存則方程式の場合と同様に, 外力の N 倍の周期解を持つ例, 言い換えれば, $G(\hat{\rho})$ の周期が $\hat{\rho}$ の周期の $1/N$ となるような $\hat{\rho}$ の例を以下で構成する.

まず, $\tau(\xi)$ を, 周期が 1 で $\tau(0) = 0$, $0 < \xi < 1$ では $0 < \tau(\xi) < H_2(\beta_1) - \rho_0$ である周期関数とし, これに対して $\hat{\rho}(\xi)$ を

$$\hat{\rho}(\xi) = \begin{cases} \rho_0 + \tau(\xi) & (0 \le \xi < 1) \\ H_1(G(\rho_0 + \tau(\xi))) & (1 \le \xi < 2), \end{cases} \qquad \hat{\rho}(\xi + 2) = \hat{\rho}(\xi) \tag{14}$$

のように定めた連続な周期関数とすると, $0 < \xi < 1$ では $\hat{\rho}(\xi) > \rho_0$, $1 < \xi < 2$ では $\hat{\rho}(\xi) < \rho_0$ なので周期は 2 で, (13) より $1 < \xi < 2$ では

$$G(\hat{\rho}(\xi)) = G(H_1(G(\rho_0 + \tau(\xi)))) = G(\rho_0 + \tau(\xi)) = G(\hat{\rho}(\xi - 1))$$

となるから $F(\xi) = G(\hat{\rho}(\xi))$ の周期は 1 になる. これは, 外力 $\hat{f}(\xi)$ の周期の 2 倍の周期を持つ周期解を持つ例を与える.

同様に (14) の左側への反転を N 回に 1 回にした

$$\hat{\rho}(\xi) = \begin{cases} \rho_0 + \tau(\xi) & (0 \le \xi < N - 1) \\ H_1(G(\rho_0 + \tau(\xi))) & (N - 1 \le \xi < N), \end{cases} \qquad \hat{\rho}(\xi + N) = \hat{\rho}(\xi) \tag{15}$$

を考えることで, $\hat{\rho}(\xi)$ の周期が N で, 外力の周期が 1 となる例も構成できる.

これらは, 単独の保存則方程式の場合とほぼ同様の形であり, よって倍周期解の例としてはこの連立方程式の場合も単独の場合とほぼ同じ結果が得られることになる. ただし, これらの周期解は, 単独の場合同様, 多分安定ではないだろうと予想される.

3　不連続周期解

次は, 単独の場合と同様に, 外力の周期と同じ周期を持つ 2 つの周期関数 (単独保存則方程式の場合は極小周期解と極大周期解) をつなぐような不連続な周期解が得られるかを考える. 単独保存則方程式の場合は, そういうものが具体例として構成できただけでなく, 数値計算例で得られた安定な N 倍周期解のほとんどがそのような構造であったので [2], 連立

方程式の場合もそのようなものが存在すれば, 安定な N 倍周期解全体の構造が解明できる可能性がある.

単独保存則方程式の場合に構成した具体的な極大解と極小解をつなぐ不連続周期解は, 2 節の記号を用いれば, 1 つの外力に対する 2 つの進行波型の連続な周期解

$$\rho = \rho_1(t,x) = \rho_0 + \tau(x - st), \qquad \rho = \rho_2(t,x) = H_1(G(\rho_0 + \tau(x - st))) \tag{16}$$

$(\rho_1(t,x) \geq \rho_0 \geq \rho_2(t,x))$ を, 不連続線 $x = x_d(t)$ で

$$\rho = \rho_d(t,x) = \begin{cases} \rho_1(t,x) & (x < x_d(t)) \\ \rho_2(t,x) & (x > x_d(t)) \end{cases} \tag{17}$$

のようにつなぐものである. $x = x_d(t)$ が $\rho_1(t,x) = \rho_2(t,x)$ ではない場所, すなわち $x_d(t) \neq st + n$ の場所にあれば, そこで $\rho_d(t,x)$ は不連続, すなわち衝撃波を持つことになる. よって, その速度 $x_d'(t)$ はランキン-ユゴニオ条件と呼ばれる不連続性条件

$$[\rho u] = x_d'[\rho], \qquad [\rho u^2 + P(\rho)] = x_d'[\rho u] \tag{18}$$

を満たす必要がある. ここで, $[h(t,x)]$ は, $[h(t,x)] = h(t, x_d(t) + 0) - h(t, x_d(t) - 0)$ を意味する.

(6) より,

$$[\rho u] = [\rho s + c_0] = s[\rho]$$

となるので $s = x_d'$ となり, よって $x = x_d(t)$ は

$$x_d(t) = st + x_0 \qquad (0 \leq x_0 < 1) \tag{19}$$

だから不連続線 $x = x_d(t)$ も進行波解と同じ速度 s で移動しなければならない. また,

$$\rho u^2 = u(\rho s + c_0) = s\rho u + c_0 s + \frac{c_0^2}{\rho}$$

より, (18) と $s = x_d'$ から

$$\left[\frac{c_0^2}{\rho} + P(\rho)\right] = 0$$

となることがわかる. よって

$$K(\rho) = \frac{c_0^2}{\rho} + P(\rho) \tag{20}$$

とすると, (17) がランキン-ユゴニオ条件を満たすためには

$$K(\rho_1(t, x_d(t))) = K(\rho_2(t, x_d(t)))$$

すなわち

$$K(\rho_0 + \tau(x_0)) = K(H(G(\rho_0 + \tau(x_0)))) \tag{21}$$

が成り立つ必要がある. これは x_0 に対する方程式であり, (21) を満たす x_0 が $0<x_0<1$ に存在すれば, そこを起点として $\rho_d(t,x)$ の不連続線が作れ, ランキン-ユゴニオ条件を満たす不連続な周期解が作られることになるが, 逆に (21) を満たす x_0 が自明解, すなわち $x_0=0$ しか存在しなければ, 単独保存則方程式と同様の 2 つの周期解をつなぐ不連続周期解は作れないことになる.

今, $G(\rho_0+\tau(x_0))=\beta_0$ とすると $\rho_0+\tau(x_0)=H_2(\beta_0)$ となり, 方程式 (21) は

$$K(H_1(\beta_0))=K(H_2(\beta_0)) \tag{22}$$

と書ける. しかし, この (22) を満たす β_0 は, 自明解 $\beta_0=0$ しか存在しないことが次の命題 1 により示される.

命題 1 (3), および $m<c_0^2<M$ の条件の下, $0<\bar{\rho}_1\le\rho_0\le\bar{\rho}_2$ で, $K(\bar{\rho}_1)=K(\bar{\rho}_2)$ かつ $G(\bar{\rho}_1)=G(\bar{\rho}_2)$ となる $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ は $\bar{\rho}_1=\bar{\rho}_2=\rho_0$ しか存在しない.

この命題 1 より (22) の解は $H_1(\beta_0)=H_2(\beta_0)=\rho_0$ となり, よって $\tau(x_0)=0$ より $x_0=0$ となる. すなわち, 真性非線形性の条件 (3) の下では, 単独保存則方程式と同様の 2 つの解をつなぐ不連続周期解は構成できないことになる.

命題 1 の証明 (10), (20) より

$$G'(\rho)=-\frac{c_0^2}{\rho^3}+\frac{P'}{\rho} \qquad K'(\rho)=-\frac{c_0^2}{\rho^2}+P'$$

なので $K'=\rho G'$ であることに注意する.

今, $G(\bar{\rho}_1)=G(\bar{\rho}_2)$ で $\bar{\rho}_1<\bar{\rho}_2$ と仮定すると, (11) より $\bar{\rho}_1<\rho_0<\bar{\rho}_2$ で, そして $\bar{\rho}_1<\rho<\bar{\rho}_2$ となるすべての ρ に対して

$$G(\rho)\le G(\bar{\rho}_1)=G(\bar{\rho}_2) \tag{23}$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned}
K(\bar{\rho}_2)-K(\bar{\rho}_1) &= \int_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2}K'(\rho)d\rho = \int_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2}\rho G'(\rho)d\rho = [\rho G(\rho)]_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2}-\int_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2}G(\rho)d\rho \\
&= (\bar{\rho}_2-\bar{\rho}_1)G(\bar{\rho}_2)-\int_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2}G(\rho)d\rho = \int_{\bar{\rho}_1}^{\bar{\rho}_2}(G(\bar{\rho}_2)-G(\rho))d\rho
\end{aligned}$$

となるので, (23) より $K(\bar{\rho}_2)-K(\bar{\rho}_1)>0$ でなくてはならない.

よって, $G(\bar{\rho}_1)=G(\bar{\rho}_2)$, $K(\bar{\rho}_2)=K(\bar{\rho}_1)$ ならば $\bar{\rho}_2=\bar{\rho}_1$ でなければならない. ■

なお, (17) を逆にした

$$\rho=\hat{\rho}_d(t,x)=\begin{cases}\rho_1(t,x) & (x>x_d(t))\\ \rho_2(t,x) & (x<x_d(t))\end{cases} \tag{24}$$

に対してもここまでと全く同じ議論が適用できるので, やはりこの形の不連続解は存在しないことになる.

4　最後に

本稿では, 連立の 1 次元保存則方程式である順圧型の気体方程式の時間周期解に対して, 単独保存則方程式の周期解と同様の構造を持ちうるかについて, 特に進行波型の厳密解に対して考察してみたが, その結果,

- 外力の N 倍の周期解は, 単独の場合とほぼ同様の構造のものが存在する
- 不連続周期解は, 単独の場合と同様な 2 つの連続周期解をつなぐようなものを作ることはできない

ということがわかった. 後者はまだ進行波型の解についての考察なので, すべての場合について言えたわけではないし, 数値解についても対応した結果が成り立つとは言えないが, 単独の場合と連立の場合では周期解の構造には, 少なくとも不連続性に関しては違いがあることを示唆している. よって連立の場合の周期解の構造の研究には, 単独の場合とは異なるアプローチ, 例えばダランベール解のような 2 つの波を利用したものなどを検討する必要があることになる.

今後は, 連立保存則方程式の場合に, 特に不連続な周期解に実際にどのような構造が見られるのかを, 本稿でも取り上げた順圧型の方程式の場合を中心に数値計算なども行い, いくつかの例でその様子を見た上で適切な方法を見極め, その構造を明らかにしていきたいと考えている.

参考文献

[1] 竹野茂治: 単独保存則方程式の周期解の数値解析; 新潟工科大学紀要, **2**, 19–26, 1997.

[2] 竹野茂治, 小松幸恵: 単独保存則方程式の周期解の数値解析 II; 新潟工科大学紀要, **8**, 13–21, 2003.

[3] S.Takeno: Time-periodic solutions for a scalar conservation law; Nonlinear Analysis **45**, 1039–1060, 2001.

[4] H.R.Jauslin, H.O.Kreiss, and J.Moser: On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions; Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **65**, 133–153, 1999.

[5] 竹野茂治: 2 変数の周期関数に関するある性質について; 新潟工科大学紀要, **17**, 13–17, 2012.

[6] 竹野茂治: 2 変数の周期関数に関するある性質について II; 新潟工科大学紀要, **20**, 15–22, 2015.