2023 年 04 月 03 日

1 次元等エントロピー流に対する Tartar 方程式の解法の改良 II

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前 [3] で、離散的な断熱定数 $\gamma = 5/3, 7/5, \ldots$ に対する 1 次元等エントロピー流の方程式の弱解の存在証明に使われる Tartar 方程式の解法の改良を紹介した。その断熱定数は DiPerna の結果 [5] に対応するが、その場合、Darboux エントロピーに出てくる指数が自然数なので、必要な弱エントロピー対の核部分が多項式となり、部分積分やそれらの評価は比較的易しい。

本稿では、DiPerna の結果 [5] を Ding, Chen, Luo らが $1 < \gamma \leq 5/3$ に拡張した [7] に対して、以前の改良の方法を適用したものを紹介する。

Ding-Chen-Luo は [7] で、Darboux エントロピーの核の指数が非整数の実数の場合、[5] の指数が整数の場合の手法をそのまま非整数の場合に拡張していて、Darboux エントロピーの特異性を出す整数階の微分と整数回の部分積分を、非整数階の微分と非整数回の部分積分に置き換えているのであるが、部分積分で大量の項が出てくる上に、非整数階微分の非局所性により広義積分が一つ余計に追加されるために計算式も長く、その評価にも相当な労力が必要となる。

[3] による [5] の改良では、

- B の形のみの Tartar 方程式の利用
- $h(a)B_n$ の a での積分の評価

を行ったが、本稿は [7] の改良のために、これらだけではなく、

- Darboux エントロピーの非整数回の部分積分において、超幾何関数の解析接続により多量の式を削減すること

を行うことで Ding-Chen-Luo の [7] における証明の簡便化を計ることを目標とする。

さらに、この改良により、Ding-Chen-Luo の [7] の結果を γ のより広い範囲 $1 < \gamma < 3$ に広げることが可能かどうかについても合わせて考察を行う。

なお、すでに $1 < \gamma < 3$ の γ については、Lions, Perthame, Souganidis らが [9] で核エントロピーを用いた別の手法により Tartar 方程式を解いているので、本稿の内容により未知の存在定理が得られるわけではないことに注意する。

2 基本事項

証明のおおまかな流れや用語、記号等の多くは、前の報告 [3] とほぼ同じなので省略し、本稿ではそれとは違う部分のみを解説するが、基本事項を本節でまとめて紹介する。

理想気体の 1 次元等エントロピー流の方程式は、

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

である。ここで、$t\ (>0)$ は時刻、$x\ (\in \boldsymbol{R})$ は位置、$\rho = \rho(t,x)$, $u = u(t,x)$ が未知関数で、$\rho\ (\geq 0)$ は気体の密度、u は気体の速度、$P = P(\rho) = A\rho^\gamma$ は気体の圧力、A, γ は定数で、$A > 0$, $1 < \gamma < 3$ である。

未知関数 (ρ, u) は、リーマン不変量

$$w = u + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho^\theta, \quad z = u - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho^\theta \quad \left(\theta = \frac{\gamma - 1}{2}\right)$$

に置き換えて考えることが良く行われる $(w \geq z)$。

一般化エントロピー対 (η, q) は、(ρ, u) (または (w, z)) の関数で、次の方程式を満たすもの。

$$\begin{cases} q_\rho &= u\eta_\rho + \dfrac{P'(\rho)}{\rho}\eta_u, \\ q_u &= \rho\eta_\rho + u\eta_u \end{cases} \tag{2}$$

これは、(1) の滑らかな解 (ρ, u) に対しては、常に

$$\eta(\rho, u)_t + q(\rho, u)_x = 0 \tag{3}$$

となる条件として得られるものである。η をエントロピー、q をエントロピー流束と呼ぶ。(2) を (w,z) で書けば以下のようになる。

$$\begin{cases} q_w &= \lambda_2 \eta_w, \\ q_z &= \lambda_1 \eta_z \end{cases} \tag{4}$$

ここで λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = u - \sqrt{A\gamma}\rho^\theta = \frac{1-\theta}{2}w + \frac{1+\theta}{2}z, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{A\gamma}\rho^\theta = \frac{1+\theta}{2}w + \frac{1-\theta}{2}z$$

であり、(1) の準線形双曲型方程式としての係数行列の固有値である。

方程式 (4) を満たす一般化エントロピーの中で、Tartar 方程式の解法で使われるのが Darboux の公式として与えられるエントロピーで、本稿ではそれを Darboux エントロピーと呼ぶ。

$$\begin{cases} \eta &= \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau \phi(s)ds, \\ q &= \lambda_2 \eta + \sigma, \\ \sigma &= -\theta \int_z^w (w-s)^{\tau+1}(s-z)^\tau \phi(s)ds \end{cases} \tag{5}$$

ここで、$\phi(s)$ は任意の滑らかな関数、τ は定数で、

$$\tau = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} > 0 \tag{6}$$

である。DiPerna の [5]、そして以前の考察 [3] では、この τ が自然数の場合、すなわち $\gamma = 1 + 2/(2n+1)$ の場合を扱っているが、本稿ではこの τ が非整数の場合を考える。

Tartar 方程式とは、方程式 (1) の近似解の極限を記述する Young 測度の族 $\{\nu_{(t,x)}(\rho,u)\}_{\{(t,x);\ t>0,\ x\in\boldsymbol{R}\}}$ に対するもので、任意の一般化弱エントロピー対 (η,q), $(\hat{\eta},\hat{q})$ に対して成立する以下の式を指す。

$$\langle \eta\hat{q} - \hat{\eta}q \rangle = \langle \eta \rangle \langle \hat{q} \rangle - \langle \hat{\eta} \rangle \langle q \rangle \tag{7}$$

ここで、$\langle f(\rho,u) \rangle$ は、確率測度 $\nu_{(t,x)}(\rho,u)$ での積分

$$\langle f(\rho,u) \rangle = \langle \nu_{(t,x)}(\rho,u), f(\rho,u) \rangle = \int f(\rho,u) d\nu_{(t,x)}(\rho,u)$$

を意味する。この方程式 (7) を満たす Young 測度 $\nu_{(t,x)}(\rho,u)$ が $(\bar{\rho}(t,x),\bar{u}(t,x))$ 中心の δ 測度、すなわち

$$\langle f\rangle=\langle\delta(\rho-\bar{\rho}(x,t),u-\bar{u}(x,t)),f(\rho,u)\rangle=f(\bar{\rho}(t,x),\bar{u}(t,x))$$

となることを示すのが目標である。なお、この Tartar 方程式も、本稿では (ρ,u) の代わりに主に (w,z) で考える。

3 必要なエントロピーと非整数階微分

Darboux エントロピーで重要なものは、まずは $\phi(s)$ を $\delta(s-a)$ に近づけた極限として得られる核エントロピー $(\eta^{(0)},q^{(0)})$ と、$-\delta'(s-a)$ に近づけた極限 $(\eta^{(1)},q^{(1)})$ である。

$$\begin{cases}\eta^{(0)} &= (w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau}X_0,\\ q^{(0)} &= \lambda_2\eta^{(0)}+\sigma^{(0)},\\ \sigma^{(0)} &= -\theta(w-a)\eta^{(0)}\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\eta^{(1)} &= \tau(w-a)^{\tau-1}(a-z)^{\tau-1}(w+z-2a)X_0,\\ q^{(1)} &= \lambda_2\eta^{(1)}+\sigma^{(1)},\\ \sigma^{(1)} &= \theta\eta^{(0)}-\theta(w-a)\eta^{(1)}\end{cases}\tag{9}$$

ここで、$X_0=X_0(w,z;a)$ は

$$X_0(w,z;a)=\begin{cases}1 & (z<a<w\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}\tag{10}$$

である。

なお、$1<\gamma\leq 5/3$ は $\tau\geq 1$ に、$5/3<\gamma\leq 2$ は $1/2\leq\tau<1$ に、そして $2<\gamma<3$ は $0<\tau<1/2$ にそれぞれ対応し、$0<\tau<1$ では $(\eta^{(1)},q^{(1)})$ には特異性が現れ、よって Young 測度の適用には注意が必要になる。

また、$\phi_0(s)\in\mathcal{S}$ ($=$ 急減少関数の族) と取り、$\psi_n(s)=n\psi_0(n(s-a))$ に対し、$\phi(s)$ として $\psi_n(s)$ の $\tau+1$ 回微分

$$\phi(s)=D^{\tau+1}\psi_n(s)\tag{11}$$

としたものに対する Darboux エントロピー対を (η_n, q_n)、$\sigma_n = q_n - \lambda_2\eta_n$ とする。

$$\begin{cases} \eta_n & = \displaystyle\int_z^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau D^{\tau+1}\psi_n(s)ds, \\ q_n & = \lambda_2\eta_n + \sigma_n, \\ \sigma_n & = -\theta \displaystyle\int_z^w (w-s)^{\tau+1}(s-z)^\tau D^{\tau+1}\psi_n(s)ds \end{cases} \tag{12}$$

同様に、別の $\mathcal{S}$ の関数 $\hat{\psi}_0(s)$ から同じやり方で作ったものを $(\hat{\eta}_n, \hat{q}_n), \hat{\sigma}_n$ とする。

ここで、(11) の $\tau+1$ 階微分について説明する。$x \to -\infty$ で十分早く減衰する $\boldsymbol{R}$ 上の関数 (例えば $\mathcal{S}$ の元) $f(x)$ と、任意の正数 $\alpha\ (>0)$ に対して、$f(x)$ の α 階積分 $T_\alpha[f]$ を、

$$T_\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \tag{13}$$

と定義し ($\Gamma(x)$ はガンマ関数)、$\alpha \leq 0$ に対しては $m+\alpha>0$ となる自然数 m をとり

$$T_\alpha[f](x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m T_{\alpha+m}[f](x) \tag{14}$$

と定める。この定義が矛盾ないことや、通常の整数回の積分の拡張になっていることは、T_α が満たす次の性質からわかる。

1. 任意の α, β に対して

$$T_\alpha[T_\beta[f]] = T_{\alpha+\beta}[f]$$

2. 任意の自然数 n に対して

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n T_\alpha[f] = T_{\alpha-n}[f] = T_\alpha[f^{(n)}]$$

3. $$T_1[f] = \int_{-\infty}^x f(x)dx, \quad T_0[f] = f(x), \quad T_{-n}[f] = f^{(n)}\ (n \text{ は自然数})$$

そして、実数 α に対して α 階の微分 $D^\alpha f$ を

$$D^\alpha f(x) = T_{-\alpha}[f](x) \tag{15}$$

と定める。

非正数の $\tau\ (>0)$ に対しては、τ を整数部分 $[\tau]$ と小数部分 (τ) に分けると、$D^{\tau+1}\psi(s)$ は、

$$\begin{aligned} D^{\tau+1}\psi(s) &= T_{-\tau-1}[\psi] = T_{-[\tau]-1-(\tau)}[\psi] = T_{1-(\tau)}[\psi^{([\tau]+2)}] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-(\tau))}\int_{-\infty}^{s}(s-t)^{-(\tau)}\psi^{[\tau]+2}(t)dt \end{aligned}$$

と書ける。これにより、(12) の η_n は、

$$\eta_n = \frac{1}{\Gamma(1-(\tau))}\int_z^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau ds \int_{-\infty}^{s}(s-t)^{-(\tau)}\psi_n^{[\tau]+2}(t)dt \tag{16}$$

となる。ここで、積分の順序交換により、

$$\int_z^w ds \int_{-\infty}^{s} dt = \int_{-\infty}^{z} dt \int_z^w ds + \int_z^w dt \int_t^w ds$$

となるので、(16) は、

$$\eta_n = \frac{1}{\Gamma(1-(\tau))}\int_{-\infty}^{w}\psi_n^{[\tau]+2}(t) f_0(t) dt \tag{17}$$

となる。ここで $f_0(t)$ は、

$$f_0(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_z^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau (s-t)^{-(\tau)} ds & (-\infty < t < z), \\ \displaystyle\int_t^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau (s-t)^{-(\tau)} ds & (z < t < w) \end{cases}$$

とした。超幾何関数に関する考察 [4] でとりあげた $H_\pm$ を用いて、$H(x;\alpha,\beta,\gamma)$ を

$$\begin{aligned} H(x;\alpha,\beta,\gamma) &= \begin{cases} H_+(x;\alpha,\beta,\gamma) & (x>1), \\ H_-(x;\alpha,\beta,\gamma) & (0<x<1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}(x-y)^\gamma & (x>1), \\ \displaystyle\int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}(x-y)^\gamma & (0<x<1) \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

と書くことにすれば、$-\infty < t < z$ では、$(w-s)/(w-z) = y$ により

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= \int_z^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau (s-t)^{-(\tau)} ds \\
&= (w-z)^{2\tau+1} \int_0^1 y^\tau (1-y)^\tau (w-t-(w-z)y)^{-(\tau)} ds \\
&= (w-z)^{\tau+[\tau]+1} H_+ \left(\frac{w-t}{w-z}; \tau+1, \tau+1, -(\tau) \right)
\end{aligned}$$

$z < t < w$ では

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= \int_t^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau (s-t)^{-(\tau)} ds \\
&= (w-z)^{2\tau+1} \int_0^{(w-t)/(w-z)} y^\tau (1-y)^\tau (w-t-(w-z)y)^{-(\tau)} ds \\
&= (w-z)^{\tau+[\tau]+1} H_- \left(\frac{w-t}{w-z}; \tau+1, \tau+1, -(\tau) \right)
\end{aligned}$$

なので、

$$f_0(t) = (w-z)^{\tau+[\tau]+1} H \left(\frac{w-t}{w-z}; \tau+1, \tau+1, -(\tau) \right)$$

となる。よって (17) は、$(w-t)/(w-z) = x$ により

$$\begin{aligned}
\eta_n &= \frac{(w-z)^{\tau+[\tau]+1}}{\Gamma(1-(\tau))} \int_{-\infty}^w \psi_n^{[\tau]+2}(t) H \left(\frac{w-t}{w-z}; \tau+1, \tau+1, -(\tau) \right) dt \\
&= \frac{(w-z)^{\tau+[\tau]+2}}{\Gamma(1-(\tau))} \int_0^\infty \psi_n^{[\tau]+2}(w-(w-z)x) H(x; \tau+1, \tau+1, -(\tau)) dx \\
&= \frac{(w-z)^\tau}{\Gamma(1-(\tau))} \int_0^\infty (-1)^{[\tau]+2} \Psi_n^{[\tau]+2}(x) H(x; \tau+1, \tau+1, -(\tau)) dx \qquad (19)
\end{aligned}$$

と書けることになる。ここで、$\Psi_n(x) = \psi_n(w-(w-z)x)$ とした。

同様に σ_n は、

$$\sigma_n = -\theta \frac{(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(1-(\tau))} \int_0^\infty (-1)^{[\tau]+2} \Psi_n^{[\tau]+2}(x) H(x; \tau+2, \tau+1, -(\tau)) dx \qquad (20)$$

と書ける。これらの部分積分を行って積分の中の ψ_n の微分をなくせば、それは (12) を「$\tau+1$ 回」部分積分したことに対応する。そのような表示を求めるために、前の考察 [4] から必要な H の性質、境界評価などを改めて取り出す。

命題 1

以下 $k=1,2$, $\ell=1,2$ とし、$H_{k,\ell,j}(x)=H(x;\tau+k,\tau+\ell,-(\tau)-j)$ とする (τ は非整数)。

1. $\alpha>0$, $\beta>0$ で非整数の α,β,γ に対して次が成り立つ。

$$\begin{cases} H(x;\alpha+1,\beta,\gamma)+H(x;\alpha,\beta+1,\gamma)=H(x;\alpha,\beta,\gamma) \\ H(x;\alpha+1,\beta,\gamma)+H(x;\alpha,\beta,\gamma+1)=xH(x;\alpha,\beta,\gamma) \end{cases}$$

$H_{k,\ell,j}(x)$ で言えば、これらは

$$\begin{cases} H_{k+1,\ell,j}(x)+H_{k,\ell+1,j}(x)=H_{k,\ell,j}(x), \\ H_{k+1,\ell,j}(x)+H_{k,\ell,j-1}(x)=xH_{k,\ell,j}(x) \end{cases}$$

となる。

2. $H_{k,\ell,0}(x)$ $(=H(x;\tau+k,\tau+\ell,-(\tau)))$ の導関数は、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j H_{k,\ell,0}(x)=c_jH_{k,\ell,j}(x)$$

となる ($j\geq 1$)。ここで、c_j は k にはよらない定数で

$$c_j=\left[\begin{array}{c} -(\tau) \\ j \end{array}\right]=(-(\tau))(-(\tau)-1)\cdots(-(\tau)-j+1). \tag{21}$$

3. $x\to\infty$ に対しては

$$H_{k,\ell,j}(x)=x^{-(\tau)-j}(B(\tau+k,\tau+\ell)+o(1))$$

となる ($0\leq j\leq[\tau]+2$)。よって $j\geq 0$ なら $H_{k,\ell,j}(\infty)=0$ で、$j\geq 1$ なら $x\to\infty$ では L^1 となる。

4. $x\to+0$ に対しては

$$H_{k,\ell,j}(x) \;=\; \begin{cases} x^{[\tau]+k-j}(B(\tau+k,1-(\tau)-j)+o(1)) & (j\leq[\tau]+k), \\ (-1)^{[\tau]+1}\tau(B((\tau),1-(\tau))+o(1)) & (j=[\tau]+k+1) \end{cases}$$

となる ($0\leq j\leq[\tau]+2$)。よって $H_{k,\ell,j}(+0)$ はいずれも有限値で、$j<[\tau]+k$ なら $H_{k,\ell,j}(+0)=0$ となる。

5. $x \to 1+0$ に対しては、$j \leq [\tau]+\ell-1$ のときは

$$H_{k,\ell,j}(x) = B(\tau+k, [\tau]+\ell-j) + o(1),$$

$j = [\tau]+\ell$ のときは

$$H_{k,\ell,j}(x) = -\log(x-1) + M(\tau+k) + M(\tau+\ell) + o(1)$$

$j = [\tau]+\ell+1$ のときは

$$\begin{aligned} H_{k,\ell,j}(x) &= \frac{1}{\tau+\ell}\frac{1}{x-1} + (\tau+k-1)\{\log(x-1) - M(\tau+k-1) \\ &\quad -M(\tau+\ell+1) - 1\} + o(1) \end{aligned}$$

となる。

6. $x \to 1-0$ に対しては、$j \leq [\tau]+\ell-1$ のときは

$$H_{k,\ell,j}(x) = B(\tau+k, [\tau]+\ell-j) + o(1),$$

$j = [\tau]+\ell$ のときは

$$H_{k,\ell,j}(x) = -\log|x-1| + M(\tau+k) + M(1-\tau-\ell) + o(1)$$

$j = [\tau]+\ell+1$ のときは

$$\begin{aligned} H_{k,\ell,j}(x) &= \frac{1}{\tau+\ell}\frac{1}{x-1} + (\tau+k-1)\{\log|x-1| - M(\tau+k-1) \\ &\quad -M(-\tau-\ell) - 1\} + o(1) \end{aligned}$$

となる。

なお、この命題 1 に出てくる $H(x;\alpha,\beta,\gamma)$ ($\alpha>0, \beta>0, \alpha,\beta,\gamma$ は非整数) の形の式は、$\gamma<-1$ の場合は (18) の H_- の積分は収束しないが、それについては前に [4] で考察した自然な拡張 (解析接続) を意味するとする。また、$\Gamma(\alpha)$, $B(\alpha,\beta)$ で $\alpha<0, \beta<0$ (で非整数) の場合も、解析接続による値と考える。すなわち、$\alpha<0, \alpha \notin \boldsymbol{Z}$ に対しては、

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

によって帰納的に定義したもの、すなわち $-n<\alpha<-n+1$ となる自然数 n に対して、

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\left[\begin{array}{c}\alpha+n-1\\ n\end{array}\right]}=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

と考え、$\alpha<0$ や $\beta<0$ に対しては

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

によって定める。また、$M(\alpha)$ は前の考察 [4] で導入したものだが、追加の基本的な性質も含めてあらためて説明する。$M(\alpha)$ は、$\alpha>0$ に対しては

$$M(\alpha)=\int_0^1\frac{(1-y)^{\alpha-1}-1}{y}dy \tag{22}$$

で定義され、性質

$$M(\alpha+1)=M(\alpha)-\frac{1}{\alpha}\quad(\alpha>0) \tag{23}$$

により、$\alpha<0,\alpha\notin\boldsymbol{Z}$ に対しては

$$M(\alpha)=M(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha}$$

によって帰納的に定義したもの、すなわち $-n<\alpha<-n+1$ となる自然数 n に対して、

$$M(\alpha)=M(\alpha+n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha+k-1} \tag{24}$$

とする (解析接続)。

補題 2

$M(\alpha)$ は以下の性質を満たす。

1. $M(1)=0,\quad M(n)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\quad(n\in\boldsymbol{N})$

2. $\alpha>0$ では $M(\alpha)$ は減少関数で、$M(\infty)=-\infty$, $M(+0)=\infty$

3. $\alpha<0$ では、各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $-n<\alpha<-n+1$ では $M(\alpha)$ は減少関数で、$M(-n+0)=\infty$, $M(-n+1-0)=-\infty$

4. $\tau=m+1/2$ $(m=0,1,2,\ldots)$ に対して $M(\tau+1)-M(-\tau)=0$ となり、逆にそれ以外の $\tau>0$ では $M(\tau+1)-M(-\tau)$ は 0 にはならない。

証明

1. 定義 (22)、性質 (23) より明らか。

2. 単調性は $(1-y)^{\alpha-1}$ の単調性から明らか。$M(\infty)$ は、$\alpha\to\infty$ に対して

$$M(\alpha)\leq M([\alpha])=-\sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\frac{1}{k}\to-\infty$$

より $M(\infty)=-\infty$ が言える。$M(+0)$ については、$0<\alpha<1$ では $(1-y)^{\alpha-1}>1$ なので積分範囲の一部分が ∞ に発散することを示せばよいが、$\alpha\to+0$ に対して

$$\int_{1/2}^{1}\frac{(1-y)^{\alpha-1}-1}{y}dy>\int_{1/2}^{1}\{(1-y)^{\alpha-1}-1\}dy=\frac{1}{\alpha 2^{\alpha}}-\frac{1}{2}\to\infty$$

なので、$M(+0)=\infty$ となる。

3. $-n<\alpha<-n+1$ に対しては $M(\alpha)$ は (24) であり、その右辺の項はすべて α に対して減少するから $M(\alpha)$ も減少関数。また、その極限も (24) より

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to-n+0}M(\alpha)&=\lim_{\alpha\to-n+0}M(\alpha+n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty,\\ \lim_{\alpha\to-n+1-0}M(\alpha)&=M(1)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\lim_{\alpha\to-n+1-0}\frac{1}{\alpha+n-1}=-\infty\end{aligned}$$

となる。

4. 3. より各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し $n-1<\tau<n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ では $M(\tau+1)-M(-\tau)$ は減少関数で、$\tau \to n-1+0$ では ∞ で、$\tau \to n-0$ では $-\infty$ となるので、その間で一度だけ 0 になる。そして $\tau = n-1/2$ では、(23), (24) より

$$
\begin{aligned}
M(\tau+1) &= M\left(n+\frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1}, \\
M(-\tau) &= M(n-\tau) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-1-\tau} \;=\; M\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-2n-1} \\
&= M\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} \;=\; M(\tau+1)
\end{aligned}
$$

となる。■

さて、命題 1 より、$H_{k,1,0}(x)$ $(k=1,2)$ の 0 階から $[\tau]$ 階までの導関数 $c_j H_{k,1,j}(x)$ $(0 \le j \le [\tau])$ について、

- $H_{k,1,j}(\infty)=0,\ H_{k,1,j}(+0)=0$
- $H_{k,1,j}(x)$ は $x=1$ で連続 $(H_{k,1,j}(1+0)=H_{k,1,j}(1-0))$

となることがわかるので、(19), (20) に $[\tau]+1$ 回の部分積分を実行すれば、

$$
\eta_n = \frac{c_{[\tau]+1}(w-z)^{\tau}}{\Gamma(1-(\tau))} \int_0^{\infty} (-\Psi'_n(x)) H_{1,1,[\tau]+1}(x)\,dx \tag{25}
$$

$$
\sigma_n = -\theta \frac{c_{[\tau]+1}(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(1-(\tau))} \int_0^{\infty} (-\Psi'_n(x)) H_{2,1,[\tau]+1}(x)\,dx \tag{26}
$$

となる。ここで、(21)、および Γ の解析接続によってこれらの係数は

$$
\frac{c_{[\tau]+1}}{\Gamma(1-(\tau))} = \frac{(-(\tau))(-(\tau)-1)\cdots(-\tau)}{\Gamma(1-(\tau))} = \frac{1}{\Gamma(-\tau)}
$$

と表すことができる。(25) に対する最後の部分積分では、

$$
\begin{aligned}
\eta_n = \frac{(w-z)^{\tau}}{\Gamma(-\tau)} \lim_{\varepsilon \to +0} \Bigg\{ &\Big[-\Psi_n(x) H_{1,1,[\tau]+1}(x)\Big]_{1+\varepsilon}^{\infty} + \Big[-\Psi_n(x) H_{1,1,[\tau]+1}(x)\Big]_0^{1-\varepsilon} \\
&-(\tau+1)\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty}\right) \Psi_n(x) H_{1,1,[\tau]+2}(x)\,dx \Bigg\}
\end{aligned} \tag{27}
$$

となるが、境界値は、0 と ∞ では命題 1 より

$$H_{1,1,[\tau]+1}(\infty) = 0, \quad H_{1,1,[\tau]+1}(+0) = B(\tau+1, -\tau)$$

であり、$x = 1 \pm 0$ では、

$$\chi_+(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1), \\ 0 & (x < 1), \end{cases} \qquad \chi_-(x) = 1 - \chi_+(x) = \begin{cases} 0 & (x > 1), \\ 1 & (x < 1) \end{cases}$$

を用いて

$$H_{1,1,[\tau]+1}(x) = -\log|x-1| + M(\tau+1) + M(\tau+1)\chi_+ + M(-\tau)\chi_- + o(1)$$

と表せる。これにより、(27) の境界部分の極限は、

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\Big[-\Psi_n(x)H_{1,1,[\tau]+1}(x)\Big]_{1+\varepsilon}^{\infty} + \Big[-\Psi_n(x)H_{1,1,[\tau]+1}(x)\Big]_0^{1-\varepsilon}\right\} \\
&= \Psi_n(0)\,B(\tau+1,-\tau) + \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\Big[\Psi_n(x)H_{1,1,[\tau]+1}(x)\Big]_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\right\} \\
&= B(\tau+1,-\tau)\psi_n(w) + \lim_{\varepsilon\to+0}\{(\Psi_n(1)+O(\varepsilon))(-\log\varepsilon + 2M(\tau+1) + o(1)) \\
&\quad -(\Psi_n(1)+O(\varepsilon))(-\log\varepsilon + M(\tau+1) + M(-\tau) + o(1))\} \\
&= B(\tau+1,-\tau)\psi_n(w) + (M(\tau+1) - M(-\tau))\psi_n(z) \\
&= A_\tau\psi_n(z) + B_\tau\psi_n(w)
\end{aligned} \tag{28}$$

となる。ここで、

$$A_\tau = M(\tau+1) - M(-\tau), \quad B_\tau = B(\tau+1,-\tau) \tag{29}$$

とした。なお $\tau \notin \boldsymbol{N}$ より B_τ は有限値でかつ 0 にはならないが、A_τ は補題 2 より 0 になることもある。

(27) の積分部分は、$H_{1,1,[\tau]+2}$ の $x = 1$ の近くでの特異性、すなわち

$$\begin{aligned}
H_{1,1,[\tau]+2}(x) &= \frac{1}{\tau+1}\frac{1}{x-1} + \tau(\log|x-1| - M(\tau) - 1) \\
&\quad -\tau(M(\tau+2)\chi_+ + M(-\tau-1)\chi_-) + o(1)
\end{aligned} \tag{30}$$

を $H_{1,1,[\tau]+2}$ から分離するために、次のような $\xi(x) \in C_0^\infty$ (= コンパクト台を持つ無限回微分可能関数の族) をひとつ取る。

- $\xi(1-x) = \xi(1+x)\ (x > 0)$
- $0 \le \xi(x) \le 1\ (x \in \boldsymbol{R})$
- $|x-1| \le 1/4$ では $\xi(x) = 1$、$|x-1| \ge 1/2$ では $\xi(x) = 0$

それに対して、$F_0(x) = H_{1,1,[\tau]+2}(x)$ とし、ここから $x = 1$ での特異性を取り去ったものを $\bar{F}_0(x)$ とする:

$$\bar{F}_0(x) = F_0(x) - \xi(x)\left(\frac{1}{\tau+1}\frac{1}{x-1} + \tau\log|x-1|\right) \tag{31}$$

このとき、命題 1 より

$$\begin{array}{l} \bar{F}_0(x) = x^{-\tau-2}(B(\tau+1,\tau+1) + o(1)) \quad (x \to \infty), \\ \bar{F}_0(+0) = (-1)^{[\tau]+1}\tau\, B((\tau), 1-(\tau)), \\ \bar{F}_0(1+0) = -\tau(M(\tau) + M(\tau+2) + 1), \\ \bar{F}_0(1-0) = -\tau(M(\tau) + M(-\tau-1) + 1) \end{array} \tag{32}$$

なので、$\bar{F}_0(x)$ は $x = 1$ 以外では連続で、$x > 0$ で有界かつ可積分、となる。よって (27) の積分部分は

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty}\right)\Psi_n(x)H_{1,1,[\tau]+2}(x)dx \\ &= \int_0^{\infty}\Psi_n(x)\bar{F}_0(x)dx + \tau\int_0^{\infty}\Psi_n(x)\xi(x)\log|x-1|dx \\ &\quad + \frac{1}{\tau+1}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty}\right)\Psi_n(x)\frac{\xi(x)}{x-1}dx \end{aligned} \tag{33}$$

と分離できる。ここで、関数 $g(x)$, $a < b < c$ に対し、一般に

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{b-\varepsilon} + \int_{b+\varepsilon}^{c}\right)\frac{g(x)}{x-b}dx = \mathrm{p.v.}\int_a^c \frac{g(x)}{x-b}dx \tag{34}$$

と書き、$g(x)/(x-b)$ の主値積分と呼ぶ。この主値積分は一般には有限とは限らないが、b の近くで滑らかな $g(x)$ に対しては、

$$\begin{aligned} \mathrm{p.v.}\int_a^c \frac{g(x)}{x-b}dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{b-\varepsilon} + \int_{b+\varepsilon}^{c}\right)\left(\frac{g(x)-g(b)}{x-b} + \frac{g(b)}{x-b}\right)dx \\ &= \int_a^c \frac{g(x)-g(b)}{x-b}dx + g(b)\log\frac{c-b}{b-a} \end{aligned} \tag{35}$$

のように極限を用いない形で表すこともでき、収束することが保証される。

これにより、結局 η_n は、

$$\begin{aligned}\eta_n &= \frac{(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)}\Big\{A_\tau\psi_n(z)+B_\tau\psi_n(w)-(\tau+1)\int_0^\infty\Psi_n(x)\bar{F}_0(x)dx \\ &\quad -\tau(\tau+1)\int_0^\infty\Psi_n(x)\xi(x)\log|x-1|dx-\mathrm{p.v.}\int_0^\infty\Psi_n(x)\frac{\xi(x)}{x-1}dx\Big\} \qquad (36)\end{aligned}$$

と書けることになる。

なお、(32) の $\bar{F}_0(+0)$、および $x=1$ での段差は、

$$\begin{aligned}B((\tau),1-(\tau)) &= \frac{\Gamma((\tau))\,\Gamma(1-(\tau))}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{\Gamma(\tau+1)}{((\tau))((\tau)+1)((\tau)+2)\cdots\tau}\times(-(\tau))(-(\tau)-1)\cdots(-\tau)\,\Gamma(-\tau) \\ &= (-1)^{[\tau]+1}\,B(\tau+1,-\tau) = (-1)^{[\tau]+1}B_\tau, \qquad (37) \\ M(\tau+2)-M(-\tau-1) &= M(\tau+1)-\frac{1}{\tau+1}-\left(M(-\tau)+\frac{1}{-\tau-1}\right) \\ &= A_\tau \qquad (38)\end{aligned}$$

より

$$\bar{F}_0(+0)=\tau B_\tau, \quad \left[\bar{F}_0(x)\right]_{1-0}^{1+0}=-\tau A_\tau \qquad (39)$$

となることに注意する。

同様に σ_n も、

$$\sigma_n=-\theta\frac{(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(-\tau)}\int_0^\infty(-\Psi'_n(x))H_{2,1,[\tau]+1}(x)dx$$

の部分積分を行うと

$$\begin{aligned}\sigma_n &= -\theta\frac{(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(-\tau)}\lim_{\varepsilon\to+0}\Big\{\left[-\Psi_nH_{2,1,[\tau]+1}\right]_{1+\varepsilon}^{\infty}+\left[-\Psi_nH_{2,1,[\tau]+1}\right]_0^{1-\varepsilon} \\ &\quad -(\tau+1)\left(\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^\infty\right)\Psi_n(x)H_{2,1,[\tau]+2}(x)dx\Big\}\end{aligned}$$

であり、

$$H_{2,1,[\tau]+1}(\infty) = 0, \quad H_{2,1,[\tau]+1}(+0) = 0$$

で、$x = 1 \pm 0$ では、

$$H_{2,1,[\tau]+1}(x) = -\log(x-1) + M(\tau+2) + M(\tau+1)\chi_+ + M(-\tau)\chi_- + o(1)$$

なので、

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\left[-\Psi_n H_{2,1,[\tau]+1}\right]_{1+\varepsilon}^{\infty} + \left[-\Psi_n H_{2,1,[\tau]+1}\right]_0^{1-\varepsilon}\right\} &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\Psi_n H_{2,1,[\tau]+1}\right]_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \\ &= A_\tau \psi_n(z)\end{aligned}$$

となり、また $x = 1 \pm 0$ では

$$\begin{aligned}H_{2,1,[\tau]+2}(x) &= \frac{1}{\tau+1}\frac{1}{x-1} + (\tau+1)(\log(x-1) - M(\tau+1) - 1) \\ &\quad -(\tau+1)(M(\tau+2)\chi_+ + M(-\tau-1)\chi_-) + o(1)\end{aligned}$$

なので、$F_1(x) = H_{2,1,[\tau]+2}(x)$ とし、

$$\bar{F}_1(x) = F_1(x) - \xi(x)\left(\frac{1}{\tau+1}\frac{1}{x-1} + (\tau+1)\log|x-1|\right) \tag{40}$$

とすると、命題 1 より

$$\begin{aligned}&\bar{F}_1(x) = x^{-\tau-2}(B(\tau+2,\tau+1) + o(1)) \quad (x\to\infty), \\ &\bar{F}_1(+0) = B(\tau+2, -1-\tau), \\ &\bar{F}_1(1+0) = -(\tau+1)(M(\tau+1) + M(\tau+2) + 1), \\ &\bar{F}_1(1-0) = -(\tau+1)(M(\tau+1) + M(-\tau-1) + 1)\end{aligned} \tag{41}$$

であり、$x = 1$ 以外で連続で、有界かつ可積分となり、よって σ_n は

$$\begin{aligned}\sigma_n &= -\theta\frac{(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(-\tau)}\left\{A_\tau\psi_n(z) - (\tau+1)\int_0^\infty \Psi_n(x)\bar{F}_1(x)dx\right. \\ &\quad \left. -(\tau+1)^2\int_0^\infty \Psi_n(x)\xi(x)\log|x-1|dx - \mathrm{p.v.}\int_0^\infty \Psi_n(x)\frac{\xi(x)}{x-1}dx\right\}\end{aligned} \tag{42}$$

と表される。

この (36)、(42) が、(12) を $\tau+1$ 回部分積分した形、ということになる。

なお、(41) の $\bar{F}_1(+0)$ と $\bar{F}_1(x)$ の $x=1$ での段差も、

$$\begin{aligned} B(\tau+2,-1-\tau) &= \frac{\Gamma(\tau+2)\,\Gamma(-1-\tau)}{\Gamma(1)} = (\tau+1)\,\Gamma(\tau+1)\frac{\Gamma(-\tau)}{-1-\tau} \\ &= -B_\tau \end{aligned} \tag{43}$$

および、(38) より

$$\bar{F}_1(+0) = -B_\tau, \quad \Big[\bar{F}_1(x)\Big]_{1-0}^{1+0} = -(\tau+1)A_\tau \tag{44}$$

となる。

4 B と h

$B_{0,1}$, $B_n^{(0)}$, $B_n^{(1)}$, B_n は前の報告 [3] と同じにとる。すなわち、

$$\begin{cases} B_{0,1} &= \eta^{(0)}q^{(1)} - \eta^{(1)}q^{(0)} &= \eta^{(0)}\sigma^{(1)} - \eta^{(1)}\sigma^{(0)} \\ B_n^{(j)} &= \eta^{(j)}q_n - \eta_n q^{(j)} &= \eta^{(j)}\sigma_n - \eta_n\sigma^{(j)} \\ \hat{B}_n^{(j)} &= \eta^{(j)}\hat{q}_n - \hat{\eta}_n q^{(j)} &= \eta^{(j)}\hat{\sigma}_n - \hat{\eta}_n\sigma^{(j)} \\ B_n &= \eta_n\hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n &= \eta_n\hat{\sigma}_n - \hat{\eta}_n\sigma_n \end{cases} \quad (j=0,1) \tag{45}$$

とする。ここで、$B_{0,1}$ は前の報告 [3] と同様に

$$B_{0,1} = \theta\{\eta^{(0)}(a)\}^2 = \theta\{(w-a)(a-z)\}^{2\tau}X_0 \geq 0 \tag{46}$$

となり、その Young 測度 ν による積分を

$$h(a) = \langle B_{0,1}\rangle = \langle \theta\{\eta^{(0)}(a)\}^2\rangle \tag{47}$$

とする。前の報告 [3] の命題 2 では $h(a)$ の連続性のみを述べたが、ここではもう少し強い Hölder 連続性を示しておく。なお、以後一つの Young 測度 $\nu=\nu_{(t,x)}$ を固定して考え、その ν の台を含む最小の三角領域を

$$\Sigma(w_1,z_1) = \{(w,z)|\ w\geq z,\ w\leq w_1,\ z\geq z_1\} \tag{48}$$

とし、$w_1 > z_1$ とする。

命題 3

$h(a)$ は、$z_1 < a < w_1$ では正で、その外では 0 で、かつ、すべての実数 a, b に対し次を満たす。

$$|h(b) - h(a)| \le C_0(|b-a|^{2\tau} + |b-a|)$$

ここで、C_0 は w_1, z_1, τ のみに依存し、a, b には依存しない定数。

証明

最後の不等式以外の性質は、前の報告 [3] の命題 2 の証明と同じなので省略し、ここでは最後の不等式のみを示す。

まず、$B_{0,1} = B_{0,1}(a) = \theta\{\eta^{(0)}(a)\}^2$ に対し $J = B_{0,1}(b) - B_{0,1}(a)$ とし、$(w,z) \in \Sigma(w_1, z_1)$ $(z_1 \le z \le w \le w_1)$ に対して

$$|J| \le C_0(|b-a|^{2\tau} + |b-a|) \tag{49}$$

となることを示すが、これが成り立てば ν は台が $\Sigma(w_1, z_1)$ に含まれる確率測度なので、

$$|h(b) - h(a)| = |\langle J \rangle| \le \langle |J| \rangle \le C_0(|b-a|^{2\tau} + |b-a|)$$

となって目指す不等式が得られることになる。なお、これは $a < b$ に対して示せばよいので、以下そう仮定する。

まず、$\eta^{(0)}(a) = \eta^{(0)}(b) = 0$ のときは (49) は当然成立するが、これは $z \le w \le a$ の場合、$a \le z \le w \le b$ の場合、および $b \le z \le w$ の場合に対応する。

また、$\eta^{(0)}(a) = 0$ でかつ $\eta^{(0)}(b) > 0$ のときは、$a \le z < b < w$ で、よって

$$\begin{aligned} |J| &= \theta\{\eta^{(0)}(b)\}^2 \ = \ \theta(w-b)^{2\tau}(b-z)^{2\tau} \\ &\le \theta(w-z)^{2\tau}(b-a)^{2\tau} \ \le \ \theta(w_1-z_1)^{2\tau}(b-a)^{2\tau} \end{aligned} \tag{50}$$

となる。

次に $\eta^{(0)}(a) > 0$ でかつ $\eta^{(0)}(b) = 0$ のときは、$z < a < w \leq b$ で、よって

$$\begin{aligned} |J| &= \theta\{\eta^{(0)}(a)\}^2 = \theta(w-a)^{2\tau}(a-z)^{2\tau} \\ &\leq \theta(b-a)^{2\tau}(w-z)^{2\tau} \leq \theta(w_1-z_1)^{2\tau}(b-a)^{2\tau} \end{aligned} \tag{51}$$

となる。

最後に $\eta^{(0)}(a) > 0$ でかつ $\eta^{(0)}(b) > 0$ のときは、$z < a < b < w$ で、よって $(b-z)^{2\tau} \leq (w-z)^{2\tau}$, $(w-a)^{2\tau} \leq (w-z)^{2\tau}$ より

$$\begin{aligned} |J| &\leq \theta|(w-b)^{2\tau}(b-z)^{2\tau} - (w-a)^{2\tau}(a-z)^{2\tau}| \\ &\leq \theta|(w-b)^{2\tau} - (w-a)^{2\tau}|(b-z)^{2\tau} \\ &\quad +\theta(w-a)^{2\tau}|(b-z)^{2\tau} - (a-z)^{2\tau}| \\ &\leq \theta(w_1-z_1)^{2\tau}\{|(w-b)^{2\tau} - (w-a)^{2\tau}| + |(b-z)^{2\tau} - (a-z)^{2\tau}|\} \end{aligned} \tag{52}$$

となるが、$2\tau \geq 1$ の場合は、中間値の定理によりある c_1, c_2 があって

$$\begin{aligned} |(w-b)^{2\tau} - (w-a)^{2\tau}| &= 2\tau(w-c_1)^{2\tau-1}(b-a) \leq 2\tau(w_1-z_1)^{2\tau-1}(b-a), \\ |(b-z)^{2\tau} - (a-z)^{2\tau}| &= 2\tau(c_2-z)^{2\tau-1}(b-a) \leq 2\tau(w_1-z_1)^{2\tau-1}(b-a) \end{aligned}$$

となるので、(52) より

$$|J| \leq 4\tau\theta(w_1-z_1)^{4\tau-1}(b-a) \tag{53}$$

と評価される。また $0 < 2\tau < 1$ の場合は、$0 < x < y$ に対して

$$0 < y^{2\tau} - x^{2\tau} \leq (y-x)^{2\tau}$$

が成り立つので、(52) より

$$|J| \leq 2\theta(w_1-z_1)^{2\tau}(b-a)^{2\tau} \tag{54}$$

と評価される。

よって、(50), (51), (53), (54) より、C_0 を

$$C_0 = \begin{cases} \theta\max\{4\tau(w_1-z_1)^{4\tau-1}, (w_1-z_1)^{2\tau}\} & (2\tau \geq 1 \text{ のとき}), \\ 2\theta(w_1-z_1)^{2\tau} & (0 < 2\tau < 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{55}$$

ととれば、(49) が成立することになる。■

5 $B_n^{(0)}$ の有界性と極限

本節では、$B_n^{(0)}$ の一様有界性と、その $n \to \infty$ に関する極限を考える。なおここでは、η_n, σ_n の最終的な展開式 (36), (42) を用いるのではなく、最後の部分積分を実行する前の式 (25), (26) を利用し、$B_n^{(0)}$ の式変形と H の性質により、最後の部分積分で現れる強い特異性を回避する方向で考える。

まず (25), (26) の H の部分をそれぞれ

$$F_2(x) = H_{1,1,[\tau]+1}(x), \quad F_3(x) = H_{2,1,[\tau]+1}(x) \tag{56}$$

と書くことにすると、η_n, σ_n は

$$\begin{cases} \eta_n &= \dfrac{(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)} \displaystyle\int_0^\infty (-\Psi'_n(x)) F_2(x) dx, \\ \sigma_n &= -\theta \dfrac{(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(-\tau)} \displaystyle\int_0^\infty (-\Psi'_n(x)) F_3(x) dx \end{cases} \tag{57}$$

となり、$B_n^{(0)}$ を

$$B_n^{(0)} = \eta^{(0)}\sigma_n - \eta_n\sigma^{(0)} = \eta^{(0)}(\sigma_n + \theta(w-a)\eta_n) = \frac{\theta(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)} \eta^{(0)} I_n^{(0)} \tag{58}$$

と書き表すと、$I_n^{(0)}$ は、

$$\begin{aligned} I_n^{(0)} &= \int_0^\infty \Psi'_n(x)\{(w-z)F_3(x) - (w-a)F_2(x)\} dx \\ &= (w-z) \int_0^\infty \Psi'_n(x)\{F_3(x) - \beta F_2(x)\} dx \end{aligned} \tag{59}$$

となる。なお、以後本稿を通して

$$\begin{aligned} &\beta = \frac{w-a}{w-z}, \quad N_n = n(w-z), \quad W_n = n(w-a) = \beta N_n, \\ &Z_n = n(z-a) = W_n - N_n = (\beta - 1) N_n \end{aligned} \tag{60}$$

とする。この $I_n^{(0)}$ の有界性と極限を考える。(59) を

$$
\begin{aligned}
I_n^{(0)} &= (w-z)\int_0^\infty \Psi'_n(x)\{F_3(x)-xF_2(x)\}dx \\
&\quad +(w-z)\int_0^\infty \Psi'_n(x)(x-\beta)F_2(x)dx \;=\; I_{n,1}^{(0)}+I_{n,2}^{(0)}
\end{aligned}
$$

のように分けて考える。命題 1 より、

$$
F_3(x)-xF_2(x)=H_{2,1,[\tau]+1}(x)-xH_{1,1,[\tau]+1}(x)=-H_{1,1,[\tau]}(x)
$$

となる。ここで $F_4(x)=H_{1,1,[\tau]}(x)$ とすると、命題 1 より $F_4(x)$ は連続で、

$$
F'_4(x)=-\tau H_{1,1,[\tau]+1}(x)=-\tau F_2(x),\quad F_4(\infty)=F_4(+0)=0 \tag{61}
$$

となるので $I_{n,1}^{(0)}$ は部分積分できて、(61) より

$$
I_{n,1}^{(0)}=(w-z)\int_0^\infty \Psi'_n(x)\{-F_4(x)\}dx=-\tau(w-z)\int_0^\infty \Psi_n(x)F_2(x)dx
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
(w-z)\Psi_n(x) &= (w-z)\psi_n(w-(w-z)x) \;=\; N_n\psi_0(W_n-N_nx) \\
&= N_n\psi_0(N_n(\beta-x))
\end{aligned}
$$

なので、置換積分により、

$$
I_{n,1}^{(0)}=-\tau\int_0^\infty N_n\psi_0(N_n(\beta-x))F_2(x)dx=-\tau\int_{-\infty}^{W_n}\psi_0(t)F_2\left(\beta-\frac{t}{N_n}\right)dt \tag{62}
$$

となる。

一方、$I_{n,2}^{(0)}$ に関しては、

$$
(w-z)(x-\beta)\Psi'_n(x)=N_n(x-\beta)\frac{d}{dx}\psi_0(N_n(\beta-x))=N_n^2(\beta-x)\psi'_0(N_n(\beta-x))
$$

となるが、以後一般に $\phi(s)\in\mathcal{S}$ に対して

$$
\tilde{\phi}(s)=-s\phi'(s)=\phi(s)-(s\phi(s))'\in\mathcal{S} \tag{63}
$$

と書くことにする。なお、

$$\int_{\boldsymbol{R}} \tilde{\phi}(s)ds = \int_{\boldsymbol{R}} (\phi(s) - (s\phi(s))')ds = \int_{\boldsymbol{R}} \phi(s)ds$$

となることに注意する。これにより、

$$(w-z)(x-\beta)\Psi_n'(x) = -N_n\tilde{\psi}_0(N_n(\beta - x))$$

となるので、

$$I_{n,2}^{(0)} = -\int_0^\infty N_n\tilde{\psi}_0(N_n(\beta-x))F_2(x)dx = -\int_{-\infty}^{W_n} \tilde{\psi}_0(t)F_2\left(\beta - \frac{t}{N_n}\right)dt \tag{64}$$

となる。よって (62), (64) より、

$$I_n^{(0)} = I_{n,1}^{(0)} + I_{n,2}^{(0)} = -\int_{-\infty}^{W_n}\{\tau\psi_0(t) + \tilde{\psi}_0(t)\}F_2\left(\beta - \frac{t}{N_n}\right)dt \tag{65}$$

となる。

(58) にあるように、$B_n^{(0)}$ には $I_n^{(0)}$ に $\eta^{(0)}$ 倍があるから $I_n^{(0)}$ の評価では $z<a<w$ と考えてよい。このとき、$n\to\infty$ に対して $W_n = n(w-a) \to \infty$ となり、$\tau\psi_0 + \tilde{\psi}_0 \in \mathcal{S}$ で、また $z<a<w$ では $0<\beta<1$ なので、(65) は $n\to\infty$ に対して

$$I_n^{(0)} \to -F_2(\beta)\int_{\boldsymbol{R}}\{\tau\psi_0(t)+\tilde{\psi}_0(t)\}dt = -(\tau+1)F_2(\beta)\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt \tag{66}$$

となるように見える。しかし、$F_2(x)$ は $x=1$ の近くで有界ではないので、そこは細かく考える必要がある。

ここでは、$\mu_0(t) = -\tau\psi_0(t) - \tilde{\psi}_0(t) \in \mathcal{S}$ と置いて、

$$I_n^{(0)} = \int_{-\infty}^{W_n} \mu_0(t)F_2\left(\beta - \frac{t}{N_n}\right)dt = \int_0^\infty N_n\mu_0(N_n(\beta - x))F_2(x)dx \tag{67}$$

とする。なお、$F_2(x)$ は $x=1$ の近くでは有界ではないが、そこでは命題 1 より対数オーダーで、よって $|x-1|\le 1/2$ に対して

$$|F_2(x)| \le |\log|x-1|| + C_1 = -\log|x-1| + C_1 \tag{68}$$

となる定数 C_1 が取れる。

もし (66) の極限が正しいとしても、$F_2(\beta)$ は $\beta = 1$、すなわち $a = w$ の近くでは有界ではないので、$I_n^{(0)}$ 単独では一様有界とはなり得ない。そこで、$B_n^{(0)}$ の $I_n^{(0)}$ の積に含まれる $\eta^{(0)}$ から $(a-z)^p$ $(0 < p < \tau)$ を借りてきて、これを用いて有界性を考えてみる。なお、p は例えば $p = \tau/2$ とすればよい。

$\beta = (w-a)/(w-z)$ より $a-z = (w-z)-(w-a) = (w-z)(1-\beta)$ であり、$z < a < w$ より $0 < \beta < 1$ なので、

$$\delta = \frac{1-\beta}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{69}$$

として、

$$(a-z)^p I_n^{(0)} = (a-z)^p \int_{1-\delta}^{1+\delta} dx + (a-z)^p \left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{\infty}\right) dx = I_{n,3}^{(0)} + I_{n,4}^{(0)} \tag{70}$$

の 2 つに分けて考える。

$I_{n,3}^{(0)}$ では、

$$x - \beta \geq 1 - \delta - \beta = \frac{1-\beta}{2} = \delta > 0$$

なので、

$$\begin{aligned} I_{n,3}^{(0)} &= (a-z)^p \int_{1-\delta}^{1+\delta} N_n \mu_0(N_n(\beta - x)) F_2(x) dx \\ &= (w-z)^p (1-\beta)^p \int_{1-\delta}^{1+\delta} \frac{\mu_{0,1}(N_n(\beta - x))}{\beta - x} F_2(x) dx \end{aligned} \tag{71}$$

とできる。ここで、$\mu_{0,1}(t) = t\mu_0(t) \in \mathcal{S}$ とした。これにより、

$$|I_{n,3}^{(0)}| \leq (w-z)^p (2\delta)^p \frac{1}{\delta} \|\mu_{0,1}\|_{L^\infty} \int_{1-\delta}^{1+\delta} |F_2(x)| dx$$

と評価される。この最後の積分は、$\delta < 1/2$ より (68) を用いれば、

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} |F_2(x)| dx \leq \int_{1-\delta}^{1+\delta} (C_1 - \log|x-1|) dx = 2\delta(C_1 + 1 - \log\delta)$$

となるから、

$$|I_{n,3}^{(0)}| \le 2^{p+1}(w-z)^p\delta^p(C_1+1-\log\delta)\|\mu_{0,1}\|_{L^\infty} \tag{72}$$

となり、よって $w, z \in [z_1, w_1]$, $z < a < w$ 上 $I_{n,3}^{(0)}$ は n に関して一様有界であることがわかる。なお、$\|\mu_{0,1}\|_{L^\infty}$ は

$$\|\mu_{0,1}\|_{L^\infty} \le \tau\|t\psi_0(t)\|_{L^\infty} + \|t^2\psi_0'(t)\|_{L^\infty}$$

なので、$\psi_0 \in \mathcal{S}$ ならば有界である。

$I_{n,4}^{(0)}$ の方は、$F_2(x)$ が $x=1$ の近くでなければ有界なので、$|x-1| \ge 1/2$ ならば $|F_2(x)| \le C_2$ と評価できるが、$\delta \le |x-1| \le 1/2$ では (68) より、

$$|F_2(x)| \le -\log|x-1| + C_1 \le C_1 - \log\delta$$

となり、よってすべての $|x-1| \ge \delta$ で

$$|F_2(x)| \le C_2 + C_1 - \log\delta$$

となるので、

$$\begin{aligned} |I_{n,4}^{(0)}| &\le (a-z)^p(C_2+C_1-\log\delta)\left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{\infty}\right) N_n|\mu_0(N_n(\beta-x))|dx \\ &\le 2^p(w-z)^p\delta^p(C_2+C_1-\log\delta)\|\mu_0\|_{L^1} \end{aligned} \tag{73}$$

と評価でき、これも一様有界となる。なお、$\|\mu_0\|_{L^1}$ は、

$$\|\mu_0\|_{L^1} \le \tau\|\psi_0(t)\|_{L^1} + \|t\psi_0'(t)\|_{L^1} < \infty$$

である。(72), (73) により、$(a-z)^p I_n^{(0)}$ の一様有界性が保証される。

次は極限。まず $I_{n,3}^{(0)}$ であるが、(71) で考えると、$F_2(x)$ は L^1 であり、$x > 1-\delta$ では $x-\beta > 0$ であり、$N_n \to \infty$ なので、$\mu_{0,1}(N_n(\beta-x)) \to 0$ となる。よって、$I_{n,3}^{(0)}$ は 0 に収束する。

$I_{n,4}^{(0)}$ は、$N_n(\beta-x) = t$ とすると、$1-\beta = 2\delta$ より

$$I_{n,4}^{(0)} = (a-z)^p\left(\int_{-N_n\delta}^{W_n} + \int_{-\infty}^{-3N_n\delta}\right)\mu_0(t)F_2\left(\beta - \frac{t}{N_n}\right)dt$$

となり、$\mu_0(t)$ は L^1 で、$W_n \to \infty, N_n\delta \to \infty$ であり、$F_2(\beta - t/N_n)$ は、$|\beta - t/N_n - 1| \geq \delta$ より有界で $F_2(\beta - t/N_n) \to F_2(\beta)$ となるから、Lebesgue 収束定理より

$$I_{n,4}^{(0)} \to (a-z)^p F_2(\beta) \int_{\boldsymbol{R}} \mu_0(t) dt$$

となる。ここで、

$$\int_{\boldsymbol{R}} \mu_0(t) dt = -\int_{\boldsymbol{R}} (\tau\psi_0(t) + \tilde{\psi}_0(t)) dt = -(\tau+1) \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t) dt$$

なので、以上をまとめると、$(a-z)^p I_n^{(0)}$ は一様有界で、$n \to \infty$ に対して、

$$(a-z)^p I_n^{(0)} \to -(\tau+1)(a-z)^p F_2(\beta) \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t) dt \tag{74}$$

となる。

命題 4

$B_n^{(0)}$ は $w, z \in [z_1, w_1]$, $a \in \boldsymbol{R}$ 上 n に関して一様有界で、$n \to \infty$ に対し、

$$B_n^{(0)} \to J_0(w,z,a) \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t) dt, \quad J_0(w,z,a) = -\theta(\tau+1) \frac{(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)} \eta^{(0)} F_2(\beta)$$

となる。

6 $B_n^{(1)}$ の有界性と極限

次は $B_n^{(1)}$ の有界性と極限について考察する。本節でも、5 節同様最後の部分積分の手前の式 (57) を利用する。まず、(9) より

$$B_n^{(1)} = \eta^{(1)} \sigma_n - \eta_n \sigma^{(1)} = \eta^{(1)} (\sigma_n + \theta(w-a)\eta_n) - \theta\eta^{(0)} \eta_n$$

となるので、

$$B_n^{(1)} = \frac{\theta(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)} (\eta^{(1)} I_n^{(0)} - \eta^{(0)} I_n^{(1)}) \tag{75}$$

とすると、$I_n^{(1)}$ は

$$I_n^{(1)} = \frac{\Gamma(-\tau)}{(w-z)^\tau}\eta_n = \int_0^\infty (-\Psi_n'(x))F_2(x)dx \tag{76}$$

となる。

(75) の前半部分については、5 節の議論が利用できるが、(9) より $\eta^{(1)}$ には特異性があり得るので、$(a-z)^p$ の借用は $p=\tau/2$ 程度に留め、残りが a に関して L^1 であるようにする必要がある。

一方 (75) の後半部分の $I_n^{(1)}$ の方であるが、こちらは $I_n^{(0)}$ の F_4 や $(x-\beta)F_2$ に比べて一つ特異性の次数が高いので、$\eta^{(0)}$ から $(a-z)^{1+p}$ 程度を借用する必要がある。実は部分積分の境界値のため、別な借用が必要な項も出てくる。いずれも残りの部分には有界性はなく、a に関して L^1 しか確保されない。まずは $(a-z)$ の借用から。

$$\begin{aligned}(a-z)I_n^{(1)} &= (w-z)\int_0^\infty (-\Psi_n'(x))(1-\beta)F_2(x)dx\\ &= (w-z)\int_0^\infty (-\Psi_n')(1-x)F_2(x)dx + (w-z)\int_0^\infty (-\Psi_n')(x-\beta)F_2(x)dx\\ &= I_{n,1}^{(1)} + I_{n,2}^{(1)}\end{aligned}$$

と分けると、命題 1 より、

$$(1-x)F_2(x) = (1-x)H_{1,1,[\tau]+1}(x) = H_{1,2,[\tau]+1}(x) - H_{1,1,[\tau]}(x)$$

となり、$F_5(x) = H_{1,2,[\tau]+1}(x)$ とするとこの最後の式は $F_5(x)-F_4(x)$ となる。命題 1 より $F_5(x)$ は連続で、

$$F_5'(x) = -(\tau+1)F_6(x) \quad F_5(\infty)=0,\ \ F_5(+0) = B(\tau+1,-\tau) = B_\tau \tag{77}$$

となる。ここで、$F_6(x)$ は

$$F_6(x) = H_{1,2,[\tau]+2}(x) \tag{78}$$

とした。これらにより $I_{n,1}^{(1)}$ を部分積分すると、(61), (77) より

$$\begin{aligned}I_{n,1}^{(1)} &= (w-z)\int_0^\infty (-\Psi_n'(x))(F_5(x)-F_4(x))dx\\ &= (w-z)\Psi_n(0)B_\tau + (w-z)\int_0^\infty \Psi_n(x))\{-(\tau+1)(F_6(x)+\tau F_2(x)\}dx\end{aligned}$$

となる。この最後の式を $I_{n,1,1}^{(1)}+I_{n,1,2}^{(1)}$ とする。

部分積分の境界値である $I_{n,1,1}^{(1)}=(w-z)\Psi_n(0)B_\tau=N_n\psi_0(W_n)B_\tau$ は、さらに $\eta^{(0)}$ から $(w-a)$ を借りれば、$\psi_{0,1}(s)=s\psi_0(s)$ $(\in\mathcal{S})$ とすると

$$(w-a)I_{n,1,1}^{(1)}=(w-z)W_n\psi_0(W_n)B_\tau=(w-z)\psi_1(W_n)B_\tau$$

と書けるので一様有界であることがわかる。さらに、$z<a<w$ では $W_n\to\infty$ なので、$n\to\infty$ のときにこれは 0 に収束する。

また、$I_{n,1,2}^{(1)}$ の方は、$F_6(x)$, $F_2(x)$ が $x=1$ で log オーダーだから、$I_n^{(0)}$ の場合と同様に、$\eta^{(0)}$ からさらに $(a-z)^{\tau/2}$ を借りれば $(a-z)^{\tau/2}I_{n,1,2}^{(1)}$ が一様有界となり、

$$(a-z)^{\tau/2}I_{n,1,2}^{(1)}\to(a-z)^{\tau/2}\{-(\tau+1)F_6(\beta)+\tau F_2(\beta)\}\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt \tag{79}$$

となる。

一方 $I_{n,2}^{(1)}$ は 5 節の (64) より $I_{n,2}^{(1)}=-I_{n,2}^{(0)}$ なので、$(a-z)^{\tau/2}$ を借りた $(a-z)^{\tau/2}I_{n,2}^{(1)}$ が一様有界となり、

$$\begin{aligned}(a-z)^{\tau/2}I_{n,2}^{(1)} &= (a-z)^{\tau/2}\int_{-\infty}^{W_n}\tilde{\psi}_0(t)F_2\left(\beta-\frac{t}{N_n}\right)dt\\ \to\ (a-z)^{\tau/2}F_2(\beta)\int_{\boldsymbol{R}}\tilde{\psi}_0(t)dt &= (a-z)^{\tau/2}F_2(\beta)\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt\end{aligned} \tag{80}$$

となる。

以上をまとめると、$I_n^{(1)}$ は、

$$\begin{aligned}I_n^{(1)} &= (w-z)I_{n,3}^{(1)}+I_{n,4}^{(1)}\\ &\quad (I_{n,3}^{(1)}=I_{n,1,1}^{(1)}/\{(a-z)(w-z)\},\ \ I_{n,4}^{(1)}=(I_{n,1,2}^{(1)}+I_{n,2}^{(1)})/(a-z))\end{aligned}$$

に分けられ、$(w-a)(a-z)I_{n,3}^{(1)}$ $(=\psi_1(W_n)B_\tau)$ と $(a-z)^{1+\tau/2}I_{n,4}^{(1)}$ が一様有界で、

$$\begin{aligned}(w-a)(a-z)I_{n,3}^{(1)} &\to 0,\\ (a-z)^{1+\tau/2}I_{n,4}^{(1)} &\to (a-z)^{\tau/2}(\tau+1)\{F_2(\beta)-F_6(\beta)\}\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt\end{aligned}$$

となる。なお、F_2-F_6 は、命題 1 により、

$$\begin{aligned}F_2(x)-F_6(x) &= H_{1,1,[\tau]+1}(x)-H_{1,2,[\tau]+2}(x) = (x-1)H_{1,1,[\tau]+2}(x)\\ &= (x-1)F_0(x)\end{aligned}$$

となるが、(31), (32) より

$$(x-1)F_0(x) = (x-1)\bar{F}_0(x) + \xi(x)\left(\frac{1}{\tau+1} + \tau(x-1)\log|x-1|\right)$$

なので $(x-1)F_0(x)$ は連続かつ可積分な関数となる。

命題 5

$B_n^{(1)}$ は、

$$\begin{aligned}
B_n^{(1)} &= \frac{\theta(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)}\left\{\frac{\eta^{(1)}}{(a-z)^{\tau/2}} \times (a-z)^{\tau/2} I_n^{(0)}\right. \\
&\quad - \frac{(w-z)\eta^{(0)}}{(w-a)(a-z)} \times (w-a)(a-z) I_{n,3}^{(1)} \\
&\quad \left. - \frac{\eta^{(0)}}{(a-z)^{1+\tau/2}} \times (a-z)^{1+\tau/2} I_{n,4}^{(1)}\right\}
\end{aligned}$$

のように、a に関して L^1 の項と一様有界の項の積にそれぞれ分けることができ、その極限は

$$\begin{aligned}
B_n^{(1)} &\to J_1(w,z,a)\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t)dt, \\
J_1(w,z,a) &= (\tau+1)\frac{\theta(w-z)^\tau}{\Gamma(-\tau)}\left\{-\eta^{(1)}F_2(\beta) + \frac{\eta^{(0)}}{a-z}(1-\beta)F_0(\beta)\right\}
\end{aligned}$$

となる。

7 $B_n^{(1)}$ の特異性の回避と Tartar 方程式

5 節では $B_n^{(0)}$ の有界性とその極限、6 節では $B_n^{(1)}$ の有界性とその極限を求めたが、実は $B_n^{(1)}$ の方は $\tau < 1$ の場合には $w = a, z = a$ で特異性を持つので、このままでは ν での積分ができない。すなわち、w, z が a の近くで $\eta^{(1)}$ は有界ではないので、$\langle\eta^{(1)}\rangle = \langle\nu, \eta^{(1)}\rangle$ が有限であるという保証がない。

本節ではそれを回避するために、命題 5 の評価にもとづいて、ν よりも先に a での積分を行うような式が得られかどうかを考察する。

まず、$\eta^{(1)}$ を生成するための極限に戻して考える。$\phi_0 \in \mathcal{S}$ で $\int_{\boldsymbol{R}} \phi_0(t)dt = 1$ となるものを一つ取り、

$$\phi_m(s) = m\phi_0(m(s-a)) \quad (m \in \boldsymbol{N})$$

とし、

$$\begin{cases} \eta_m^{(1)} &= \displaystyle\int_z^w (w-s)^\tau (s-z)^\tau (-\phi_m'(s))ds, \\ \sigma_m^{(1)} &= -\theta \displaystyle\int_z^w (w-s)^{\tau+1} (s-z)^\tau (-\phi_m'(s))ds \end{cases} \tag{81}$$

とする。当然これらは滑らかで、$m \to \infty$ のときに $a = w,\ a = z$ を除いて $\eta_m^{(1)} \to \eta^{(1)},\ \sigma_m^{(1)} \to \sigma^{(1)}$ となる。$\eta_n,\ \sigma_n$ は、(57) で考えれば a, w, z に関して滑らかで、$\eta^{(0)}, \sigma^{(0)}$ も連続であり、よって m の極限を取る前の段階では、当然

$$\begin{cases} B_{n,m}^{(1)} &= \eta_m^{(1)}\sigma_n - \eta_n\sigma_m^{(1)}, \\ B_{0,1,m} &= \eta^{(0)}\sigma_m^{(1)} - \eta_m^{(1)}\sigma^{(0)} \end{cases} \tag{82}$$

は滑らかなので、問題なく ν で積分ができ、Darboux エントロピーに対して Tartar 方程式が成り立てば、前の考察 [3] と同様にして、

$$\langle B_{0,1,m}\rangle\langle B_n\rangle = \langle B_n^{(0)}\rangle\langle \hat{B}_{n,m}^{(1)}\rangle - \langle \hat{B}_n^{(0)}\rangle\langle B_{n,m}^{(1)}\rangle \tag{83}$$

も成り立つ。

(83) の両辺を a で積分し Fubini の定理を用いると、

$$\int_{\boldsymbol{R}} \langle B_{0,1,m}\rangle\langle B_n\rangle da = \left\langle \int_{\boldsymbol{R}} \left\{ \langle B_n^{(0)}\rangle \hat{B}_{n,m}^{(1)} - \langle \hat{B}_n^{(0)}\rangle B_{n,m}^{(1)} \right\} da \right\rangle \tag{84}$$

と変形できる。この式で $m \to \infty$ の極限を取ることで

$$\int_{\boldsymbol{R}} h(a)\langle B_n\rangle da = \left\langle \int_{\boldsymbol{R}} \left\{ \langle B_n^{(0)}\rangle \hat{B}_n^{(1)} - \langle \hat{B}_n^{(0)}\rangle B_n^{(1)} \right\} da \right\rangle \tag{85}$$

の式を得ることができるかどうか、そしてさらにこの式の右辺の $n \to \infty$ の極限を考察するのが本節の目標である。それには次の順で検討していく。

- (B1) (84) の左辺の $m \to \infty$ のときの極限

- (B2) n を固定した上で、

$$\int_{\boldsymbol{R}} |B_{n,m}^{(1)}| da$$

が $w, z \in [z_1, w_1]$ 上 m に関して一様有界であること

- (B3) n を固定した上で、$m \to \infty$ のときに

$$\int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle B_{n,m}^{(1)} da \to \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle B_n^{(1)} da$$

となること

- (B4) $w, z \in [z_1, w_1]$ 上

$$\int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle B_n^{(1)} da$$

が n に関して一様有界であること、およびその $n \to \infty$ のときの極限

まずは (B1) から考える。$B_{0,1,m}$ は、

$$\begin{aligned}
B_{0,1,m} &= \eta^{(0)}(\sigma_m^{(1)} + \theta(w-a)\eta_m^{(1)}) \\
&= \theta\eta^{(0)}(a) \int_z^w \eta^{(0)}(s)\{-(w-s)+(w-a)\}(-\phi_m'(s))ds \\
&= \theta\eta^{(0)}(a) \int_z^w \eta^{(0)}(s)(-(s-a)\phi_m'(s))ds
\end{aligned}$$

であるが、

$$-(s-a)\phi_m'(s) = -(s-a)m^2\phi_0'(m(s-a)) = m\tilde{\phi}_0(m(s-a))$$

となるので、これを $\tilde{\phi}_m(s)$ と書けば

$$\int_{\boldsymbol{R}} \tilde{\phi}_m(s)ds = \int_{\boldsymbol{R}} \tilde{\phi}_0(t)dt = \int_{\boldsymbol{R}} \phi_0(t)dt = 1$$

となり、$B_{0,1,m}$ は

$$B_{0,1,m} = \theta\eta^{(0)}(a) \int_z^w \eta^{(0)}(s)\tilde{\phi}_m(s)ds \tag{86}$$

となる。$\eta^{(0)}(s)$ は有界なので、

$$|B_{0,1,m}| \leq \theta\eta^{(0)}(a)\|\eta^{(0)}\|_{L^\infty}\int_{\boldsymbol{R}}|\tilde{\phi}_m(s)|ds = \theta\eta^{(0)}(a)\|\eta^{(0)}\|_{L^\infty}\|\tilde{\phi}_0\|_{L^1}$$

となり、よって $w,z\in[z_1,w_1]$ 上 $B_{0,1,m}$ は m に関して一様有界で、

$$B_{0,1,m} = \theta\eta^{(0)}(a)\int_{Z_m}^{W_m}\eta^{(0)}\left(a+\frac{t}{m}\right)\tilde{\phi}_0(t)dt$$

と置換すると、$\eta^{(0)}(s)$ は有界でかつ連続であり、$\eta^{(0)}(a)$ 倍があるので $z<a<w$ と考えてよく (その他の場合は 0)、そのとき $m\to\infty$ に対して $Z_m\to-\infty, W_m\to\infty$ となるので Lebesgue 収束定理より、

$$B_{0,1,m}\to\theta\eta^{(0)}(a)\int_{\boldsymbol{R}}\eta^{(0)}(a)\tilde{\phi}_0(t)dt = \theta\eta^{(0)}(a)^2$$

となり、$B_{0,1,m}$ の有界性から再び Lebesgue 収束定理より

$$\langle B_{0,1,m}\rangle\to\theta\langle\eta^{(0)}(a)^2\rangle = h(a) \tag{87}$$

となることがわかる。

そして、(86) より $B_{0,1,m}$ には $\eta^{(0)}(a)$ 倍が含まれるため、(w,z) が ν の台に含まれるとき、$a<z_1$, $a>w_1$ の a に対しては $B_{0,1,m}=0$ となり、よって、$\langle B_{0,1,m}\rangle$ は a の関数として $a<z_1$, $a>w_1$ では 0 となる。

また、n を固定すれば、(57) より B_n は $(w,z)\in\Sigma(w_1,z_1)$ に対して有界で、よって (87) と Lebesgue 収束定理により、

$$\int_{\boldsymbol{R}}\langle B_{0,1,m}\rangle\langle B_n\rangle da = \int_{z_1}^{w_1}\langle B_{0,1,m}\rangle\langle B_n\rangle da\to\int_{\boldsymbol{R}}h(a)\langle B_n\rangle da$$

となり、よってこれで (B1) が示されたことになる。なお、最後の極限は、Fubini の定理を用いると、

$$\int_{\boldsymbol{R}}h(a)\langle B_n\rangle da = \left\langle\int_{\boldsymbol{R}}h(a)B_n da\right\rangle \tag{88}$$

と書くこともできる。

次は (B2)。n を固定していれば (57) より η_n, σ_n は $w,z\in[z_1,w_1]$, $a\in\boldsymbol{R}$ 上有界でかつ連続となる。$\eta_m^{(1)}$ は、部分積分により、

$$
\begin{aligned}
\eta_m^{(1)} &= \int_z^w \eta^{(0)}(s)(-\phi_m'(s))ds \ = \ \int_z^w \{\eta^{(0)}(s)\}'\phi_m(s)ds \\
&= \tau\int_z^w \{-(w-s)^{\tau-1}(s-z)^\tau+(w-s)^\tau(s-z)^{\tau-1}\}\phi_m(s)ds
\end{aligned} \tag{89}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}}|\eta_m^{(1)}|da \\
&\leq \ \tau\int_z^w\{(w-s)^{\tau-1}(s-z)^\tau+(w-s)^\tau(s-z)^{\tau-1}\}ds\int_{\boldsymbol{R}} m|\phi_0(m(s-a))|da \\
&= \ 2\tau(w-z)^{2\tau}\,B(\tau+1,\tau)\|\phi_0\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{90}
$$

より $\int_{\boldsymbol{R}}|\eta_m^{(1)}|da$ は $w,z\in[z_1,w_1]$ 上 m に関して一様有界となる。よって、$\int_{\boldsymbol{R}}|\eta_m^{(1)}\sigma_n|da$ も、n を固定していれば、同じく m に関して一様有界となる。同様に、$\int_{\boldsymbol{R}}|\eta_n\sigma_m^{(1)}|da$ の m に関する一様有界性も容易に示され、これで

$$
\int_{\boldsymbol{R}}|B_{n,m}^{(1)}|da=\int_{\boldsymbol{R}}|\eta_n\sigma_m^{(1)}-\eta_m^{(1)}\sigma_n|da
$$

が $w,z\in[z_1,w_1]$ 上 m に関して一様有界であること、すなわち (B2) が示されたことになる。

そして、命題 4 より、$\hat{B}_n^{(0)}$ は n を固定しなくても $w,z\in[z_1,w_1]$, $a\in\boldsymbol{R}$ 上 (n に関して一様に) 有界だから、$\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle$ も a に関して有界となり、よってこの (B2) により

$$
\int_{\boldsymbol{R}}\left|\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle B_{n,m}^{(1)}\right|da
$$

も $w,z\in[z_1,w_1]$, $a\in\boldsymbol{R}$ 上 m に関して一様有界となる。

次は (B3)。まずは

$$
\int_{\boldsymbol{R}}\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle B_{n,m}^{(1)}da=\int_{\boldsymbol{R}}\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle(\eta_m^{(1)}\sigma_n-\eta_n\sigma_m^{(1)})da \tag{91}
$$

の前半の方を考えると、

$$
\int_{\boldsymbol{R}}\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle\eta_m^{(1)}\sigma_n da \ = \ \int_{\boldsymbol{R}}\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle\sigma_n da\int_z^w\eta^{(0)}(s)(-\phi_m'(s))ds
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \sigma_n da \int_z^w \eta^{(1)}(s)\phi_m(s)ds \\
&= \int_z^w \eta^{(1)}(s)ds \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle (a)\sigma_n(a) m\phi_0(m(s-a))da \\
&= \int_z^w \eta^{(1)}(s)ds \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \left(s - \frac{t}{m}\right) \sigma_n \left(s - \frac{t}{m}\right) \phi_0(t)dt
\end{aligned}
\tag{92}
$$

となるが、

$$
\eta^{(1)}(s) = \tau(w-s)^{\tau-1}(s-z)^{\tau-1}(w+z-2s)X_0(w,z;s)
$$

は s に関して L^1、$\langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle (a), \sigma_n(a)$ は固定した n に対しては a に関して連続でかつ有界となる。ϕ_0 は L^1 なので、よって Lebesgure 収束定理が適用でき、$m \to \infty$ のときに (92) は

$$
\begin{aligned}
\int_z^w \eta^{(1)}(s)ds \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle (s)\sigma_n(s)\phi_0(t)dt &= \int_z^w \eta^{(1)}(s) \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle (s)\sigma_n(s)ds \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle (a)\eta^{(1)}(a)\sigma_n(a)da
\end{aligned}
$$

に収束する。(91) の後半もほぼ同様にして

$$
\int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \eta_n \sigma_m^{(1)} da \to \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \eta_n \sigma^{(1)} da
$$

が示されるので、以上により $m \to \infty$ のとき

$$
\int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle B_{n,m}^{(1)} da = \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle (\eta_n \sigma_m^{(1)} - \eta_n \sigma^{(1)}) da \to \int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle B_n^{(1)} da \tag{93}
$$

となり、これで (B3) が示された。

なお、$0 < \tau < 1$ のときは元々 $B_n^{(1)}$ には $a = w, a = z$ で特異性があるが、(93) の極限の右辺は、a での積分によりその特異性は消えてしまうため、この式を ν で積分することができるようになり、よってこの極限の w, z に関する有界性さえ保証されれば (93) の右辺は ν に関して可積分となる

最後は (B4)。まずは $\int_{\boldsymbol{R}} \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle B_n^{(1)} da$ の $w, z \in [z_1, w_1]$ 上の n に関する一様有界性とその極限であるが、命題 4 より $\hat{B}_n^{(0)}$ は $w, z \in [z_1, w_1]$, $a \in \boldsymbol{R}$ 上 n に関して一様有界だから $\langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle$ も $a \in \boldsymbol{R}$ 上 n に関して一様有界となる。また、$\hat{B}_n^{(0)}$ の極限は命題 4 だったので、Lebesgue 収束定理により、

$$
\langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \to \langle J_0(w,z,a) \rangle \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \tag{94}
$$

となる。一方 $B_n^{(1)}$ は命題 5 のように分けると、a に関する L^1 の部分の積分は、それぞれ

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}}\left|\frac{\eta^{(1)}}{(a-z)^{\tau/2}}\right|da &\le \tau\int_z^w\{(w-a)^{\tau-1}(a-z)^{\tau/2}+(w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau/2-1}\}da\\
&= \tau(w-z)^{3\tau/2}(B(\tau,\tau/2+1)+B(\tau+1,\tau/2)),\\
\int_{\boldsymbol{R}}\frac{(w-z)\eta^{(0)}}{(w-a)(a-z)}da &= (w-z)\int_z^w(w-a)^{\tau-1}(a-z)^{\tau-1}da\\
&= (w-z)^{2\tau}\,B(\tau,\tau),\\
\int_{\boldsymbol{R}}\frac{\eta^{(0)}}{(a-z)^{1+\tau/2}}da &= \int_z^w(w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau/2-1}da\\
&= (w-z)^{3\tau/2}\,B(\tau+1,\tau/2)
\end{aligned}$$

となり確かに L^1 で、その積分も $w,z\in[z_1,w_1]$ 上有界であるから、$\int_{\boldsymbol{R}}\left|B_n^{(1)}\right|da$ は $w,z\in[z_1,w_1]$ 上 n に関して一様有界となる。そして

$$\int_{\boldsymbol{R}}\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle B_n^{(1)}da=\int_z^w\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle B_n^{(1)}da$$

も $w,z\in[z_1,w_1]$ 上 n に関して一様有界となることがわかる。この極限は、命題 5, (94) と Lebesgue 収束定理により、

$$\int_{\boldsymbol{R}}\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle B_n^{(1)}da\to\int_z^w\langle J_0(w,z,a)\rangle J_1(w,z,a)da\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(t)dt \tag{95}$$

となる。同様に、$\int_{\boldsymbol{R}}\langle B_n^{(0)}\rangle\hat{B}_n^{(1)}da$ の極限は、(95) の ψ_0 と $\hat{\psi}_0$ を入れ替えただけのものなので、極限値は同じものとなる。よって、

$$\int_{\boldsymbol{R}}\left\{\langle B_n^{(0)}\rangle\hat{B}_n^{(1)}-\langle\hat{B}_n^{(0)}\rangle B_n^{(1)}\right\}da \tag{96}$$

は $w,z\in[z_1,w_1]$ 上 n に関して一様有界で、$n\to\infty$ のときに 0 に収束することが示されたことになる。そしてそれにより (96) の ν での積分も可能で、それも $n\to\infty$ のときに 0 に収束することになり、これで (B4) が確定したことになる。

以上により、(84) の $m\to\infty$ の極限により確かに (85) が得られること、そして (85) の右辺が 0 となることがわかり、(88) と合わせて次が得られたことになる。

命題 6

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}}h(a)\langle B_n\rangle da=\lim_{n\to\infty}\left\langle\int_{\boldsymbol{R}}h(a)B_nda\right\rangle=0$$

8 $h(a)B_n$ の積分の評価

本節から、$h(a)B_n$ の a での積分の一様有界性とその極限について考察していく。ここでは、η_n, σ_n は、最後まで部分積分した展開式 (36), (42) を用いる。

まず、簡単のため (36), (42) の積分項を

$$\begin{cases} G_j[\phi] \ = \ \displaystyle\int_0^\infty \phi(x)F_j(x)dx, \quad \bar{G}_j[\phi] \ = \ \displaystyle\int_0^\infty \phi(x)\bar{F}_j(x)dx, \\ L[\phi] \ = \ \displaystyle\int_0^\infty \phi(x)\xi(x)\log|x-1|dx, \\ P[\phi] \ = \ \mathrm{p.v.}\displaystyle\int_0^\infty \phi(x)\frac{\xi(x)}{x-1}dx \end{cases} \tag{97}$$

と書くことにする。また、B_n であるが、少し評価しづらい項を消すために、σ_n の代わりに、$\bar{\sigma}_n = \sigma_n + \theta(w-z)\eta_n$ を用いる。すなわち、

$$\begin{aligned} B_n &= \eta_n\hat{\sigma}_n - \hat{\eta}_n\sigma_n = \eta_n(\hat{\bar{\sigma}}_n - \theta(w-z)\hat{\eta}_n) - \hat{\eta}_n(\bar{\sigma}_n - \theta(w-z)\eta_n) \\ &= \eta_n\hat{\bar{\sigma}}_n - \hat{\eta}_n\bar{\sigma}_n \end{aligned}$$

で考える。この $\bar{\sigma}_n$ は、(36), (42) より

$$\bar{\sigma}_n = \theta\frac{(w-z)^{\tau+1}}{\Gamma(-\tau)}\Big\{B_\tau\psi_n(w) + (\tau+1)\bar{G}_7[\Psi_n] + (\tau+1)L[\Psi_n]\Big\} \tag{98}$$

となる。ここで、$\bar{F}_7(x) = \bar{F}_1(x) - \bar{F}_0(x)$ としたが、これは $x=1$ 以外で連続で、$x>0$ で有界かつ L^1 の関数である。

(36), (97), (98) により、B_n を展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} B_n &= \theta\frac{(w-z)^{2\tau+1}}{\Gamma(-\tau)^2} \\ &\quad \times\Big\{\Big(A_\tau\psi_n(z) + B_\tau\psi_n(w) - (\tau+1)\bar{G}_0[\Psi_n] - \tau(\tau+1)L[\Psi_n] - P[\Psi_n]\Big) \\ &\quad \times\Big(B_\tau\hat{\psi}_n(w) + (\tau+1)\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n] + (\tau+1)L[\hat{\Psi}_n]\Big) \\ &\quad - \Big(A_\tau\hat{\psi}_n(z) + B_\tau\hat{\psi}_n(w) - (\tau+1)\bar{G}_0[\hat{\Psi}_n] - \tau(\tau+1)L[\hat{\Psi}_n] - P[\hat{\Psi}_n]\Big) \\ &\quad \times\Big(B_\tau\psi_n(w) + (\tau+1)\bar{G}_7[\Psi_n] + (\tau+1)L[\Psi_n]\Big)\Big\} \\ &= \theta\frac{(w-z)^{2\tau+1}}{\Gamma(-\tau)^2}\sum_{j=1}^{10} Q_j \end{aligned} \tag{99}$$

ここで、Q_j $(1 \leq j \leq 10)$ は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= A_\tau B_\tau(\psi_n(z)\hat{\psi}_n(w) - \hat{\psi}_n(z)\psi_n(w)), \\
Q_2 &= (\tau+1)A_\tau\left(\psi_n(z)\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n] - \hat{\psi}_n(z)\bar{G}_7[\Psi_n]\right), \\
Q_3 &= (\tau+1)B_\tau\left\{\psi_n(w)(\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n] + \bar{G}_0[\hat{\Psi}_n]) - \hat{\psi}_n(w)(\bar{G}_7[\Psi_n] + \bar{G}_0[\Psi_n])\right\} \\
&= (\tau+1)B_\tau\left(\psi_n(w)\bar{G}_1[\hat{\Psi}_n] - \hat{\psi}_n(w)\bar{G}_1[\Psi_n]\right), \\
Q_4 &= (\tau+1)A_\tau\left(\psi_n(z)L[\hat{\Psi}_n] - \hat{\psi}_n(z)L[\Psi_n]\right), \\
Q_5 &= B_\tau\left(\psi_n(w)L[\hat{\Psi}_n] - \hat{\psi}_n(w)L[\Psi_n]\right)\{(\tau+1) + \tau(\tau+1)\} \\
&= (\tau+1)^2B_\tau\left(\psi_n(w)L[\hat{\Psi}_n] - \hat{\psi}_n(w)L[\Psi_n]\right), \\
Q_6 &= B_\tau\left(\psi_n(w)P[\hat{\Psi}_n] - \hat{\psi}_n(w)P[\Psi_n]\right), \\
Q_7 &= (\tau+1)^2\left(\bar{G}_0[\hat{\Psi}_n]\bar{G}_7[\Psi_n] - \bar{G}_0[\Psi_n]\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n]\right), \\
Q_8 &= (\tau+1)^2\left\{(\bar{G}_0[\hat{\Psi}_n] - \tau\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n])L[\Psi_n] - (\bar{G}_0[\Psi_n] - \tau\bar{G}_7[\Psi_n])L[\hat{\Psi}_n]\right\} \\
&= (\tau+1)^2\left(\bar{G}_8[\hat{\Psi}_n]L[\Psi_n] - \bar{G}_8[\Psi_n]L[\hat{\Psi}_n]\right), \\
Q_9 &= (\tau+1)\left(\bar{G}_7[\Psi_n]P[\hat{\Psi}_n] - \bar{G}_7[\hat{\Psi}_n]P[\Psi_n]\right), \\
Q_{10} &= (\tau+1)\left(L[\Psi_n]P[\hat{\Psi}_n] - L[\hat{\Psi}_n]P[\Psi_n]\right)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\bar{F}_0(x) - \tau\bar{F}_7(x) = -\tau\bar{F}_1(x) + (\tau+1)\bar{F}_0(x) = \bar{F}_8(x) \tag{100}
$$

とした。

これら Q_j に対して、$h(a)$ と、さらに (99) の頭についている $(w-z)^{2\tau+1}$ から $(w-z)$ をひとつ借用した積の a に関する積分

$$
K_j = \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)Q_j da \quad (1 \leq j \leq 10) \tag{101}
$$

の一様有界性、およびその $n \to \infty$ のときの極限を考えることにする。なお、以前も少し用いたが、以後自然数 k に対し、

$$
\psi_{0,k}(t) = t^k\psi_0(t) \in \mathcal{S}, \quad \hat{\psi}_{0,k}(t) = t^k\hat{\psi}_0(t) \in \mathcal{S} \tag{102}
$$

のように書くことにする。

まずは K_1 の評価から。Q_1 の定数の係数を除いた半分の項

$$\psi_n(z)\hat{\psi}_n(w) = n^2\psi_0(n(z-a))\hat{\psi}_0(n(w-a))$$

については、$n(z-a)=t$ とすると

$$a = z - \frac{t}{n}, \quad n(w-a) = n(w-z) + n(z-a) = N_n + t$$

となるので、その積分を $K_1^{(1)}$ とすると

$$\begin{aligned} K_1^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} (w-z)h(a)\psi_n(z)\hat{\psi}_n(w)da \\ &= N_n \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z - \frac{t}{n}\right)\psi_0(t)\hat{\psi}_0(N_n+t)dt \end{aligned}$$

となって N_n が一つ余ってしまうが、それは、次のように $\psi_0, \hat{\psi}_0$ の積に吸収できる。

$$\begin{aligned} N_n\psi_0(t)\hat{\psi}_0(N_n+t) &= \{(N_n+t)-t\}\psi_0(t)\hat{\psi}_0(N_n+t) \\ &= \psi_0(t)\hat{\psi}_{0,1}(N_n+t) - \psi_{0,1}(t)\hat{\psi}_0(N_n+t) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} |K_1^{(1)}| &\leq \int_{\boldsymbol{R}} \left| h\left(z - \frac{t}{n}\right)\right| \left|\psi_0(t)\hat{\psi}_{0,1}(N_n+t) - \psi_{0,1}(t)\hat{\psi}_0(N_n+t)\right| dt \\ &\leq \|h\|_{L^\infty}\left(\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_{0,1}\|_{L^\infty} + \|\psi_{0,1}\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0\|_{L^\infty}\right) \end{aligned}$$

と評価でき、これにより $K_1^{(1)}$ が、そして

$$K_1 = A_\tau B_\tau(K_1^{(1)} - \hat{K}_1^{(1)})$$

が $w, z \in [z_1, w_1]$ 上 n に関して一様有界であることがわかる。ここで $\hat{K}_1^{(1)}$ は $K_1^{(1)}$ の $\psi_0, \hat{\psi}_0$ を取りかえたものとした。以下同様に書くことにする。

また、B_n には $(w-z)^{2\tau}$ 倍がついているので $z < w$ と考えてよく、このとき $n \to \infty$ に対して $N_n = n(w-z) \to \infty$ なので、

$$\hat{\psi}_{0,1}(N_n+t) \to 0, \quad \hat{\psi}_0(N_n+t) \to 0$$

となるので、Lebesgue 収束定理により $K_1^{(1)}$、そして K_1 が $n\to\infty$ に対して

$$K_1^{(1)} \to 0, \quad K_1 \to 0 \tag{103}$$

となることがわかる。

なお、以後もこのように K_j の係数を除いた半分 ($= K_j^{(1)}$ のように書く) でまず考察を行う。

次は K_2。この場合係数を除いた半分の項は $n(z-a)=Z_n=t$ により

$$\begin{aligned}\psi_n(z)\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n] &= n\psi_0(n(z-a)\int_0^\infty \hat{\Psi}_n(x)\bar{F}_7(x)dx \\ &= n\psi_0(t)\int_0^\infty n\hat{\psi}_0(n(w-a)-n(w-z)x)\bar{F}_7(x)dx\end{aligned}$$

であり、$n(w-a)-n(w-z)x = N_n+t-N_nx = N_n(1-x)+t$ なので、この積分は

$$\begin{aligned}K_2^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)\psi_n(z)\bar{G}_7[\hat{\Psi}_n]da \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\psi_0(t)dt\int_0^\infty N_n\hat{\psi}_0(N_n(1-x)+t)\bar{F}_7(x)dx\end{aligned}$$

となり、$N_n(1-x)+t=y$ とすると $x=1+(t-y)/N_n$ より、

$$K_2^{(1)} = \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\psi_0(t)dt\int_{-\infty}^{N_n+t}\hat{\psi}_0(y)\bar{F}_7\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)dy$$

となる。$\bar{F}_7(x)$ は有界なので、

$$|K_2^{(1)}| \le \|h\|_{L^\infty}\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}$$

と評価され、よって $K_2^{(1)}, K_2$ は一様有界となる。

極限は、$h(z-t/n)\to h(z)$ となるが、$\bar{F}_7=\bar{F}_1-\bar{F}_0$ は $x=1$ で不連続なので、後ろの積分を

$$\int_{-\infty}^{N_n+t}dy = \int_t^{N_n+t}dy + \int_{-\infty}^t dy$$

と分けることで、前の積分では $y > t$ より $\bar{F}_7 \to \bar{F}_7(1-0)$, 後の積分では $t > y$ より $\bar{F}_7 \to \bar{F}_7(1+0)$ となり、$K_2^{(1)}$ の極限は Lebesgue 収束定理より

$$K_2^{(1)} \to h(z) \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t) \left(\bar{F}_7(1-0) \int_t^\infty \hat{\psi}_0(y)dy + \bar{F}_7(1+0) \int_{-\infty}^t \hat{\psi}_0(y)dy \right) dt$$

となる。よって、K_2 の極限は、

$$\begin{aligned} K_2 \ \to\ & (\tau+1)A_\tau h(z) \\ & \times \left\{ \bar{F}_7(1-0) \left(\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t)dt \int_t^\infty \hat{\psi}_0(y)dy - \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_t^\infty \psi_0(y)dy \right) \right. \\ & \left. + \bar{F}_7(1+0) \left(\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t)dt \int_{-\infty}^t \hat{\psi}_0(y)dy - \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_{-\infty}^t \psi_0(y)dy \right) \right\} \end{aligned} \tag{104}$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_t^\infty \psi_0(y)dy & = \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)dy \int_{-\infty}^y \hat{\psi}_0(t)dt, \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_{-\infty}^t \psi_0(y)dy & = \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)dy \int_y^\infty \hat{\psi}_0(t)dt \end{cases} \tag{105}$$

なので、一般に $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}$ に対して

$$R[\psi_1, \psi_2] = \int_{\boldsymbol{R}} \psi_1(t) \left(\int_t^\infty \psi_2(y)dy - \int_{-\infty}^t \psi_2(y)dy \right) dt \tag{106}$$

と書くことにすると、(105) より

$$R[\psi_1, \psi_2] = -R[\psi_2, \psi_1] \tag{107}$$

も容易にわかる。これにより (104) の極限は、

$$\begin{aligned} K_2 \ \to\ & (\tau+1)A_\tau h(z) \{ \bar{F}_7(1-0) R[\psi_0, \hat{\psi}_0] - \bar{F}_7(1+0) R[\psi_0, \hat{\psi}_0] \} \\ =\ & -(\tau+1)A_\tau h(z) \left[\bar{F}_7(x) \right]_{1-0}^{1+0} R[\psi_0, \hat{\psi}_0] \end{aligned} \tag{108}$$

と書ける。ここで、$\bar{F}_7(x) = \bar{F}_1(x) - \bar{F}_0(x)$ の $x = 1$ での段差は、(39), (44) より

$$\left[\bar{F}_7(x) \right]_{1-0}^{1+0} = \left[\bar{F}_1(x) - \bar{F}_0(x) \right]_{1-0}^{1+0} = -A_\tau \tag{109}$$

なので、よって (108) は

$$K_2 \to K_2^\infty = (\tau+1)A_\tau^2 h(z)R[\psi_0, \hat{\psi}_0] \tag{110}$$

となることがわかる。

なお、この $R[\psi_0, \hat{\psi}_0]$ は、[3] の 6 節の $(-I_5)$ に等しく、よって結論に重要な役割を果たすことに注意する。

次は K_3。係数を除いた半分の項 $K_3^{(1)}$ は、K_2 の場合と同様に考えると、

$$\begin{aligned}\psi_n(w)\bar{G}_1[\hat{\Psi}_n] &= n\psi_0(n(w-a))\int_0^\infty \hat{\Psi}_n(x)\bar{F}_1(x)dx \\ &= n\psi_0(N_n+t)\int_0^\infty n\hat{\psi}_0(N_n(1-x)+t)\bar{F}_1(x)dx\end{aligned}$$

であるが、さらに $N_n+t=s$ とすると

$$z-\frac{t}{n} = z+(w-z)-\frac{s}{n} = w-\frac{s}{n}$$

よりその積分は

$$\begin{aligned}K_3^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)\psi_n(w)\bar{G}_1[\hat{\Psi}_n]da \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\psi_0(N_n+t)dt\int_{-\infty}^{N_n+t}\hat{\psi}_0(y)\bar{F}_1\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)dy \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(w-\frac{s}{n}\right)\psi_0(s)ds\int_{-\infty}^{s}\hat{\psi}_0(y)\bar{F}_1\left(\frac{s-y}{N_n}\right)dy\end{aligned}$$

となる。よってこの場合も

$$|K_3^{(1)}| \le \|h\|_{L^\infty}\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}\|\bar{F}_1\|_{L^\infty}$$

とおさえられて $K_3^{(1)}, K_3$ は一様有界となり、その極限は Lebesgue 収束定理より

$$K_3^{(1)} \to h(w)\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(s)ds\int_{-\infty}^{s}\hat{\psi}_0(y)dy\bar{F}_1(+0)$$

となる。よって K_3 の極限は、(44), (106) より、

$$\begin{aligned}K_3 \to K_3^\infty &= (\tau+1)B_\tau h(w)\bar{F}_1(+0) \\ &\quad\times\left(\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(s)ds\int_{-\infty}^{s}\hat{\psi}_0(y)dy - \int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(s)ds\int_{-\infty}^{s}\psi_0(y)dy\right) \\ &= (\tau+1)B_\tau^2 h(w)R[\psi_0, \hat{\psi}_0]\end{aligned} \tag{111}$$

となることがわかる。

次は、K_4 の前に先に K_5 から考える。

$$
\begin{aligned}
\psi_n(w)L[\hat{\Psi}_n] &= n\psi_0(n(w-a))\int_0^\infty \hat{\Psi}_n(x)\xi(x)\log|x-1|dx \\
&= n\psi_0(N_n+t)\int_0^\infty n\hat{\psi}_0(N_n(1-x)+t)\xi(x)\log|x-1|dx
\end{aligned}
$$

より、$\xi(x)$ の台が [1/2,3/2] に含まれることから、

$$
\begin{aligned}
K_5^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)\psi_n(w)L[\hat{\Psi}_n]da \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\psi_0(N_n+t)dt\int_0^\infty N_n\hat{\psi}_0(N_n(1-x)+t)\xi(x)\log|x-1|dx \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(w-\frac{s}{n}\right)\psi_0(s)ds\int_{1/2}^{3/2} N_n\hat{\psi}_0(s-N_nx)\xi(x)\log|x-1|dx
\end{aligned}
$$

となる。2 つ目の積分の頭にある N_n は、これまでのような x から $y=s-N_nx$ での変数変換で消しても、log の特異性が残ってしまうのでうまくいかない。よってここでは $x>1/2$ を利用して、N_n は $\hat{\psi}_0$ に吸収させることを考える。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\psi_0(s)N_n\hat{\psi}_0(s-N_nx) &= \psi_0(s)\frac{N_nx\hat{\psi}_0(s-N_nx)}{x} \\
&= \frac{1}{x}\{s-(s-N_nx)\}\psi_0(s)\hat{\psi}_0(s-N_nx) \\
&= \frac{1}{x}\{\psi_{0,1}(s)\hat{\psi}_0(s-N_nx)-\psi_0(s)\hat{\psi}_{0,1}(s-N_nx)\}
\end{aligned}
$$

により、

$$
|K_5^{(1)}| \le \|h\|_{L^\infty}\left(\|\psi_{0,1}\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0\|_{L^\infty}+\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_{0,1}\|_{L^\infty}\right)\int_{1/2}^{3/2}\frac{\xi(x)}{x}\left|\log|x-1|\right|dx
$$

となる。ここで、$(\xi(x)\log|x-1|)/x$ は [1/2,3/2] で L^1 なので、$K_5^{(1)}$, K_5 は一様有界となる。

極限は、

$$
\hat{\psi}_0(s-N_nx)\to 0,\quad \hat{\psi}_{0,1}(s-N_nx)\to 0
$$

より、Lebesgue 収束定理により $K_5^{(1)}, K_5$ は $n \to \infty$ に対して

$$K_5^{(1)} \to 0, \quad K_5 \to 0 \tag{112}$$

となる。

次は K_4 に戻る。K_5 と同様に変形すると、

$$\begin{aligned} K_4^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} (w-z)h(z)\psi_n(z)L[\hat{\Psi}_n]da \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\psi_0(t)dt\int_0^\infty N_n\hat{\psi}_0(N_n(1-x)+t)\xi(x)\log|x-1|dx \end{aligned}$$

とできるが、$(\xi(x)\log|x-1|)/(1-x)$ は L^1 ではないので、K_5 とは違い N_n を $\hat{\psi}_0$ に吸収させることはできない。よって、この場合は x の積分を $\boldsymbol{R}$ 全体に広げてから $N_n(1-x)+t=y$ と置換することで消すと、

$$K_4^{(1)} = \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\psi_0(t)dt\int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(y)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dx$$

となる。この式単独で有界性を示すのは難しいが、K_4 全体で考えれば可能である。$\psi_0, \hat{\psi}_0$ を入れかえたもう一方の積分

$$\hat{K}_4^{(1)} = \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\hat{\psi}_0(t)dt\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dy$$

において t と y を入れかえると、$\xi(x)$ は $x=1$ で対称なので、

$$\begin{aligned} \hat{K}_4^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{y}{n}\right)\hat{\psi}_0(y)dy\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dt \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t)dt\int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{y}{n}\right)\hat{\psi}_0(y)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dy \end{aligned}$$

となり、よって

$$\begin{aligned} K_4 &= (\tau+1)A_\tau(K_4^{(1)}-\hat{K}_4^{(1)}) \;=\; (\tau+1)A_\tau\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt \\ &\quad \times\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(y)\left\{h\left(z-\frac{t}{n}\right)-h\left(z-\frac{y}{n}\right)\right\}\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dy \end{aligned}$$

となるが、命題 3 より、

$$
\begin{aligned}
&\left|h\left(z-\frac{t}{n}\right)-h\left(z-\frac{y}{n}\right)\right|\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\left|\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|\right| \\
\leq\ & C_0\left(\left|\frac{t-y}{n}\right|^{2\tau}+\left|\frac{t-y}{n}\right|\right)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\left|\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|\right| \\
=\ & C_0\left((w-z)^{2\tau}\left|\frac{t-y}{N_n}\right|^{2\tau}+(w-z)\left|\frac{t-y}{N_n}\right|\right)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\left|\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|\right| \qquad (113)
\end{aligned}
$$

となるが、今 $g_1(x)=g_1(x;d)$ を

$$
g_1(x)=g_1(x;d)=C_0(d^{2\tau}|x|^{2\tau}+d|x|)\xi(1+x)\left|\log|x|\right| \qquad (114)
$$

とすると、$g_1(x)$ は非負、連続、かつ上に有界な関数となる。これにより (113) は、

$$
\begin{aligned}
&\left|h\left(z-\frac{t}{n}\right)-h\left(z-\frac{y}{n}\right)\right|\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\left|\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|\right| \\
\leq\ & g_1\left(\frac{t-y}{N_n};w_1-z_1\right) \qquad (115)
\end{aligned}
$$

となるので、よってこの左辺は $w,z\in[z_1,w_1]$ 上有界となり、よって K_4 は一様有界となることがわかる。

K_4 の極限は、(115) の左辺は $g_1(0)=0$ より 0 に収束するので、Lebesgue 収束定理により

$$
K_4\to 0 \qquad (116)
$$

となる。

次は、$P[\Psi_n]$ の含まれる K_6 は後回しにして、K_7 を先に考える。

$$
\begin{aligned}
K_7^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)\bar{G}_0[\hat{\Psi}_n]\bar{G}_7[\Psi_n]da \\
&= nN_n\int_{\boldsymbol{R}}h(a)da\int_0^\infty\hat{\psi}_0(W_n-N_nx)\bar{F}_0(x)dx\int_0^\infty\psi_0(W_n-N_n\bar{x})\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x}
\end{aligned}
$$

この 3 つの積分でそれぞれ置換をすれば n はむしろひとつ余計に消せるのであるが、そうすると一番外の積分で n によらない L^1 関数が取れなくなる。

よって、まず a と x に関して $n(w-a)=W_n=s$ と $W_n-N_nx=s-N_nx=y$ によって置換をすることで n^2 を消すようにすると、

$$K_7^{(1)}=\int_{\boldsymbol{R}}h\left(w-\frac{s}{n}\right)ds\int_{-\infty}^{s}\hat{\psi}_0(y)\bar{F}_0\left(\frac{s-y}{N_n}\right)dy\int_0^\infty\psi_0(s-N_n\bar{x})\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x}$$

となり、これは n を固定すれば当然可積分であるから Fubini の定理より、

$$\begin{aligned}K_7^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(y)dy\int_y^\infty h\left(w-\frac{s}{n}\right)\bar{F}_0\left(\frac{s-y}{N_n}\right)ds\int_0^\infty\psi_0(s-N_n\bar{x})\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x}\\ &= \int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(y)dy\int_0^\infty\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x}\int_y^\infty h\left(w-\frac{s}{n}\right)\bar{F}_0\left(\frac{s-y}{N_n}\right)\psi_0(s-N_n\bar{x})ds\end{aligned}$$

とできるが、$\hat{\psi}_0\in L^1(\boldsymbol{R})$, $\bar{F}_7\in L^1(0,\infty)$ であり、最後の s の積分も、$s-N_n\bar{x}=t$ と置換すればすべての積分で n によらない L^1 関数が取れることになる:

$$\begin{aligned}K_7^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(y)dy\int_0^\infty\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x}\\ &\quad\times\int_{y-N_n\bar{x}}^\infty h\left(w-(w-z)\bar{x}-\frac{t}{n}\right)\bar{F}_0\left(\frac{t-y}{N_n}+\bar{x}\right)\psi_0(t)dt\end{aligned}$$

これで、

$$|K_7^{(1)}|\le\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}\|\bar{F}_7\|_{L^1}\|h\|_{L^\infty}\|\bar{F}_0\|_{L^\infty}\|\psi_0\|_{L^1}$$

と評価されるので、$K_7^{(1)}$, K_7 が一様有界となる。

極限は、$\bar{x}>0$ より $y-N_n\bar{x}\to-\infty$ であり、また

$$h\left(w-(w-z)\bar{x}-\frac{t}{n}\right)\to h(w-(w-z)\bar{x}),\quad \bar{F}_0\left(\frac{t-y}{N_n}+\bar{x}\right)\to\bar{F}_0(\bar{x})$$

となるので Lebesgue 収束定理より、

$$\begin{aligned}K_7^{(1)} &\to K_7^{(1),\infty}\\ &= \int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(y)dy\int_0^\infty\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x}\int_{\boldsymbol{R}}h(w-(w-z)\bar{x})\bar{F}_0(\bar{x})\psi_0(t)dt\\ &= \int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(y)dy\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(t)dt\int_0^\infty\bar{F}_0(\bar{x})\bar{F}_7(\bar{x})h(w-(w-z)\bar{x})d\bar{x}\end{aligned}$$

となる。そしてこの極限は ψ_0 と $\hat{\psi}_0$ を入れかえても値は変わらないので、

$$K_7=(\tau+1)^2(K_7^{(1)}-\hat{K}_7^{(1)})\to(\tau+1)^2(K_7^{(1),\infty}-\hat{K}_7^{(1),\infty})=0 \tag{117}$$

となる。

次は K_8。これは今の K_7 と同じように評価できる。

$$
\begin{aligned}
K_8^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} (w-z)h(a)\bar{G}_8[\hat{\Psi}_n]L[\Psi_n]da \\
&= nN_n \int_{\boldsymbol{R}} h(a)da \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(W_n - N_n x)\bar{F}_8(x)dx \\
&\quad \times \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(W_n - N_n\bar{x})\xi(\bar{x})\log|\bar{x}-1|d\bar{x} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(w - \frac{s}{n}\right) ds \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(y)\bar{F}_8\left(\frac{s-y}{N_n}\right) dy \\
&\quad \times \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(s - N_n\bar{x})\xi(\bar{x})\log|\bar{x}-1|d\bar{x} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \xi(\bar{x})\log|\bar{x}-1|d\bar{x} \\
&\quad \times \int_{\boldsymbol{R}} h\left(w - \frac{s}{n}\right)\bar{F}_8\left(\frac{s-y}{N_n}\right)\psi_0(s-N_n\bar{x})ds
\end{aligned}
$$

とすると、$\hat{\psi}_0 \in L^1(\boldsymbol{R})$, $\xi(x)\log|x-1| \in L^1(\boldsymbol{R})$ なので、最後の積分で $s - N_n\bar{x} = t$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
K_8^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \xi(\bar{x})\log|\bar{x}-1|d\bar{x} \\
&\quad \times \int_{\boldsymbol{R}} h\left(w - (w-z)\bar{x} - \frac{t}{n}\right)\bar{F}_8\left(\frac{t-y}{N_n} + \bar{x}\right)\psi_0(t)dt
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
|K_8^{(1)}| \le \|\hat{\psi}_0\|_{L^1}\|\xi(x)\log|x-1|\|_{L^1}\|h\|_{L^\infty}\|\bar{F}_8\|_{L^\infty}\|\psi_0\|_{L^1}
$$

でおさえられ、$K_8^{(1)}$, K_8 は一様有界となる。

$n \to \infty$ の極限は、Lebesgue 収束定理より、

$$
\begin{aligned}
K_8^{(1)} &\to K_8^{(1),\infty} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(t)dt \int_{\boldsymbol{R}} h(w-(w-z)\bar{x})\bar{F}_8(\bar{x})\xi(\bar{x})\log|\bar{x}-1|d\bar{x}
\end{aligned}
$$

となり、$\psi_0, \hat{\psi}_0$ の入れかえでこの極限は変わらないので、

$$
K_8 = (\tau+1)^2(K_8^{(1)} - \hat{K}_8^{(1)}) \to (\tau+1)^2(K_8^{(1),\infty} - \hat{K}_8^{(1),\infty}) = 0 \tag{118}
$$

となる。

以上で、$P[\Psi_n]$ を含む K_6, K_9, K_{10} 以外の評価はすべて終わったことになり、いずれも一様有界で、(110), (111) の K_2, K_3 以外はすべて 0 に収束することがわかった。

9 K_6 の評価

本節より、$P[\Psi_n]$ を含む K_6, K_9, K_{10} を評価していくが、$P[\Psi_n]$ の特異性が高いため、少しこれまでより厄介である。まず本節は K_6 の評価を考える。

なお、(98) で σ_n の代わりに $\bar{\sigma}_n$ を使う形にしたのは、実は $\psi_n(z)P[\hat{\Psi}_n]$ の形を消す目的もあり、K_6 の $\psi_n(w)P[\hat{\Psi}_n]$ $(= \Psi_n(0)P[\hat{\Psi}_n])$ なら評価できるのであるが、$\psi_n(z)P[\hat{\Psi}_n]$ $(= \Psi_n(1)P[\hat{\Psi}_n])$ だと特異性が高すぎて評価が難しい。

まず本節では、$P[\Psi_n]$ を以下の形に変形して考察する。

$$\begin{aligned} P[\Psi_n] &= \text{p.v.}\int_0^\infty \Psi_n(x)\,\frac{\xi(x)}{x-1}\,dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{3/2}\right)\Psi_n(x)\,\frac{\xi(x)}{x-1}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{1/2}^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{3/2}\right)\left\{\xi(x)\,\frac{\Psi_n(x)-\Psi_n(1)}{x-1} + \Psi_n(1)\,\frac{\xi(x)}{x-1}\right\}dx \end{aligned}$$

と分けると、$\xi(x)/(x-1)$ は $x=1$ で奇対称なのでその積分は 0 となり、

$$P[\Psi_n] = \int_{1/2}^{3/2}\xi(x)\,\frac{\Psi_n(x)-\Psi_n(1)}{x-1}\,dx = \int_{\boldsymbol{R}}\xi(x)\,\frac{\Psi_n(x)-\Psi_n(1)}{x-1}\,dx \tag{119}$$

となる。この表現を用いると、

$$\begin{aligned} K_6^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)\psi_n(w)P[\hat{\Psi}_n]da \\ &= nN_n\int_{\boldsymbol{R}}h(a)\psi_0(W_n)da\int_{\boldsymbol{R}}\xi(x)\,\frac{\hat{\psi}_0(W_n-N_nx)-\hat{\psi}_0(Z_n)}{x-1}\,dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}}h\left(w-\frac{s}{n}\right)\psi_0(s)ds\int_{\boldsymbol{R}}\xi(x)N_n\,\frac{\hat{\psi}_0(s-N_nx)-\hat{\psi}_0(s-N_n)}{x-1}\,dx \end{aligned}$$

となる、2 つ目の積分の N_n は $\hat{\psi}_0$ に取り込むことを考えるが、ψ_0 と その部分の分数式の積は、分子に合わせて分母に N_n 倍を作って評価する必要があるので、

$$K_6^{(2)} = \psi_0(s)N_n^2\frac{\hat{\psi}_0(s-N_nx)-\hat{\psi}_0(s-N_n)}{N_nx-N_n} \tag{120}$$

の N_n^2 を取り込む形での変形を行う。そのために、次の補題を利用する。

補題 7

$\phi(x) \in \mathcal{S}$ に対して $(\Delta\phi/\Delta x)(x) = (\phi(x+\Delta x) - \phi(x))/\Delta x$, $\phi_j(x) = x^j\phi(x)$ と書くことにすると、次が成り立つ。

1. $$x\frac{\Delta\phi}{\Delta x}(x) = \frac{\Delta\phi_1}{\Delta x}(x) - \phi(x+\Delta x)$$
2. $$x^2\frac{\Delta\phi}{\Delta x}(x) = \frac{\Delta\phi_2}{\Delta x}(x) - 2\phi_1(x+\Delta x) + \phi(x+\Delta x)\Delta x$$

証明

1. $x = (x+\Delta x) - \Delta x$ より

$$\begin{aligned} x\frac{\Delta\phi}{\Delta x}(x) &= \frac{(x+\Delta x)\phi(x+\Delta x) - (\Delta x)\phi(x+\Delta x) - x\phi(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\phi_1(x+\Delta x) - \phi_1(x)}{\Delta x} - \phi(x+\Delta x) \;=\; \frac{\Delta\phi_1}{\Delta x}(x) - \phi(x+\Delta x) \end{aligned}$$

となる。

2. $x^2 = (x+\Delta)^2 - 2(x+\Delta x)\Delta x + (\Delta x)^2$ より、

$$\begin{aligned} x^2\frac{\Delta\phi}{\Delta x}(x) &= \frac{\phi_2(x+\Delta x) - 2\phi_1(x+\Delta x)\Delta x + (\Delta x)^2\phi(x+\Delta x) - \phi_2(x)}{\Delta x} \\ & \frac{\Delta\phi_2}{\Delta x} - 2\phi_1(x+\Delta x) + \phi(x+\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

となる。■

$y = s - N_n$, $\Delta y = (s - N_n x) - (s - N_n) = N_n(1-x)$ とすると、$N_n = s - (s - N_n) = s - y$ なので、(120) は補題 7 により以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} K_6^{(2)} &= -(s-y)^2\psi_0(s)\frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta y}(y) \;=\; (-s^2 + 2sy - y^2)\psi_0(s)\frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta y}(y) \\ &= -\psi_{0,2}(s)\frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta y}(y) + 2\psi_{0,1}(s)\left\{\frac{\Delta\hat{\psi}_{0,1}}{\Delta y}(y) - \hat{\psi}_0(y+\Delta y)\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\psi_0(s)\left\{\frac{\Delta\hat{\psi}_{0,2}}{\Delta y}(y)-2\hat{\psi}_{0,1}(y+\Delta y)+\hat{\psi}_0(y+\Delta y)\Delta y\right\}\\
=\ &-\psi_{0,2}(s)\frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta y}+2\psi_{0,1}(s)\frac{\Delta\hat{\psi}_{0,1}}{\Delta y}-\psi_0(s)\frac{\Delta\hat{\psi}_{0,2}}{\Delta y}-2\psi_{0,1}(s)\hat{\psi}_0(s-N_nx)\\
&+2\psi_0(s)\hat{\psi}_{0,1}(s-N_nx)-\psi_0(s)\hat{\psi}_0(s-N_nx)\Delta y\\
=\ &K_{6,1}^{(2)}+K_{6,2}^{(2)}
\end{aligned}
$$

なお、$K_{6,2}^{(2)}$ は最後の項で、それ以外の和を $K_{6,1}^{(2)}$ とする。このとき $K_{6,1}^{(2)}$ は、

$$
\begin{aligned}
|K_{6,1}^{(2)}| &\le |\psi_{0,2}(s)|\|\hat{\psi}_0'\|_{L^\infty}+2|\psi_{0,1}(s)|\left(\|\hat{\psi}_{0,1}'\|_{L^\infty}+\|\hat{\psi}_0\|_{L^\infty}\right)\\
&\quad+|\psi_0(s)|\left(\|\hat{\psi}_{0,2}'\|_{L^\infty}+2\|\hat{\psi}_{0,1}\|_{L^\infty}\right)
\end{aligned}
$$

と評価され、この右辺は s の L^1 関数なので、これで s に関する積分の部分はまかなえることになる。x の積分は $\xi(x)\in L^1$ でまかなえばよいので、これで $K_6^{(1)}$ のうち $K_{6,1}^{(2)}$ の項を持つ積分 $K_{6,1}^{(1)}$ ($K_{6,1}^{(2)}$ と $h,\xi(x)$ の積の積分) は一様有界となる。$K_6^{(1)}$ の残りの部分 $K_{6,2}^{(1)}$ ($K_{6,2}^{(2)}$ と $h,\xi(x)$ の積の積分) には $\Delta y=N_n(1-x)$ が含まれるが、これは置換積分で N_n を消す。すなわち $s-N_nx=\bar{y}$ により、

$$
\begin{aligned}
K_{6,2}^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}h\left(w-\frac{s}{n}\right)\psi_0(s)ds\int_{\boldsymbol{R}}\xi(x)N_n(x-1)\hat{\psi}_0(s-N_nx)dx\\
&= \int_{\boldsymbol{R}}h\left(w-\frac{s}{n}\right)\psi_0(s)ds\int_{\boldsymbol{R}}\xi\left(\frac{s-\bar{y}}{N_n}\right)\left(\frac{s-\bar{y}}{N_n}-1\right)\hat{\psi}_0(y)d\bar{y}
\end{aligned}
$$

とすれば、$\xi(x)(x-1)$ は有界なので、

$$
|K_{6,2}^{(1)}|\le\|h\|_{L^\infty}\|\psi_0\|_{L^1}\|\xi(x)(x-1)\|_{L^\infty}\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}
$$

となり、よって $K_{6,2}^{(1)}$ も一様有界となる。これで、$K_{6,1}^{(1)}, K_{6,2}^{(1)}$, そして K_6 が一様有界となることが示された。

$n\to\infty$ のときの極限は、$h(w-s/n)\to h(w)$ で、また

$$
\frac{\Delta\phi}{\Delta y}=\frac{\phi(s-N_nx)-\phi(s-N_n)}{(s-N_nx)-(s-N_n)}=\int_0^1\phi'(s-N_n((x-1)t+1))dt
$$

であり、$(x-1)t+1\ge\min\{x,1\}\ge 1/2$ なので、

$$
s-N_n((x-1)t+1)\to-\infty
$$

となるから、$\phi = \hat{\psi}_0, \hat{\psi}_{0,1}, \hat{\psi}_{0,2}$ に対して $\Delta\phi/\Delta y \to 0$ となり、よって

$$K_{6,1}^{(2)} \to 0$$

より Lebesgue 収束定理により $K_{6,1}^{(1)} \to 0$ となる。$K_{6,2}^{(1)}$ は、

$$\xi\left(\frac{s-y}{N_n}\right)\left(\frac{s-y}{N_n} - 1\right) \to \xi(0)(-1) = 0$$

となるので、Lebesgue 収束定理により $K_{6,2}^{(1)} \to 0$ となり、よって

$$K_6^{(1)} = K_{6,1}^{(1)} + K_{6,2}^{(1)} \to 0, \quad K_6 \to 0 \tag{121}$$

となる。

10 K_9 の評価

次は K_9 の評価を行うが、これは評価がやや難しい。先に K_9 の分割や変数変換などをやっておく。なお、本節では $\hat{\psi}_0$ への n の取り込みはうまくいかないので、$P[\Psi_n]$ も 9 節とは違う形に分けて考える。

まず、$0 < \delta (< 1/2)$ に対して、9 節の (119) を

$$P[\Psi_n] = \int_{|x-1|<\delta} \xi(x)\, \frac{\Psi_n(x) - \Psi_n(1)}{x-1}\, dx + \int_{|x-1|>\delta} \xi(x)\, \frac{\Psi_n(x) - \Psi_n(1)}{x-1}\, dx$$

と 2 つに分けると、$\xi(x)/(x-1)$ は $x=1$ で奇対称なので、

$$P[\Psi_n] = \int_{|x-1|<\delta} \xi(x)\, \frac{\Psi_n(x) - \Psi_n(1)}{x-1}\, dx + \int_{|x-1|>\delta} \xi(x)\, \frac{\Psi_n(x)}{x-1}\, dx$$

となり、さらに $n(z-a) = t$, $N_n(x-1) = \bar{s}$, $\delta = 1/N_n$ とすると、

$$\begin{aligned} P[\Psi_n] &= n\int_{|\bar{s}|<1} \xi\left(1 + \frac{\bar{s}}{N_n}\right) \frac{\psi_0(t-\bar{s}) - \psi_0(t)}{\bar{s}}\, d\bar{s} \\ &\quad + n\int_{|\bar{s}|>1} \xi\left(1 + \frac{\bar{s}}{N_n}\right) \frac{\psi_0(t-\bar{s})}{\bar{s}}\, d\bar{s} \end{aligned} \tag{122}$$

となる。これにより、K_9 の係数を除いた半分 $K_9^{(1)}$ を以下のように分けることができる。

$$
\begin{aligned}
K_9^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} (w-z)h(a)\bar{G}_7[\Psi_n]P[\hat{\Psi}_n]da \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)dt\int_0^\infty N_n\psi_0(N_n(1-\bar{x})+t)\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x} \\
&\quad \times\int_{|\bar{s}|<1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}d\bar{s} \\
&\quad +\int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)dt\int_0^\infty N_n\psi_0(N_n(1-\bar{x})+t)\bar{F}_7(\bar{x})d\bar{x} \\
&\quad \times\int_{|\bar{s}|>1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})}{\bar{s}}d\bar{s} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)dt\int_{-\infty}^{N_n+t}\psi_0(y)\bar{F}_7\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)dy \\
&\quad \times\int_{|\bar{s}|<1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}d\bar{s} \\
&\quad +\int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)dt\int_{-\infty}^{N_n+t}\psi_0(y)\bar{F}_7\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)dy \\
&\quad \times\int_{|\bar{s}|>1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})}{\bar{s}}d\bar{s} \\
&= K_{9,1}^{(1)}+K_{9,2}^{(1)}+K_{9,3}^{(1)}+K_{9,4}^{(1)} \qquad (123)
\end{aligned}
$$

ここで、(123) の $K_{9,1}^{(1)}$ は最初の積分で $\bar{s}$ に関して $|\bar{s}|<1$ での積分、$K_{9,2}^{(1)}, K_{9,3}^{(1)}, K_{9,4}^{(1)}$ は $|\bar{s}|>1$ に関する積分の $h(z-t/n)$ の部分をさらに 3 つに分けたもので、それぞれ

$$
h\left(z-\frac{t}{n}\right)=\left\{h\left(z-\frac{t}{n}\right)-h\left(z-\frac{\bar{s}}{n}\right)\right\}+\left\{h\left(z-\frac{\bar{s}}{n}\right)-h(z)\right\}+h(z)
$$

のように分けたものを持つものとする。

まずは $K_{9,1}^{(1)}$ の評価を考える。これは、

$$
\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} dt\int_{|\bar{s}|<1}\left|\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\right|d\bar{s} &= \int_{\boldsymbol{R}} dt\int_{|\bar{s}|<1}\left|\int_0^1\{-\hat{\psi}_0'(t-\bar{s}\theta)\}d\theta\right|d\bar{s} \\
\le \int_{|\bar{s}|<1}\int_0^1 d\theta\int_{\boldsymbol{R}}|\hat{\psi}_0'(t-\bar{s}\theta)|dt &\le 2\|\hat{\psi}_0'\|_{L^1} \qquad (124)
\end{aligned}
$$

より、この分数部分は $t,\bar{s}$ に関して L^1 であり、y に関しては $\psi_0(y)$ が L^1 なので、

$$
|K_{9,1}^{(1)}|\le 2\|h\|_{L^\infty}\|\psi_0\|_{L^1}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}\|\hat{\psi}_0'\|_{L^1}
$$

となって $K_{9,1}^{(1)}$ は一様有界であることがわかる。

その $n\to\infty$ に対する極限は、y に関する積分を

$$\int_{-\infty}^{N_n+t}dy=\int_{-\infty}^{t}dy+\int_{t}^{N_n+t}dy$$

と分けることで、

$$\begin{aligned}K_{9,1}^{(1)}\ \to\ K_{9,1}^{(1),\infty}\ &=\ h(z)\int_{\boldsymbol{R}}\Big(\bar{F}_7(1+0)\int_{-\infty}^{t}\psi_0(y)dy\\&\quad+\bar{F}_7(1-0)\int_{t}^{\infty}\psi_0(y)dy\Big)\,dt\int_{|\bar{s}|<1}\frac{\psi_0(t-\bar{s})-\psi_0(t)}{\bar{s}}\,d\bar{s}\end{aligned}\tag{125}$$

となることがわかる。この極限の考察、および $K_{9,1}^{(1)}$ の ψ_0 と $\hat{\psi}_0$ を入れかえた $\hat{K}_{9,1}^{(1)}$ の極限 $\hat{K}_{9,1}^{(1),\infty}$ との差に関する検討は、あとでまとめて行うことにする。

次は $K_{9,2}^{(1)}$。この評価には、命題 3 による

$$\begin{aligned}\left|h\left(z-\frac{t}{n}\right)-h\left(z-\frac{\bar{s}}{n}\right)\right|\ &\le\ C_0\left(\left|\frac{t-\bar{s}}{n}\right|^{2\tau}+\left|\frac{t-\bar{s}}{n}\right|\right)\\&\le\ C_0\left\{(w_1-z_1)^{2\tau}\left|\frac{t-\bar{s}}{N_n}\right|^{2\tau}+(w_1-z_1)\left|\frac{t-\bar{s}}{N_n}\right|\right\}\end{aligned}\tag{126}$$

となる。

$|\bar{s}|>1$ に関する積分に関しては、$N_n\ge 2$ の場合は、$\bar{s}=N_nu$ により、

$$\int_{|\bar{s}|>1}\left|\frac{1}{\bar{s}}\,\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right|d\bar{s}=\int_{1/N_n<|u|<1/2}\left|\frac{\xi(1+u)}{u}\right|du\le 2\int_{1/N_n}^{1/2}\frac{du}{u}\le 2\log\frac{N_n}{2}$$

となり、また $0<N_n<2$ の場合は $|\bar{s}|>1$ に対して $|\bar{s}/N_n|>1/2$ となるから $\xi(1+\bar{s}/N_n)=0$ となり、結局すべての $N_n>0$ に対して

$$\int_{|\bar{s}|>1}\left|\frac{1}{\bar{s}}\,\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right|d\bar{s}\le\max\left\{2\log\frac{N_n}{2},\ 0\right\}\tag{127}$$

となることがわかる。ここに (126) の項の積の t での積分を追加すると

$$\int_{\boldsymbol{R}}dt\int_{|\bar{s}|>1}\left|\frac{t-\bar{s}}{N_n}\right|^{2\tau}\left|\frac{1}{\bar{s}}\,\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right||\hat{\psi}_0(t-\bar{s})|d\bar{s}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ \| |t|^{2\tau}\hat{\psi}_0\|_{L^1}\left(\frac{1}{N_n}\right)^{2\tau}\max\left\{2\log\frac{N_n}{2},\ 0\right\} \ \leq \ C_3\||t|^{2\tau}\hat{\psi}_0\|_{L^1},\\
&\int_{\boldsymbol{R}} dt \int_{|\bar{s}|>1}\left|\frac{t-\bar{s}}{N_n}\right|\left|\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right||\hat{\psi}_0(t-\bar{s})|d\bar{s}\\
&\leq \ \|t\hat{\psi}_0\|_{L^1}\frac{1}{N_n}\max\left\{2\log\frac{N_n}{2},\ 0\right\} \ \leq \ C_4\|t\hat{\psi}_0\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

と評価できる。

$K_{9,2}^{(1)}$ はここに $\psi_0(y)\bar{F}_7$ の y での積分がつくので、よって

$$
\begin{aligned}
|K_{9,2}^{(1)}| \ &\leq \ \|\psi_0\|_{L^1}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}\left\{\left(\frac{1}{N_n}\right)^{2\tau}\||t|^{2\tau}\hat{\psi}_0\|_{L^1}+\frac{1}{N_n}\|t\hat{\psi}_0\|_{L^1}\right\}\\
&\qquad\times\max\left\{2\log\frac{N_n}{2},\ 0\right\} \qquad (128)\\
&\leq \ \|\psi_0\|_{L^1}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}\left\{C_3\||t|^{2\tau}\hat{\psi}_0\|_{L^1}+C_4\|t\hat{\psi}_0\|_{L^1}\right\} \qquad (129)
\end{aligned}
$$

と評価され、よって一様有界であることがわかる。

$K_{9,2}^{(1)}$ の極限は、$n\to\infty$ とすれば $N_n\to\infty$ となり、(128) で

$$
\left(\frac{1}{N_n}\right)^{2\tau}\max\left\{2\log\frac{N_n}{2},\ 0\right\}\to 0, \quad \frac{1}{N_n}\max\left\{2\log\frac{N_n}{2},\ 0\right\}\to 0
$$

となるので、

$$
K_{9,2}^{(1)}\to 0 \qquad (130)
$$

となる。

次は $K_{9,3}^{(1)}$。この場合も、命題 3 により、

$$
\left|h\left(z-\frac{\bar{s}}{n}\right)-h(z)\right|\leq C_0\left\{(w_1-z_1)^{2\tau}\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|^{2\tau}+(w_1-z_1)\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|\right\} \qquad (131)
$$

となるので、$\bar{s}=N_nu$ により

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}} dt\int_{|\bar{s}|>1}\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|^{2\tau}\left|\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right|\left|\hat{\psi}_0(t-\bar{s})\right|d\bar{s}\\
&\leq \ \int_{1/N_n<|u|<1/2}|u|^{2\tau-1}\xi(1+u)du\int_{\boldsymbol{R}}\left|\hat{\psi}_0(t-N_nu)\right|dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le\ 2\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}\int_0^{1/2} u^{2\tau-1}du \ =\ \frac{1}{\tau 2^{2\tau}}\|\hat{\psi}_0\|_{L^1},\\
&\int_{\boldsymbol{R}} dt\int_{|\bar{s}|>1}\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|\left|\frac{1}{\bar{s}}\,\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right|\left|\hat{\psi}_0(t-\bar{s})\right|d\bar{s}\\
&\le\ \int_{1/N_n<|u|<1/2}\xi(1+u)du\int_{\boldsymbol{R}}\left|\hat{\psi}_0(t-N_n u)\right|dt\ \le\ \|\hat{\psi}_0\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

と評価できる。よって、

$$
|K_{9,3}^{(1)}| \le C_5\|\psi_0\|_{L^1}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}
$$

となり、一様有界となる。

$K_{9,3}^{(1)}$ の極限は、$\bar{s}=N_n u,\ t-\bar{s}=t-uN_n=\bar{t}$ により、

$$
\begin{aligned}
K_{9,3}^{(1)} &= \int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}}\,\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\left\{h\left(z-\frac{\bar{s}}{n}\right)-h(z)\right\}d\bar{s}\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(t-\bar{s})dt\\
&\quad\times\int_{-\infty}^{N_n+t}\psi_0(y)\bar{F}_7\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)dy\\
&= \int_{1/N_n<|u|<1/2}\xi(1+u)\,\frac{h(z-(w-z)u)-h(z)}{u}\,du\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(\bar{t})d\bar{t}\\
&\quad\times\int_{-\infty}^{N_n(1+u)+\bar{t}}\psi_0(y)\bar{F}_7\left(1+u+\frac{\bar{t}-y}{N_n}\right)dy
\end{aligned}
$$

となるが、$1+u>1/2$ より $N_n(1+u)+\bar{t}\to\infty$ で、

$$
\xi(1+u)\,\frac{h(z-(w-z)u)-h(z)}{u}
$$

は命題 3 より u に関して $[-1/2,1/2]$ で L^1, $\hat{\psi}_0(\bar{t})$ と $\psi_0(y)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 L^1 なので、Lebesgue 収束定理が適用でき、

$$
\begin{aligned}
K_{9,3}^{(1)} \ \to\ K_{9,3}^{(1),\infty} &= \int_{|u|\le 1/2}\xi(1+u)\,\frac{h(z-(w-z)u)-h(z)}{u}\,\bar{F}_7(1+u)du\\
&\quad\times\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(\bar{t})d\bar{t}\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)dy \qquad (132)
\end{aligned}
$$

となることがわかる。しかし、この極限 $K_{9,3}^{(1),\infty}$ は、ψ_0 と $\hat{\psi}_0$ の入れかえで値が変わらないので、$\hat{K}_{9,3}^{(1)}$ の極限 $\hat{K}_{9,3}^{(1),\infty}$ も同じものになる。よって、

$$
K_{9,3}^{(1)}-\hat{K}_{9,3}^{(1)}\to 0 \qquad (133)
$$

となる。

最後は $K_{9,4}^{(1)}$。しかし、これは単独では有界性は得られないので、$\psi_0, \hat{\psi}_0$ を入れかえた $\hat{K}_{9,4}^{(1)}$ との差 $K_{9,4}^{(1)} - \hat{K}_{9,4}^{(1)} = K_{9,4}$ の有界性を考える。$t - y = \bar{y}$ により、

$$\begin{aligned} K_{9,4} &= h(z)\int_{\boldsymbol{R}} dt \int_{-N_n}^{\infty} \bar{F}_7\left(1+\frac{\bar{y}}{N_n}\right) d\bar{y} \\ &\quad \times \int_{|\bar{s}|>1} \frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\{\psi_0(t-\bar{y})\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t-\bar{y})\psi_0(t-\bar{s})\}d\bar{s} \\ &= h(z)\int_{-N_n}^{\infty} \bar{F}_7\left(1+\frac{\bar{y}}{N_n}\right) d\bar{y} \int_{|\bar{s}|>1} \frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right) K_{9,4}^{(2)}\, d\bar{s} \end{aligned} \tag{134}$$

とすると $K_{9,4}^{(2)}$ は

$$\begin{aligned} K_{9,4}^{(2)} &= \int_{\boldsymbol{R}} \{\psi_0(t-\bar{y})\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t-\bar{y})\psi_0(t-\bar{s})\}dt \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \{\psi_0(\bar{t})\hat{\psi}_0(\bar{t}+\bar{y}-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(\bar{t})\psi_0(\bar{t}+\bar{y}-\bar{s})\}d\bar{t} \end{aligned}$$

となるが、ここで $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}$ に対して

$$S[\phi_1,\phi_2](x) = \int_{\boldsymbol{R}} \{\phi_1(y)\phi_2(y+x) - \phi_2(y)\phi_1(y+x)\}dy \tag{135}$$

と書くことにすると $K_{9,4}^{(2)} = S[\psi_0, \hat{\psi}_0](\bar{y}-\bar{s})$ となるが、$S[\phi_1,\phi_2](x)$ は以下の性質を持つことが容易に示される。

- $S[\phi_1,\phi_2](x) \in \mathcal{S}$
- $S[\phi_2,\phi_1](x) = -S[\phi_1,\phi_2](x)$
- $S[\phi_1,\phi_2](-x) = -S[\phi_1,\phi_2](x)$ (奇関数)
- $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} S[\phi_1,\phi_2](x)dx = 0$

そして、最後の性質より、

$$\bar{S}[\phi_1,\phi_2](x) = \int_{-\infty}^{x} S[\phi_1,\phi_2](y)dy \tag{136}$$

とすると $\bar{S}[\phi_1,\phi_2](x) \in \mathcal{S}$ で、$\bar{S}[\phi_1,\phi_2](x)$ は偶関数となることも容易に示される。これを用いて、(134) の $K_{9,4}^{(2)}$ を含む $\bar{s}$ での積分 $K_{9,4}^{(3)}$ を部分積分する。

簡単に $S[\psi_0,\hat{\psi}_0](x)=S(x)$, $\bar{S}[\psi_0,\hat{\psi}_0](x)=\bar{S}(x)$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned}
K_{9,4}^{(3)} &= \int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)K_{9,4}^{(2)}d\bar{s} \ = \int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\left(-\bar{S}(\bar{y}-\bar{s})\right)_{\bar{s}}d\bar{s} \\
&= \left[\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\bar{S}(\bar{y}-\bar{s})\right]_{\bar{s}=-1}^{\bar{s}=1}+\int_{|\bar{s}|>1}\left(\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right)_{\bar{s}}\bar{S}(\bar{y}-\bar{s})d\bar{s} \\
&= \xi\left(1+\frac{1}{N_n}\right)\{\bar{S}(\bar{y}-1)+\bar{S}(\bar{y}+1)\} \\
&\quad +\int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}^2}\bar{\xi}\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\bar{S}(\bar{y}-\bar{s})d\bar{s}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\bar{s}}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right)_{\bar{s}} &= -\frac{1}{\bar{s}^2}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)+\frac{1}{\bar{s}N_n}\xi'\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right) \\
= \frac{1}{\bar{s}^2}&\left\{-\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)+\frac{\bar{s}}{N_n}\xi'\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right\}
\end{aligned}$$

より、

$$\bar{\xi}(x)=-\xi(x)+(x-1)\xi'(x) \tag{137}$$

とした。$\bar{\xi}$ も ξ 同様、台が [1/2,3/2] に含まれる C^∞ 級の関数となる。これにより、(134) は、

$$\begin{aligned}
K_{9,4} &= h(z)\int_{-N_n}^{\infty}\bar{F}_7\left(1+\frac{\bar{y}}{N_n}\right)K_{9,4}^{(3)}d\bar{y} \\
&= h(z)\xi\left(1+\frac{1}{N_n}\right)\int_{-N_n}^{\infty}\bar{F}_7\left(1+\frac{\bar{y}}{N_n}\right)\{\bar{S}(\bar{y}-1)+\bar{S}(\bar{y}+1)\}d\bar{y} \\
&\quad +h(z)\int_{-N_n}^{\infty}\bar{F}_7\left(1+\frac{\bar{y}}{N_n}\right)d\bar{y}\int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}^2}\bar{\xi}\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\bar{S}(\bar{y}-\bar{s})d\bar{s}
\end{aligned} \tag{138}$$

となる。この最後の和を $K_{9,4,1}+K_{9,4,2}$ とする。

$\bar{S}(x)=\bar{S}[\psi_0,\hat{\psi}_0](x)$ は n にはよらない $\mathcal{S}$ の関数なので、$K_{9,4,1}$ は

$$|K_{9,4,1}|\le 2\|h\|_{L^\infty}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}\|\bar{S}[\psi_0,\hat{\psi}_0]\|_{L^1}$$

より一様有界、$K_{9,4,2}$ も $1/\bar{s}^2$ が $|\bar{s}|>1$ で可積分 (積分値は 2) なので、

$$|K_{9,4,2}|\le 2\|h\|_{L^\infty}\|\bar{F}_7\|_{L^\infty}\|\bar{\xi}\|_{L^\infty}\|\bar{S}[\psi_0,\hat{\psi}_0]\|_{L^1}$$

と評価され一様有界となる。よって $K_{9,4}$ は一様有界となる。

$K_{9,4}$ の極限は、(138) に Lebesgue 収束定理を適用すれば、

$$K_{9,4} \to K_{9,4}^{\infty} = h(z)\left(\bar{F}_7(1-0)\int_{-\infty}^{0} + \bar{F}_7(1+0)\int_{0}^{\infty}\right) K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y})d\bar{y} \tag{139}$$

となることがわかる。ここで、$K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y})$ は、

$$K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y}) = \bar{S}(\bar{y}-1) + \bar{S}(\bar{y}+1) - \int_{|\bar{s}|>1} \frac{1}{\bar{s}^2}\,\bar{S}(\bar{y}-\bar{s})d\bar{s} \tag{140}$$

とした。なお、(137) より $\bar{\xi}(1) = -\xi(1) = -1$ である。

$\bar{S}$ は偶関数なので、(140) は、

$$\begin{aligned} K_{9,4}^{(4),\infty}(-\bar{y}) &= \bar{S}(-\bar{y}-1) + \bar{S}(-\bar{y}+1) - \int_{|\bar{s}|>1} \frac{1}{\bar{s}^2}\,\bar{S}(-\bar{y}-\bar{s})d\bar{s} \\ &= \bar{S}(\bar{y}+1) + \bar{S}(\bar{y}-1) - \int_{|\bar{s}|>1} \frac{1}{\bar{s}^2}\,\bar{S}(\bar{y}+\bar{s})d\bar{s} \\ &= \bar{S}(\bar{y}+1) + \bar{S}(\bar{y}-1) - \int_{|s|>1} \frac{1}{s^2}\,\bar{S}(\bar{y}-s)ds \;=\; K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y}) \end{aligned}$$

となるので $K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y})$ は偶関数であり、よって (139) の $K_{9,4}^{\infty}$ は、

$$\begin{aligned} K_{9,4}^{\infty} &= h(z)\{\bar{F}_7(1-0) + \bar{F}_7(1+0)\}\int_0^{\infty} K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y})d\bar{y} \\ &= \frac{h(z)}{2}\{\bar{F}_7(1-0) + \bar{F}_7(1+0)\}\int_{\boldsymbol{R}} K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y})d\bar{y} \end{aligned}$$

と書ける。そして、

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{R}} K_{9,4}^{(4),\infty}(\bar{y})d\bar{y} &= \int_{\boldsymbol{R}} \left\{\bar{S}(\bar{y}-1) + \bar{S}(\bar{y}+1)\right\} d\bar{y} - \int_{|\bar{s}|>1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}^2}\int_{\boldsymbol{R}} \bar{S}(\bar{y}-\bar{s})d\bar{y} \\ &= 2\int_{\boldsymbol{R}} \bar{S}(y)dy - 2\int_{\boldsymbol{R}} \bar{S}(y)dy \;=\; 0 \end{aligned}$$

なので、

$$K_{9,4} \to K_{9,4}^{\infty} = 0 \tag{141}$$

となることがわかる。

これで一応 K_9 の有界性、極限が揃ったことになるので、極限をまとめてみると、

$$\begin{aligned} K_9 &= (\tau+1)(K_9^{(1)} - \hat{K}_9^{(1)}) \\ &= (\tau+1)\{(K_{9,1}^{(1)} - \hat{K}_{9,1}^{(1)}) + (K_{9,2}^{(1)} - \hat{K}_{9,2}^{(1)}) + (K_{9,3}^{(1)} - \hat{K}_{9,3}^{(1)}) + K_{9,4}\} \\ &\to K_9^{\infty} = (\tau+1)(K_{9,1}^{(1),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(1),\infty}) \end{aligned} \tag{142}$$

となる。あとは $K_{9,1}^{(1)}$ の極限 $K_{9,1}^{(1),\infty}$ であるが、(125) の $h(z)\bar{F}_7(1+0)$ の係数を $K_{9,1}^{(2),\infty}$ とすると、

$$K_{9,1}^{(2),\infty} = \int_{\boldsymbol{R}} \left\{ \int_{-\infty}^{t} \psi_0(y)dy \int_{|\bar{s}|<1} \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \right\} dt$$

であるが、$\{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)\}/\bar{s}$ が $|\bar{s}|<1$ 上 $t, \bar{s}$ に関して L^1 だから、Fubini の定理により、

$$K_{9,1}^{(2),\infty} = \int_{|\bar{s}|<1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_{\boldsymbol{R}} \{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)\} dt \int_{-\infty}^{t} \psi_0(y)dy$$

と書くことができる。ここで、

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{R}} \{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)\} dt \int_{-\infty}^{t} \psi_0(y)dy \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t) \left(\int_{-\infty}^{t+\bar{s}} \psi_0(y)dy - \int_{-\infty}^{t} \psi_0(y)dy \right) dt \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_{t}^{t+\bar{s}} \psi_0(y)dy \ = \ \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_0^{\bar{s}} \psi_0(t+\bar{y})d\bar{y} \end{aligned}$$

と変形できるので、$K_{9,1}^{(2),\infty}$ は

$$\begin{aligned} K_{9,1}^{(2),\infty} &= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_{-1}^{1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_0^{\bar{s}} \psi_0(t+\bar{y})d\bar{y} \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t) \left\{ \int_0^1 \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_0^{\bar{s}} \psi_0(t+\bar{y})d\bar{y} - \int_{-1}^{0} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_{\bar{s}}^{0} \psi_0(t+\bar{y})d\bar{y} \right\} dt \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t) \left\{ \int_0^1 \psi_0(t+\bar{y})d\bar{y} \int_{\bar{y}}^{1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} - \int_{-1}^{0} \psi_0(t+\bar{y})d\bar{y} \int_{-1}^{\bar{y}} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \right\} dt \\ &= -\int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)dt \int_{-1}^{1} \psi_0(t+\bar{y}) \log|\bar{y}| d\bar{y} \\ &= -\int_{-1}^{1} \log|\bar{y}| d\bar{y} \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)\psi_0(t+\bar{y})dt \end{aligned}$$

となる。よって、$K_{9,1}^{(1),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(1),\infty}$ の $h(z)\bar{F}_7(1+0)$ の係数 $K_{9,1}^{(2),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(2),\infty}$ は、

$$\begin{aligned} K_{9,1}^{(2),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(2),\infty} &= \int_{-1}^{1} \log|\bar{y}| d\bar{y} \int_{\boldsymbol{R}} \{\psi_0(t)\hat{\psi}_0(t+\bar{y}) - \hat{\psi}_0(t)\psi_0(t+\bar{y})\} dt \\ &= \int_{-1}^{1} S[\psi_0, \hat{\psi}_0](\bar{y}) \log|\bar{y}| d\bar{y} \end{aligned}$$

となる。

同様に、$K_{9,1}^{(1),\infty}$ の $h(z)\bar{F}_7(1-0)$ の係数 $K_{9,1}^{(3),\infty}$ は、

$$K_{9,1}^{(3),\infty} = \int_{\boldsymbol{R}} \left\{ \int_t^{\infty} \psi_0(y) dy \int_{|\bar{s}|<1} \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \right\} dt$$

であり、$K_{9,1}^{(2),\infty}$ と同様に変形すると、

$$\begin{aligned} K_{9,1}^{(3),\infty} &= \int_{|\bar{s}|<1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_{\boldsymbol{R}} \{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)\} dt \int_t^{\infty} \psi_0(y) dy \\ &= \int_{|\bar{s}|<1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t) \left(\int_{t+\bar{s}}^{\infty} \psi_0(y) dy - \int_t^{\infty} \psi_0(y) dy \right) dt \\ &= -\int_{|\bar{s}|<1} \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t) dt \int_t^{t+\bar{s}} \psi_0(y) dy \;=\; -K_{9,1}^{(2),\infty} \end{aligned}$$

であることがわかる。よって、

$$K_{9,1}^{(3),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(3),\infty} = -(K_{9,1}^{(2),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(2),\infty})$$

となるので、これにより $K_{9,1}^{(1),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(1),\infty}$ は (109) より、

$$\begin{aligned} K_{9,1}^{(1),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(1),\infty} &= h(z)\{\bar{F}_7(1+0) - \bar{F}_7(1-0)\}(K_{9,1}^{(2),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(2),\infty}) \\ &= -A_\tau h(z) \int_{-1}^{1} S[\psi_0, \hat{\psi}_0](\bar{y}) \log|\bar{y}| d\bar{y} \end{aligned}$$

となる。ところが、$S[\psi_0, \hat{\psi}_0](\bar{y})$ は奇関数なので、この最後の積分は 0 となり、よって K_9 の極限 K_9^{∞} は、

$$K_9^{\infty} = (\tau+1)(K_{9,1}^{(1),\infty} - \hat{K}_{9,1}^{(1),\infty}) = 0 \tag{143}$$

となる。

11 K_{10} の評価

K_{10} は、

$$
\begin{aligned}
K_{10}^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}(w-z)h(a)L[\Psi_n]P[\hat{\Psi}_n]da \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)\left\{\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(N_n(1-x)+t)\xi(x)\log|x-1|dx\right. \\
&\quad \left.\times(w-z)P[\hat{\Psi}_n]\right\}dt
\end{aligned}
$$

を $y=N_n(1-x)+t$ と置換して、そして 10 節の (122) での $P[\Psi_n]$ の分割を用いて、次のように分ける。

$$
\begin{aligned}
K_{10}^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)dt\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dy \\
&\quad \times\int_{|\bar{s}|<1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}d\bar{s} \\
&\quad +\int_{\boldsymbol{R}} h\left(z-\frac{t}{n}\right)dt\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dy \\
&\quad \times\int_{|\bar{s}|>1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})}{\bar{s}}d\bar{s} \\
&= K_{10,1}^{(1)}+K_{10,2}^{(1)} \qquad (144)
\end{aligned}
$$

まずは $K_{10,1}^{(1)}$ の方から考えるが、n を固定すれば当然 $t,y,\bar{s}$ に関して L^1 なので、Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
K_{10,1}^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)dy\int_{|\bar{s}|<1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)d\bar{s}\int_{\boldsymbol{R}}\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}h\left(z-\frac{t}{n}\right) \\
&\quad \times\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|dt
\end{aligned}
$$

となるが、

$$
\int_{\boldsymbol{R}}\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}dt=0
$$

であることを利用し、最内側の積分を

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}}\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\left\{h\left(z-\frac{t}{n}\right)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|\right. \\
&\qquad \left.-h\left(z-\frac{y+\bar{s}}{n}\right)\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|\right\}dt
\end{aligned}
$$

と書き換え、さらにこの中かっこの部分を以下のように分ける。

$$\begin{aligned}
h\left(z-\frac{t}{n}\right)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right| - h\left(z-\frac{y+\bar{s}}{n}\right)\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right| \\
= K^{(2)}_{10,1,1}+K^{(2)}_{10,1,2}+K^{(2)}_{10,1,3}+K^{(2)}_{10,1,4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K^{(2)}_{10,1,1} &= \left\{h\left(z-\frac{t}{n}\right)-h\left(z-\frac{y}{n}\right)\right\}\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|, \\
K^{(2)}_{10,1,2} &= \left\{h\left(z-\frac{y}{n}\right)-h\left(z-\frac{y+\bar{s}}{n}\right)\right\}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|, \\
K^{(2)}_{10,1,3} &= h\left(z-\frac{y}{n}\right)\left\{\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)-\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right\}\log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|, \\
K^{(2)}_{10,1,4} &= h\left(z-\frac{y}{n}\right)\xi\left(1+\frac{t-y}{N_n}\right)\left\{\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right|-\log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right|\right\}
\end{aligned}$$

そして、そのそれぞれの積分を $K^{(1)}_{10,1,j}$ とする:

$$\begin{aligned}
K^{(1)}_{10,1,j} &= \int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)dy\int_{|\bar{s}|<1}\xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right)d\bar{s}\int_{\boldsymbol{R}}\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\,K^{(2)}_{10,1,j}dy \\
&\quad (j=1,2,3,4) \\
K^{(1)}_{10,1} &= K^{(1)}_{10,1,1}+K^{(1)}_{10,1,2}+K^{(1)}_{10,1,3}+K^{(1)}_{10,1,4}
\end{aligned}$$

まずは、この $K^{(1)}_{10,1,j}$ $(j=1,2,3,4)$ を順に評価する。このうち、$K^{(1)}_{10,1,1}$, $K^{(1)}_{10,1,2}$ については、命題 3 と (114) の g_1 により

$$|K^{(2)}_{10,1,1}|\le g_1\left(\frac{t-y}{N_n}\right),\quad |K^{(2)}_{10,1,2}|\le g_1\left(\frac{\bar{s}}{N_n}\right)$$

と評価でき、よって $K^{(2)}_{10,1,1}$, $K^{(2)}_{10,1,2}$ は一様有界となる。$(\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t))/\bar{s}$ は (124) より $|\bar{s}|<1$ 上 t, $\bar{s}$ に関して L^1 で、その積分は $2\|\hat{\psi}_0'\|_{L^1}$ でおさえられるので、

$$|K^{(1)}_{10,1,1}|\le 2\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0'\|_{L^1}\|g_1\|_{L^\infty},\quad |K^{(1)}_{10,1,2}|\le 2\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0'\|_{L^1}\|g_1\|_{L^\infty}$$

より $K^{(1)}_{10,1,1}$, $K^{(1)}_{10,1,2}$ も一様有界となる。

極限は、$n\to\infty$ のときに

$$g_1\left(\frac{t-y}{N_n}\right)\to g_1(0)=0,\quad g_1\left(\frac{\bar{s}}{N_n}\right)\to 0$$

となるので、Lebesgue 収束定理により、

$$K^{(1)}_{10,1,1} \to 0, \quad K^{(1)}_{10,1,2} \to 0 \tag{145}$$

となる。

$K^{(1)}_{10,1,3}$ については、$\bar{s} = N_n u$ と置換すると

$$\begin{aligned}
K^{(1)}_{10,1,3} &= \int_{\boldsymbol{R}} dt \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z - \frac{y}{n}\right) \psi_0(y) dy \int_{|\bar{s}|<1} \left\{\xi\left(1 + \frac{t-y}{N_n}\right) - \xi\left(1 + \frac{\bar{s}}{N_n}\right)\right\} \\
&\quad \times \log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right| \xi\left(1 + \frac{\bar{s}}{N_n}\right) \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\, d\bar{s} \\
&= \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z - \frac{y}{n}\right) \psi_0(y) dy \int_{|u|<1/N_n} N_n \xi(1+u) \log|u| du \\
&\quad \times \int_{\boldsymbol{R}} \left\{\xi\left(1 + \frac{t-y}{N_n}\right) - \xi(1+u)\right\} \frac{\hat{\psi}_0(t - N_n u) - \hat{\psi}_0(t)}{N_n u}\, dt
\end{aligned}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
& N_n \left\{\xi\left(1 + \frac{t-y}{N_n}\right) - \xi(1+u)\right\} \\
&= \frac{N_n}{t - y - N_n u} \left\{\xi\left(1 + \frac{t-y}{N_n}\right) - \xi(1+u)\right\} (t - y - N_n u)
\end{aligned}$$

より、これは、

$$\left| N_n \left\{\xi\left(1 + \frac{t-y}{N_n}\right) - \xi(1+u)\right\}\right| \le \|\xi'\|_{L^\infty} |t - y - N_n u|$$

と評価できる。また、この $(t - y - N_n u)$ については $\psi_0, \hat{\psi}_0$ に以下のように取り込む。

$$\begin{aligned}
& (t - y - N_n u)\psi_0(y) \frac{\hat{\psi}_0(t - N_n u) - \hat{\psi}_0(t)}{N_n u} \\
&= \psi_0(y) \frac{(t - N_n u)\hat{\psi}_0(t - N_n u) - (t - N_n u)\hat{\psi}_0(t)}{N_n u} \\
&\quad - y\psi_0(y) \frac{\hat{\psi}_0(t - N_n u) - \hat{\psi}_0(t)}{N_n u} \\
&= \psi_0(y) \left\{\frac{\hat{\psi}_{0,1}(t - N_n u) - \hat{\psi}_{0,1}(t)}{N_n u} + \hat{\psi}_0(t)\right\} - \psi_{0,1}(y) \frac{\hat{\psi}_0(t - N_n u) - \hat{\psi}_0(t)}{N_n u}
\end{aligned}$$

一般に、$\phi \in \mathcal{S}$ に対して

$$\int_{\boldsymbol{R}} \left| \frac{\phi(t - N_n u) - \phi(t)}{N_n u} \right| dt = \int_{\boldsymbol{R}} \left| \int_0^1 \{-\phi'(t - \theta N_n u)\} d\theta \right| dt \le \|\phi'\|_{L^1}$$

なのでよって $K_{10,1,3}^{(1)}$ は、

$$\begin{aligned} |K_{10,1,3}^{(1)}| \;&\le\; \|h\|_{L^\infty} \|\xi'\|_{L^\infty} \int_{|u| \le 1/N_n} \xi(1+u) \left| \log |u| \right| du \\ &\quad \times (\|\psi_0\|_{L^1} \|\hat{\psi}_{0,1}'\|_{L^1} + \|\psi_0\|_{L^1} \|\hat{\psi}_0\|_{L^1} + \|\psi_{0,1}\|_{L^1} \|\hat{\psi}_0'\|_{L^1}) \end{aligned}$$

とおさえられ、

$$\int_{|u| \le 1/N_n} \xi(1+u) \left| \log |u| \right| du \le \|\xi(1+u) \log |u|\|_{L^1} \tag{146}$$

より $K_{10,1,3}^{(1)}$ は一様有界となることがわかる。

さらに、この (146) の左辺は $N_n \to \infty$ より 0 に収束するので、$n \to \infty$ のときの $K_{10,1,3}^{(1)}$ の極限は

$$K_{10,1,3}^{(1)} \to 0 \tag{147}$$

となる。

$K_{10,1,4}^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} K_{10,1,4}^{(1)} \;&=\; \int_{\boldsymbol{R}} h\left(z - \frac{y}{n}\right) \psi_0(y) dy \int_{|\bar{s}|<1} \xi\left(1 + \frac{\bar{s}}{N_n}\right) d\bar{s} \\ &\quad \times \int_{\boldsymbol{R}} \frac{\hat{\psi}_0(t - \bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \xi\left(1 + \frac{t-y}{N_n}\right) \log \left| \frac{t-y}{\bar{s}} \right| dt \end{aligned} \tag{148}$$

となるが、n によらない関数

$$K_{10,1,4}^{(2)} = \psi_0(y) \frac{\hat{\psi}_0(t - \bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \log \left| \frac{t-y}{\bar{s}} \right| \tag{149}$$

の $|\bar{s}| < 1$ 上での $y, \bar{s}, t$ に関する可積分性を示す。まず、

$$\left| \log \left| \frac{t-y}{\bar{s}} \right| \right| \le \left| \log |t-y| \right| + \left| \log |\bar{s}| \right|$$

と分ける。この $\log|\bar{s}|$ の方は、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} \left| \psi_0(y)\, \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\, \log|\bar{s}| \right| dt \\
\leq\ & \int_{\boldsymbol{R}} |\psi_0(y)| dy \int_{|\bar{s}|<1} |\log|\bar{s}||\, d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} \left| \int_0^1 \{-\hat{\psi}_0'(t-\theta\bar{s}\} d\theta \right| dt \\
\leq\ & \|\psi_0\|_{L^1} \|\log|\bar{s}|\|_{L^1(-1,1)} \|\hat{\psi}_0'\|_{L^1} \qquad (150)
\end{aligned}
$$

より可積分となる。次に $\log|t-y|$ の方であるが、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} \left| \psi_0(y)\, \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\, \log|t-y| \right| dt \\
=\ & \int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{|t-y|>1} dt + \int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{y-1}^{y+1} dt \\
=\ & K^{(3)}_{10,1,4,1} + K^{(3)}_{10,1,4,2}
\end{aligned}
$$

と分けると、$x>1$ で $0<\log x<x$ なので $K^{(3)}_{10,1,4,1}$ では $\log|t-y|$ を $|t-y|$ でおさえて、この $t-y$ を補題 7 を用いて ψ_0 と $\hat{\psi}_0$ に取り込む。

$$
\begin{aligned}
(t-y)\psi_0(y)\, \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \ &=\ (y-t)\psi_0(y) \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{-\bar{s}} \\
=\ & \psi_{0,1}(y) \frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta t}(t) - \psi_0(y)\, t\, \frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta t}(t) \\
=\ & \psi_{0,1}(y) \frac{\Delta\hat{\psi}_0}{\Delta t}(t) - \psi_0(y) \left\{ \frac{\Delta\hat{\psi}_{0,1}}{\Delta t}(t) - \hat{\psi}_0(t-\bar{s}) \right\} \\
=\ & \psi_{0,1}(y) \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{-\bar{s}} - \psi_0(y)\, \frac{\hat{\psi}_{0,1}(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_{0,1}(t)}{-\bar{s}} + \psi_0(y)\hat{\psi}_0(t-\bar{s})
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
K^{(3)}_{10,1,4,1} \ \leq\ & \int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{|t-y|>1} \left| \psi_0(y)\, \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \log|t-y| \right| dt \\
\leq\ & \int_{\boldsymbol{R}} |\psi_{0,1}(y)| dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} \left| \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \right| dt \\
& + \int_{\boldsymbol{R}} |\psi_0(y)| dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} \left| \frac{\hat{\psi}_{0,1}(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_{0,1}(t)}{\bar{s}} \right| dt \\
& + \int_{\boldsymbol{R}} |\psi_0(y)| dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} |\hat{\psi}_0(t-\bar{s})| dt \\
\leq\ & 2\|\psi_{0,1}\|_{L^1} \|\hat{\psi}_0'\|_{L^1} + 2\|\psi_0\|_{L^1} \|\hat{\psi}_{0,1}'\|_{L^1} + 2\|\psi_0\|_{L^1} \|\hat{\psi}_0\|_{L^1} \qquad (151)
\end{aligned}
$$

でおさえられる。また、$K^{(3)}_{10,1,4,2}$ は、

$$\begin{aligned} K^{(3)}_{10,1,4,2} &= \int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{y-1}^{y+1} \left| \psi_0(y) \, \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \, \log|t-y| \right| dt \\ &\leq 2\|\psi_0\|_{L^1} \|\hat{\psi}_0'\|_{L^\infty} \|\log|t|\|_{L^1(-1,1)} \end{aligned} \tag{152}$$

とおさえられる。よって、(150), (151), (152) より、

$$\int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} |K^{(2)}_{10,1,4}| dt < \infty \tag{153}$$

となり、$K^{(2)}_{10,1,4}$ は $|\bar{s}| > 1$ 上 $y, \bar{s}, t$ に関して L^1 となる。

$K^{(2)}_{10,1,4}$ は n によらないので、(148) に戻ると、$K^{(1)}_{10,1,4}$ は、

$$|K^{(1)}_{10,1,4}| \leq \|h\|_{L^\infty} \int_{\boldsymbol{R}} dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} |K^{(2)}_{10,1,4}| dt$$

とおさえられ、一様有界となる。

$K^{(1)}_{10,1,4}$ の極限も、(153) により Lebesgue 収束定理が適用でき、よって、

$$\begin{aligned} K^{(1)}_{10,1,4} &\to K^{(1),\infty}_{10,1,4} \\ &= h(z) \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y) dy \int_{|\bar{s}|<1} d\bar{s} \int_{\boldsymbol{R}} \frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s}) - \hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}} \log\left|\frac{t-y}{\bar{s}}\right| dt \end{aligned} \tag{154}$$

となることがわかる。この極限の評価については、後で考える。これで、$K^{(1)}_{10,1}$ の有界性と極限が得られたことになる。

次は (144) の $K^{(1)}_{10,2}$ を考える。$K^{(1)}_{10,2}$ の log の部分を

$$\log\left|\frac{t-y}{N_n}\right| = \log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right| + \log\left|\frac{t-y}{\bar{s}}\right|$$

と分け、$K^{(1)}_{10,2}$ を、前者を持つ $K^{(1)}_{10,2,1}$ と後者を持つ $K^{(1)}_{10,2,2}$ の 2 つに分ける。まずは $K^{(1)}_{10,2,1}$ から考える。t を $t - \bar{s} = \bar{t}$ と置換すると、

$$\begin{aligned} K^{(1)}_{10,2,1} &= \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y) dy \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(\bar{t}) d\bar{t} \\ &\quad \times \int_{|\bar{s}|>1} h\left(z - \frac{\bar{t}+\bar{s}}{n}\right) \xi\left(1 + \frac{\bar{t}+\bar{s}-y}{N_n}\right) \xi\left(1 + \frac{\bar{s}}{N_n}\right) \frac{1}{\bar{s}} \log\left|\frac{\bar{s}}{N_n}\right| d\bar{s} \end{aligned}$$

となる。この、$\psi_0, \hat{\psi}_0$ を除いた、最も内側の $\bar{s}$ に関する積分の部分を $K^{(2)}_{10,2,1}$ とする。$\bar{s} = N_n u$ と置換すると、

$$\begin{aligned} K^{(2)}_{10,2,1} &= \int_{1/N_n<|u|<1/2} h\left(z-(w-z)u-\frac{\bar{t}}{n}\right)\xi\left(1+u+\frac{\bar{t}-y}{N_n}\right) \\ &\quad \times \frac{\xi(1+u)}{u}\log|u|du \\ &= \int_{1/N_n}^{1/2} du + \int_{-1/2}^{-1/N_n} du \end{aligned}$$

となる。後者の積分で u を $-u$ に変えると、$\xi(1-u)=\xi(1+u)$ より、

$$\begin{aligned} K^{(2)}_{10,2,1} &= \int_{1/N_n}^{1/2} \frac{\xi(1+u)}{u}\log|u|\left\{h\left(z-(w-z)u-\frac{\bar{t}}{n}\right)\xi\left(1+u+\frac{\bar{t}-y}{N_n}\right)\right. \\ &\quad \left. -h\left(z+(w-z)u-\frac{\bar{t}}{n}\right)\xi\left(1-u+\frac{\bar{t}-y}{N_n}\right)\right\}du \end{aligned}$$

となる。この中かっこの部分を $K^{(3)}_{10,2,1}$ とすると、命題 3 より、

$$|K^{(3)}_{10,2,1}| \le C_0\{(w-z)^{2\tau}|2u|^{2\tau}+(w-z)|2u|\}+2\|h\|_{L^\infty}\|\xi'\|_{L^\infty}|u|$$

と評価できるので、$K^{(2)}_{10,2,1}$ の被積分関数の絶対値は

$$\begin{aligned} &\xi(1+u)\,|\log|u|| \\ &\quad \times\left(C_0\{2^{2\tau}(w_1-z_1)^{2\tau}|u|^{2\tau-1}+2(w_1-z_1)\}+2\|h\|_{L^\infty}\|\xi'\|_{L^\infty}\right) \end{aligned} \tag{155}$$

以下となり、(155) は $(0,1/2)$ 上 u に関して L^1 なので、$K^{(2)}_{10,2,1}$ は一様有界となる。よって、

$$K^{(1)}_{10,2,1} = \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t) K^{(2)}_{10,2,1} dt$$

も一様有界となる。

そして、(155) が L^1 であることから、$K^{(2)}_{10,2,1}$ に Lebesgue 収束定理を適用でき、

$$\begin{aligned} K^{(2)}_{10,2,1} &\to K^{(2),\infty}_{10,2,1} \\ &= \int_0^{1/2}\{h(z-(w-z)u)\xi(1+u)-h(z+(w-z)u)\xi(1-u)\} \\ &\quad \times \frac{\xi(1+u)}{u}\log|u|du \\ &= \int_0^{1/2} \frac{h(z-(w-z)u)-h(z+(w-z)u)}{u}\xi(1+u)^2\log|u|du \end{aligned}$$

となる。この極限 $K_{10,2,1}^{(2),\infty}$ は w,z には依存するが $\bar{t},y$ には無関係なので、よって $K_{10,2,1}^{(1)}$ の極限は、再び Lebesgue 収束定理により

$$K_{10,2,1}^{(1)} \to K_{10,2,1}^{(1),\infty} = K_{10,2,1}^{(2),\infty} \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(\bar{t})d\bar{t}$$

となる。$K_{10,2,1}^{(1),\infty}$ は $\psi_0, \hat{\psi}_0$ の入れかえで不変となり、よって

$$K_{10,2,1}^{(1)} - \hat{K}_{10,2,1}^{(1)} \to 0 \tag{156}$$

となる。

あとは $K_{10,2,2}^{(1)}$ のみであるが、これも $t-\bar{s}=\bar{t}$ とすると、

$$\begin{aligned} K_{10,2,2}^{(1)} &= \int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(\bar{t})d\bar{t} \int_{|\bar{s}|>1} h\left(z - \frac{\bar{t}+\bar{s}}{n}\right) \xi\left(1 + \frac{\bar{t}+\bar{s}-y}{N_n}\right) \\ &\quad \times \xi\left(1+\frac{\bar{s}}{N_n}\right) \frac{1}{\bar{s}} \log\left|1 + \frac{\bar{t}-y}{\bar{s}}\right| d\bar{s} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$K_{10,2,2}^{(2)} = \psi_0(y)\hat{\psi}_0(\bar{t}) \frac{1}{\bar{s}} \log\left|1 + \frac{\bar{t}-y}{\bar{s}}\right| \tag{157}$$

が $|\bar{s}|>1$ 上 $y,\bar{t},\bar{s}$ に関して L^1 であることを示す。そのために、関数

$$g_2(\alpha) = \int_{|x|>1} \left|\frac{1}{x} \log\left|1+\frac{\alpha}{x}\right|\right| dx \tag{158}$$

を考える。この積分の特異性は、$x \to \pm\infty$ と $x=-\alpha$ に現れるが、$x \to \pm\infty$ のときは $\alpha/x \to 0$ より

$$\log\left|1+\frac{\alpha}{x}\right| = O\left(\frac{\alpha}{x}\right)$$

となるので、$x \to \pm\infty$ に関しては (158) の積分は収束する。また、$|\alpha| \geq 1$ のとき、$x=-\alpha$ の付近では、

$$\frac{1}{x} \log\left|1+\frac{\alpha}{x}\right| = \frac{1}{x}\left(\log|x+\alpha| - \log|x|\right) \approx -\frac{1}{\alpha}\{\log|x+\alpha| - \log|\alpha|\}$$

なので、やはり可積分となり、よって $g_2(\alpha)$ は確かに収束する。また $g_2(-\alpha) = g_2(\alpha)$ も容易にわかるので、$\alpha > 0$ の場合のみ考えればよい。$\alpha/x = u$ とすると、

$$g_2(\alpha) = \int_{|u|<\alpha} \left| \frac{\alpha}{u^2} \cdot \frac{u}{\alpha} \log|1+u| \right| du = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \frac{1}{u} \log|1+u| \right| du$$

となるが、$(\log|1+u|)/u$ は $u \neq -1$ 以外では連続で、$u = -1$ の付近では可積分なので、$0 < \alpha < 2$ ならば $g_2(\alpha)$ は有界となる。$\alpha > 2$ での評価を考えるために、$\alpha \to \infty$ でのオーダーの評価を行う。

$(\log|1+u|)/u$ は $(1, \infty)$ では可積分ではないので、$\alpha \to \infty$ では $g_2(\alpha)$ は ∞ に発散する。$\alpha > 2$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{g_2'(\alpha)}{\{(\log\alpha)^2\}'} &= \frac{|(\log|1+\alpha|)/\alpha| + |(\log|1-\alpha|)/\alpha|}{2(\log\alpha)/\alpha} \\ &= \frac{\log(\alpha+1) + \log(\alpha-1)}{2\log\alpha} \end{aligned}$$

であり、最後の式の $\alpha \to \infty$ に対する極限は、ロピタルの定理より

$$\frac{1/(\alpha+1) + 1/(\alpha-1)}{2/\alpha} \to 1$$

となる。よって再びロピタルの定理により、

$$\frac{g_2(\alpha)}{(\log\alpha)^2} \to 1$$

となることがわかり、よって $g_2(\alpha) = (\log\alpha)^2(1 + o(1))$ なので、よって

$$g_2(\alpha) \le \begin{cases} C_6(\log|\alpha|)^2 & (|\alpha| > 2) \\ C_7 & (|\alpha| < 2) \end{cases} \tag{159}$$

と評価できることになる。ここから例えば、

$$g_2(\alpha) \le C_8(1 + |\alpha|) \tag{160}$$

となる定数 C_8 も取れることになる。

$K^{(2)}_{10,2,2}$ に戻れば、(157), (158), (160) より

$$\begin{aligned}\int_{|\bar{s}|>1}|K^{(2)}_{10,2,2}|d\bar{s} \;&=\; |\psi_0(y)\hat{\psi}_0(\bar{t})|g_2(\bar{t}-y) \;\le\; C_8(1+|\bar{t}-y|)|\psi_0(y)\hat{\psi}_0(\bar{t})| \\ &\le\; C_8(|\psi_0(y)\hat{\psi}_0(\bar{t})|+|\psi_0(y)\hat{\psi}_{0,1}(\bar{t})|+|\psi_{0,1}(y)\hat{\psi}_0(\bar{t})|)\end{aligned}$$

となるので、これで $K^{(2)}_{10,2,2}$ が $|\bar{s}|>1$ 上で $y,\bar{t},\bar{s}$ に関して可積分であることがわかる。よって、

$$|K^{(1)}_{10,2,2}| \le \|h\|_{L^\infty}\iiint_{|\bar{s}|>1}|K^{(2)}_{10,2,2}|dyd\bar{t}d\bar{s}$$

より $K^{(1)}_{10,2,2}$ が一様有界であることが示されたことになる。

$K^{(1)}_{10,2,2}$ の極限は、Lebesgue 収束定理より、

$$K^{(1)}_{10,2,2} \to K^{(1),\infty}_{10,2,2} = h(z)\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)dy\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(\bar{t})g_3(\bar{t}-y)d\bar{t} \tag{161}$$

となる。ここで、g_3 は

$$g_3(\alpha) = \int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}}\log\left|1+\frac{\alpha}{\bar{s}}\right|d\bar{s} \tag{162}$$

とした。$g_3(\alpha)$ が収束することは $g_2(\alpha)$ の考察からわかる。

以上で K_{10} の一様有界性とその極限がわかり、(145), (147), (154), (156), (161) より、

$$\begin{aligned}K_{10} \;&=\; (\tau+1)(K^{(1)}_{10}-\hat{K}^{(1)}_{10}) \;=\; (\tau+1)\{(K^{(1)}_{10,1}-\hat{K}^{(1)}_{10,1})+(K^{(1)}_{10,2}-\hat{K}^{(1)}_{10,2})\} \\ &\to\; K^{\infty}_{10} \;=\; (\tau+1)\{(K^{(1),\infty}_{10,1,4}-\hat{K}^{(1),\infty}_{10,1,4})+(K^{(1),\infty}_{10,2,2}-\hat{K}^{(1),\infty}_{10,2,2}\}\end{aligned} \tag{163}$$

のみが残ることになる。よってあとは (154) の $K^{(1),\infty}_{10,1,4}$ と (161) の $K^{(1),\infty}_{10,2,2}$ を考えればよい。(154) の最内側の t に関する積分は

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}}\frac{\hat{\psi}_0(t-\bar{s})-\hat{\psi}_0(t)}{\bar{s}}\log\left|\frac{t-y}{\bar{s}}\right|dt \\ &= \frac{1}{\bar{s}}\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(t)\left\{\log\left|\frac{t+\bar{s}-y}{\bar{s}}\right|-\log\left|\frac{t-y}{\bar{s}}\right|\right\}dt \\ &= \frac{1}{\bar{s}}\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(t)\log\left|1+\frac{\bar{s}}{t-y}\right|dt\end{aligned} \tag{164}$$

となるので、

$$K_{10,1,4}^{(4)} = \psi_0(y)\hat{\psi}_0(t)\,\frac{1}{\bar{s}}\,\log\left|1+\frac{\bar{s}}{t-y}\right| \tag{165}$$

が $|\bar{s}|>1$ 上で $t, y, \bar{s}$ に関して L^1 であることがわかれば、$K_{10,1,4}^{(1),\infty}$ の積分を (165) に置き換えたものに対して Fubini の定理が使えることになる。今、$\alpha \neq 0$ に対し、

$$g_4(\alpha) = \int_{|\bar{s}|<1}\left|\frac{1}{\bar{s}}\,\log\left|1+\frac{\bar{s}}{\alpha}\right|\right|d\bar{s} \tag{166}$$

とすると、$1/\bar{s}=u$ の置換により

$$g_4(\alpha) = \int_{|u|>1}\left|\frac{1}{u}\,\log\left|1+\frac{1}{u\alpha}\right|\right|du = g_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

となるので、(159) より、

$$g_4(\alpha) \le \begin{cases} C_6(\log|\alpha|)^2 & (|\alpha|<1/2) \\ C_7 & (|\alpha|>1/2) \end{cases}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}}dt\int_{\boldsymbol{R}}dy\int_{|\bar{s}|<1}|K_{10,1,4}^{(4)}|d\bar{s} \;&=\; \int_{\boldsymbol{R}}|\psi_0(y)|dy\int_{\boldsymbol{R}}|\hat{\psi}_0(t)|g_4(t-y)dy \\
&\le\; \int_{\boldsymbol{R}}|\psi_0(y)|dy\int_{y-1/2}^{y+1/2}C_6|\hat{\psi}_0(t)|(\log|t-y|)^2dt \\
&\quad\; +\int_{\boldsymbol{R}}|\psi_0(y)|dy\int_{|t-y|>1/2}C_7|\hat{\psi}_0(t)|dt \\
&\le\; \|\psi_0\|_{L^1}\left(C_6\|\hat{\psi}_0\|_{L^\infty}\|(\log|x|)^2\|_{L^1(-1/2,1/2)}+C_7\|\hat{\psi}_0\|_{L^1}\right)
\end{aligned}$$

とおさえられ、これで $K_{10,1,4}^{(4)}$ が可積分であることが保証される。よって、(154) の $K_{10,1,4}^{(1),\infty}$ を (165) に変えたものに Fubini の定理が使えて、

$$K_{10,1,4}^{(1),\infty} = h(z)\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)dy\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(t)g_5(t-y)dt \tag{167}$$

となる。ここで、

$$g_5(\alpha) = \int_{|\bar{s}|<1}\frac{1}{\bar{s}}\,\log\left|1+\frac{\bar{s}}{\alpha}\right|d\bar{s} \tag{168}$$

としたが、$\bar{s}=1/u$ により、

$$g_5(\alpha)=\int_{|u|>1}\frac{1}{u}\log\left|1+\frac{1}{u\alpha}\right|du=g_3\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

となるので、よって (161), (167) より

$$K_{10,1,4}^{(1),\infty}+K_{10,2,2}^{(1),\infty}=\int_{\boldsymbol{R}}\psi_0(y)dy\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\psi}_0(t)\left\{g_3(t-y)+g_3\left(\frac{1}{t-y}\right)\right\}dt \tag{169}$$

となる。この $g_3(\alpha)+g_3(1/\alpha)$ を考えてみる。なお、

$$g_3(-\alpha)=\int_{|\bar{s}|>1}\frac{1}{\bar{s}}\log\left|1-\frac{\alpha}{\bar{s}}\right|d\bar{s}=-\int_{|s|>1}\frac{1}{s}\log\left|1+\frac{\alpha}{s}\right|ds=-g_3(\alpha)$$

となるので $g_3(\alpha)$ は奇関数であり、よって $\alpha>0$ として考える。

$$g_3(\alpha)=\int_1^\infty d\bar{s}+\int_{-\infty}^{-1}d\bar{s}$$

であり、後者で $\bar{s}$ を $-\bar{s}$ にすれば、

$$\begin{aligned}g_3(\alpha)&=\int_1^\infty\frac{1}{\bar{s}}\log\left|1+\frac{\alpha}{\bar{s}}\right|d\bar{s}-\int_1^\infty\frac{1}{\bar{s}}\log\left|1-\frac{\alpha}{\bar{s}}\right|d\bar{s}\\&=\int_1^\infty\frac{1}{\bar{s}}\log\left|\frac{1+\alpha/\bar{s}}{1-\alpha/\bar{s}}\right|d\bar{s}\ =\ \int_1^\infty\frac{1}{\bar{s}}\log\left|\frac{\bar{s}+\alpha}{\bar{s}-\alpha}\right|d\bar{s}\end{aligned}$$

となるが、$\bar{s}=\alpha t$ とすると $\alpha>0$ より

$$g_3(\alpha)=\int_{1/\alpha}^\infty\frac{1}{t}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|dt$$

となる。ここで、$1/t=u$ とすると、

$$g_3(\alpha)=\int_0^\alpha u\times\frac{1}{u^2}\log\left|\frac{1/u+1}{1/u-1}\right|du=\int_0^\alpha\frac{1}{u}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|du$$

となるので、結局

$$g_3(\alpha)+g_3\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^\infty\frac{1}{t}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|dt$$

は、α によらない定数 $(= g_6$ とする$)$ になることがわかる。一応この値 g_6 も求めておく。

まず $(t-1)/(t+1) = y$ と置換すると、$t = (1+y)/(1-y),\, dt = 2dy/(1-y)^2$ より、

$$
\begin{aligned}
g_6 &= \int_{-1}^{1} \frac{1-y}{1+y} \frac{2}{(1-y)^2} \log\left|\frac{1}{y}\right| dy = \int_{-1}^{1} \frac{-2}{1-y^2} \log|y| dy \\
&= -4\int_0^1 \frac{\log y}{1-y^2} dy
\end{aligned}
$$

となり、$-\log y = s$ とすると $y = e^{-s},\, dy = -e^{-s}ds$ より

$$
g_6 = 4\int_0^\infty \frac{e^{-s}s}{1-e^{-2s}}\, ds = 4\int_0^\infty s(e^{-s} + e^{-3s} + e^{-5s} + \cdots)ds
$$

なので、Lebesgue 収束定理により、

$$
\begin{aligned}
g_6 &= 4\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty se^{-(2n-1)s} ds = 4\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} \int_0^\infty \bar{s}e^{-\bar{s}} d\bar{s} \\
&= 4\,\Gamma(2)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = 4\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2}\right) = 4 \times \frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \\
&= 3 \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

となる。これで、$g_3(\alpha)$ が奇関数であることと合わせて、$\mathrm{sgn}(x)$ を符号関数とすれば、$\alpha > 0,\, \alpha < 0$ のいずれでも

$$
g_3(\alpha) + g_3\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{sgn}(\alpha)
$$

と表されることになる。よって (169) は、

$$
\begin{aligned}
K_{10,1,4}^{(1),\infty} + K_{10,2,2}^{(1),\infty} &= \frac{\pi^2}{2}\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)dy \int_{\boldsymbol{R}} \hat{\psi}_0(t)\,\mathrm{sgn}(t-y)dt \\
&= \frac{\pi^2}{2}\int_{\boldsymbol{R}} \psi_0(y)\left(-\int_{-\infty}^{y} \hat{\psi}_0(t)dt + \int_y^\infty \hat{\psi}_0(t)dt\right) dy \\
&= \frac{\pi^2}{2} R[\psi_0, \hat{\psi}_0]
\end{aligned}
$$

となる。これで、(163) より K_{10}^∞ は

$$
K_{10}^\infty = (\tau+1)\{(K_{10,1,4}^{(1),\infty} + K_{10,2,2}^{(1),\infty}) - (\hat{K}_{10,1,4}^{(1),\infty} + \hat{K}_{10,2,2}^{(1),\infty})\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\tau+1)\left\{\frac{\pi^2}{2}R[\psi_0,\hat{\psi}_0]-\frac{\pi^2}{2}R[\hat{\psi}_0,\psi_0]\right\}h(z) \\
&= (\tau+1)\pi^2 R[\psi_0,\hat{\psi}_0]h(z) \qquad (170)
\end{aligned}
$$

となる。

以上、8 節、9 節、10 節と本節の内容、特に (110), (111), (170) より、次のことが言える。

命題 8

$$
\int_{\boldsymbol{R}} h(a)B_n da
$$

は $w, z \in [z_1, w_1]$ 上 n に関して一様有界で、その $n \to \infty$ の極限は、

$$
\int_{\boldsymbol{R}} h(a)B_n da \to \theta(\tau+1)\frac{(w-z)^{2\tau}}{\Gamma(-\tau)^2}\left\{(A_\tau^2+\pi^2)h(z)+B_\tau^2 h(w)\right\}R[\psi_0,\hat{\psi}_0]
$$

となる。

12　結論とコンパクト性に関する補足

後の議論は、[3] とほぼ同じである。命題 6 と命題 8 により、

$$
\langle\{(A_\tau^2+\pi^2)h(z)+B_\tau^2 h(w)\}(w-z)^{2\tau}\rangle R[\psi_0,\hat{\psi}_0]=0 \qquad (171)
$$

が言え、[3] で示したように $R[\psi_0,\hat{\psi}_0]\neq 0$ ([3] では $I_5\neq 0$) なる $\psi_0,\hat{\psi}_0\in\mathcal{S}$ が存在することから

$$
\langle\{(A_\tau^2+\pi^2)h(z)+B_\tau^2 h(w)\}(w-z)^{2\tau}\rangle = 0
$$

となり、$\tau>0$ に対して、$A_\tau^2+\pi^2>0$, $B_\tau^2>0$ なので、命題 3 より、ν の台は

$$
\operatorname{supp}\nu \subset \{(w_1,z_1)\}\cup\{w=z\}
$$

に含まれることがわかり、そこから [3] の 7 節と同じ議論により

$$\nu = \delta(w - w_1, z - z_1)$$

となることが言え、これで本稿の目標である Tartar 方程式の解が得られたことになる。

命題 9

$\tau > 0$ $(1 < \gamma < 3)$ に対して、$\mathrm{supp}\,\nu \not\subset \{w = z\}$ でなければ、Tartar 方程式の解は、δ 関数となる。

補足を一つ述べる。$\tau \geq 1$, すなわち $1 < \gamma \leq 5/3$ に対しては、Ding-Chen-Luo [7], Lions-Perthame-Souganidis [9] のどちらも Tartar 方程式を解いているが、その Young 測度の元となる (1) の近似解については、[7] では Lax-Friedrichs 型差分近似 (以下 LF-差分) を用い、[9] では動力学近似を用いている。そのいずれも補償コンパクト性理論により、それぞれの近似解に対するエントロピーの弱コンパクト性が示されて、その後の Tartar 方程式の議論に入っている。

一方 $0 < \tau < 1$ $(5/3 < \gamma < 3)$ に関しては [9] でしか扱われておらず、[9] では用いられていない LF-差分が $5/3 < \gamma < 3$ の場合に収束するかについては、そこでは直接は示されてはいない。LF-差分に関する [7] の方法では、$1 < \gamma \leq 2$、すなわち $1/2 \leq \tau < 1$ でないと LF-差分に対するエントロピーのコンパクト性が得られず、よってその方法では $2 < \gamma < 3$ $(0 < \tau < 1/2)$ に関してはLF-差分の収束性に本稿の結果を適用することができないことになる。

しかし最近知ったのだが、その部分については既に Wang,Li,Huang らの結果 [12] があり、彼らは $2 < \gamma \leq 3$ $(0 \leq \tau < 1/2)$ に対する LF-差分のエントロピーの弱コンパクト性を示している。よって、$2 < \gamma < 3$ の LF-差分からでも Tartar 方程式を得ることができ、[9]、または本稿の手法により、Young 測度が δ 関数になるので、結局 $1 < \gamma < 3$ に対して LF-差分が弱解に収束することが保証されることになる。

なお、Tartar 方程式の解法部分に関しては、LF-差分であるか動力学近似であるかは関係がないので、その手法は本稿の方法でも [9] の方法でもどちらでも構わない。つまり、LF-差分の収束性についても、本稿によって新しく何かが得られているわけではなく、あくまで [9] と [12] によって既に得られていることの別証明をしているに過ぎない。

また、$\gamma \geq 3$ に関しては、Lions-Perthame-Tadmor [8] によって、$\gamma = 1$ に関して

は [13] によって Tartar 方程式が解かれているが、それらの場合に LF-差分に関するコンパクト性が得られているのかは良くはわからないので、それぞれの場合に弱解の存在は示されていても、LF-差分が収束することまで示されているかどうかはわからない。

13 最後に

本稿では、$1 < \gamma < 3$ で τ が非整数の場合の (1) に対する Tartar 方程式の解法の、[7] 流の手法の改良案を示し、さらにそれが [7] の $1 < \gamma \leq 5/3$ よりも広い $1 < \gamma < 3$ の範囲に適用できることを示した。

ただ、本稿の長さを見てもわかる通り、当初期待していた彼らの証明の「改良」や「簡略化」になったとは言いがたく、まだ学習しやすいものになってはいない気がする。その主たる原因は、9, 10, 11 節の 主値積分を含む K_6, K_9, K_{10} の評価であり、それらの特異性が高いために分割や場合分けを細かく行っているところの複雑さである。

一方で、それらも最終的な極限はかなりシンプルなものになるので、例えば (7) 節のように最後の部分積分の手前の式を用いての評価が可能ならばその議論は易しくできるかもしれないが、今回そのようなものは残念ながら見つけられなかった。両方は無理でも例えば η_n の方だけでも最後の部分積分をしない形で考えてみるとか、またはさらに「非整数回の部分積分」を利用してみる、などにより改良できるかもしれないが、それは今後の課題である。

また、本稿の手法は Darboux エントロピーの形に強く依存しているため、別な形の P の式には適用することができない。例えば中性子星に対する P の式の Tartar 方程式はまだ解かれていないと思うが、別の形の P に関する Lu [14] の考察のように、DiPerna [6] の手法に戻っての議論を行えればよいが、そうでなければ、今のところは手立てがほとんどない。Darboux エントロピーに対応するようなエントロピーの Green 関数表示が得られたとしても、Darboux エントロピーの場合のような「τ 階微分」に相当することが行えるかどうかも疑問である。よって、等エントロピー流の $P = A\rho^\gamma$ に対して、「Darboux エントロピーの τ 階微分」には依存しないような Tartar 方程式の解法を見出すことができれば、P の他の形の場合に適用できるかもしれないので、今後も等エントロピー流に関する証明の改良、別証明などを継続して考えていく予定である。

参考文献

[1] 竹野茂治: 1 次元理想気体に対する補償コンパクト法; 新潟工科大リポジトリ (2010) http://id.nii.ac.jp/1714/00000900/

[2] 竹野茂治: compensated compactness と保存則方程式について; 京都大学数理解析研究所講究録 **No.1284** 78–104, 2002. http://id.nii.ac.jp/1714/00000898/

[3] 竹野茂治: 1 次元等エントロピー流に対する Tartar 方程式の解法の改良; 新潟工科大学研究紀要 **27** 17–34, 2022. http://doi.org/10.34447/00001001

[4] 竹野茂治: ある超幾何関数の評価について; 新潟工科大リポジトリ (2023) http://id.nii.ac.jp/1714/00000997/

[5] R.J.DiPerna: Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics; *Comm.Math.Phys.* **91**, 1–30, 1983.

[6] R.J.DiPerna: Convergence of approximate solutions to conservation laws; *Arch.Rational Mech.Anal.* **82**, 27-70, 1983.

[7] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, and Luo Peizhu: Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)–(III); *Acta Mathematica Scientia* **5**, 415–432, 1985, 433–472, 1985, **6**, 75–120, 1986.

[8] P.L.Lions, B.Perthame, and E.Tadmor: Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems; *Comm.Math.Phys.* **163**, 415–431, 1994.

[9] P.L.Lions, B.Perthame, and P.E.Souganidis: Existence and stability of entropy scheme for the hyperbolic system of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates; *Comm.Pure Appl.Math.* **49**, 599–638, 1996.

[10] Chen Guiqiang and P.G.LeFloch: Compressible Euler equations with general pressure law; *Arch.Rat.Mech.Anal* **153**, 221–259, 2000.

[11] T.Makino: Weak solutions to the compressible Euler equation with an asymptotic γ-law; *J.Math.Kyoto Univ.* **41**, 557–592, 2001.

[12] Wang Jinghua, Li Xuewu, and Huang Jinyang: Lax-Friedrichs difference approximations to isentropic equations of gas dynamics; *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences* (現在の誌名は *Journal of Systems Science and Complexity*) **1(2)**, 109-118, 1988.

[13] Huang Feimin and Wang Zhen: Convergence of viscosity solutions for isothermal gas dynamics; *SIAM J.Math.Anal.* **34(3)**, 595-610, 2002.

[14] Lu Yunguang: "*Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*"; Chapman & Hall/CRC, 2003.

[15] P.D.Serre: La compacité par compensation pour les systèmes hyperbolieques non linéaires de deux équations a une dimension d'espace; *J.Math.Pures Appl.* **75**, 423–468, 1986.