セルオートマトンによる交通流モデルの基本図について

平成 17 年 2 月 10 日

情報電子工学科
松村 智尋

目 次

1 はじめに **1**

2 流体モデル **1**
2.1 基本量 1
2.2 3 つの変数の関係 2
2.3 速度と密度の関係 4
2.4 交通量と密度の関係 5

3 流体モデルのシミュレーション **5**
3.1 停止距離モデル 5
3.2 Lax–Friedrichs の差分法 8

4 セルオートマトン **9**
4.1 ルール 184 のシミュレーション 9
4.2 島状境界条件 9
4.3 周期境界条件 10
4.4 開放境界条件 12
4.5 事故渋滞 12
4.6 スロースタートモデル 14

5 セルオートマトンモデルと流体モデルの比較 **16**
5.1 宮入氏の研究 16
5.2 スロースタートモデルの改良とシミュレーション結果 18

6 まとめ **22**

参考文献 **24**

概要

交通流解析にはセルオートマトンモデル、流体モデルなどがある。セルオートマトンモデルは道路をセルに分割し、各セルに存在する車の挙動を調べることで実際の交通をモデル化したもので、流体モデルは交通の流れを連続した液体のように考えて表現したモデルである。この 2 つはデータの型が異なり、直接比較するのは難しい。2002 年度卒研生の宮入氏 [3] はこの両者の比較をルール 184 セルオートマトンモデルに対して行なっている。しかし、ルール 184 モデルの基本図は単純すぎて多様性に乏しい。よって本研究では、セルオートマトンモデルの一つであるスロースタートモデルの速度と停止時間を変化させることで多様な基本図を作成することを目的とする。

1　はじめに

交通流の解析は主にセルオートマトンを用いた解析と、連続方程式や運動方程式に基づいた流体モデルを用いた解析がある。セルオートマトンのデータは離散数値で、流体モデルのデータは実数の値で直接比較するのは難しい。2002 年度卒研生の宮入氏 [3] はこの両者の比較をルール 184 セルオートマトンモデルに対して行なっている。

そこで、セルオートマトンモデルに様々な機能を付加することでその特性を変化させ、流体モデルとの対応をとることを本研究の目的とする。

第 2 章では流体モデルの 3 つの基本量である速度、密度、交通量の関係について述べ、第 3 章では流体モデルである停止距離モデルの説明と、これに使われる Lax–Friedrichs の差分法について説明する。第 4 章ではセルオートマトンモデルの紹介とセルオートマトンモデルの境界条件について説明する。第 5 章では速度と停止時間を付加したスロースタートモデルによって得られたデータから、セルオートマトンモデルの特性を示す基本図を作成し、密度と速度によってセルオートマトンモデルの交通量が変化することを示す。

2　流体モデル

流体モデルとは、交通の流れを連続した液体のように考えて表現したモデルの 1 つで、連続方程式や運動方程式に基づいて解析する。流体モデルは 1956 年に P.I.Richards によって考え出されたものであり、現在では渋滞時の交通流の挙動の解析などに利用されている。

2.1　基本量

交通流解析を行なう上で必要な基本量は、速度 (速度場)、交通量、密度の 3 つで、これらは互いに関係し合っている。

速度 (速度場)　高速道路を走っている車の流れを考える。時刻 t での車の位置を $x_0(t)$ とすれば、速度は $dx_0(t)/dt$ であり、加速度は $d^2x_0(t)/dt^2$ である。多数の車が走っている場合、各車の位置をそれぞれ $x_i(t)(i = 1, 2, 3, ...)$ とする。

速度を測る方法は 2 つあり、各車の速度 $v_i = dx_i(t)/dt$ を測るものと、空間の各点各時刻に対して速度場と呼ばれるただ 1 つの速度 $v(x, t)$ を求めるものである。各車の速度をそれぞれ求める方法は、車の数が多い場合には困難なので、今回は速度場を用いる。

速度場は、位置 x にいる観測者によって時刻 t で測定された速度である。例えば、位置 x_1 において時刻 t_1 で測定された速度は $v(x_1, t_1)$ として表され、同様に位置 x_1 において時刻 t_2 で測定された速度は $v(x_1, t_2)$ で表される。このように位置 x、時刻 t で測定された速度はその位置 x に存在する車の速度を示す。よって、$v(x_i(t_j), t_j) = v_i(t_j)$ が成り立つ。速度場 $v(x, t)$ は各 x, t において 1 つだけ速度が存在することを意味する。従って、このモデルでは追い越しを考えない。

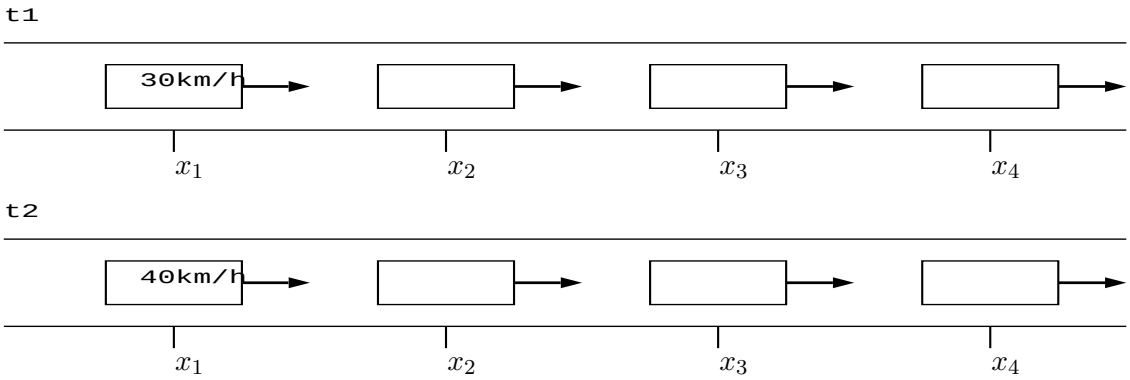


Fig. 1 車の位置

交通量と密度 高速道路上のある位置に留まっている観測者は、そこをある時間に通過する車の数を測定することが出来る。この量を交通量といい、q で表す。この交通量は場所、時間に依存するため、$q(x,t)$ で表せる。

固定された時間にある区間内に存在する車の数を測定する。区間に入り切らなかったり飛び出したりした場合は、ある決まった方法で処理する。この測定で、ある道路上の区間に存在する車の数が分かる。単位長さあたりの車の台数を密度といい、ρ で表す。車の長さを L、車間距離を d とすると車の密度は、

$$\rho = \frac{1}{L+d} \tag{1}$$

である。

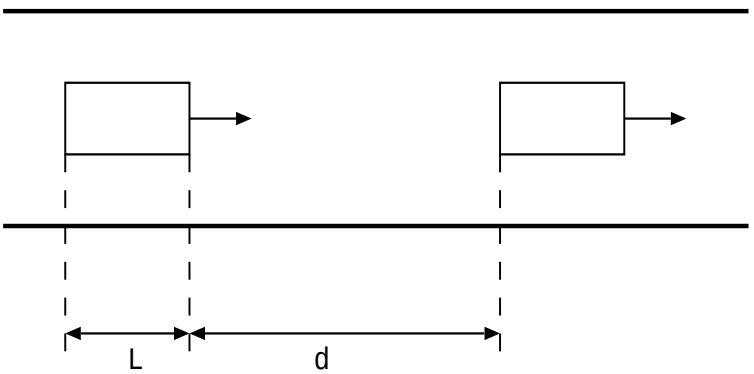


Fig. 2 車の密度

2.2 3 つの変数の関係

速度、密度、交通量には密接な関係がある。ある道路で全ての車が定速度 v_0、定密度 ρ_0 で走行している場合、車間距離は一定で、密度は変化しない。τ 時間で各車は $v_0\tau$ だけ

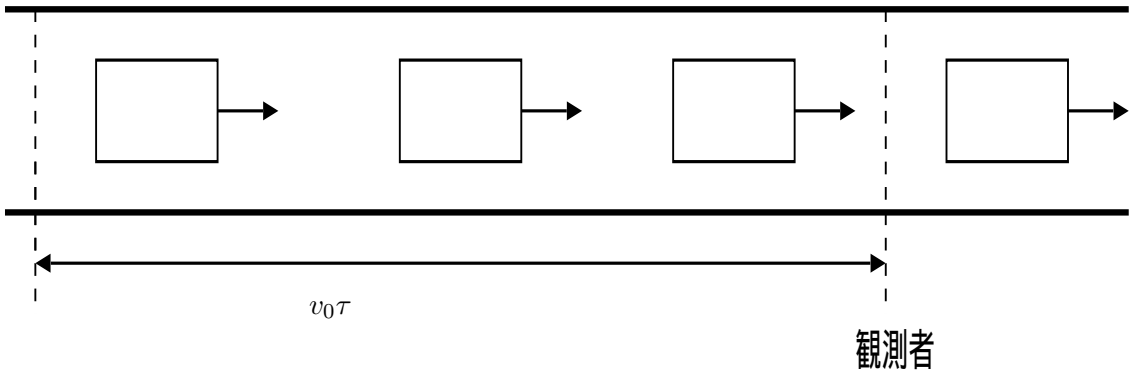


Fig. 3 定速 v_0 で走行する車が τ 時間に進む距離

動くので τ 時間内に観測者の前を通過する車の数は、距離 $v_0\tau$ 内の車の数に等しい。各車は一定速度で動いているので、移動距離は (速度)×(時間) となり、τ 時間内に観測者の前を通過する車の数は $\rho_0 v_0 \tau$ となる。よって、単位時間当たりの交通量 q は

$$q = \rho_0 v_0 \tag{2}$$

となる。これは基本法則 (交通量)=(密度)×(速度) を意味する。3 つの基本変数は x と t に依存して、$q(x,t), \rho(x,t), v(x,t)$ となるので、

$$q(x,t) = \rho(x,t)v(x,t) \tag{3}$$

と表すこともできる。

道路の位置 $x = a, x = b$ の間の自動車の数を N とすると、区間内で自動車の発生 (車線の合流)、消滅 (車線の分岐) がなければ車の数は a と b を横切る車の数のみで決まる。単位区間に存在する車の数は $\rho(x,t)$ なので、

$$N = \int_a^b \rho(x,t)dx \tag{4}$$

となる。$[a,b]$ を横切る車の数 (=交通量 q) が一定ならば N は簡単に求められるが、実際には交通量は時間と共に変化する。

ある時間 t に $[a,b]$ に存在する車の数は $[a,b]$ に入って来た車の数から出て行った車の数を引いたものに等しい。よって時間に対する N の変化は

$$\frac{dN}{dt} = q(a,t) - q(b,t) \tag{5}$$

となる。この式に式 (4) を代入すると

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = q(a,t) - q(b,t) \tag{6}$$

となる。この式を積分保存則と呼ぶ。

式 (4) は、ある時間 (一定) のとき区間 $[a, b]$ を変化させて $[a, b]$ に存在する車の数の変化を表す式で、式 (6) はある区間 $[a, b]$(一定) に存在する車の数の時間に対する変化を表すものである。

b は道路上の任意の位置を表すものとして $b \to x$ と置き換え、$N = N(x, t) = [a, x]$ 上の車の台数とすると、式 (5) は

$$\frac{\partial}{\partial t}N(x,t) = q(a,t) - q(x,t)$$

となる。これを両辺で、偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}N(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}N(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t)$$

式 (4) より

$$N(x,t) = \int_x^a \rho(\overline{x},t)d\overline{x}$$

なので、

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,t) = \rho(x,t)$$

となり、よって

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t)$$

ここに式 (3) を代入して

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{7}$$

という保存則方程式が得られる。

2.3 速度と密度の関係

速度と密度は式 (9) で関係付けられている。 Lighthill と Whitham が提唱したモデルは速度が密度のみに依存するというもので、

$$v = v(\rho) \tag{8}$$

と定義される。式 (10) を式 (9) に代入すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v(\rho)) = 0 \tag{9}$$

となる。もし、道路上に他の車両がいなければ、その車両は最高速度 $v = v_{max}$ で走行できる。しかし、密度が増加するに従い速度を落とさざるを得なくなる。つまり、密度が増すにつれ車の速度が減り続け、最高密度 ρ_{max} で停止する。こうして、

$$\frac{dv}{d\rho} \equiv v(\rho) \leq 0 \tag{10}$$

となる。

2.4　交通量と密度の関係

交通量は $q = \rho v(\rho)$ となり、

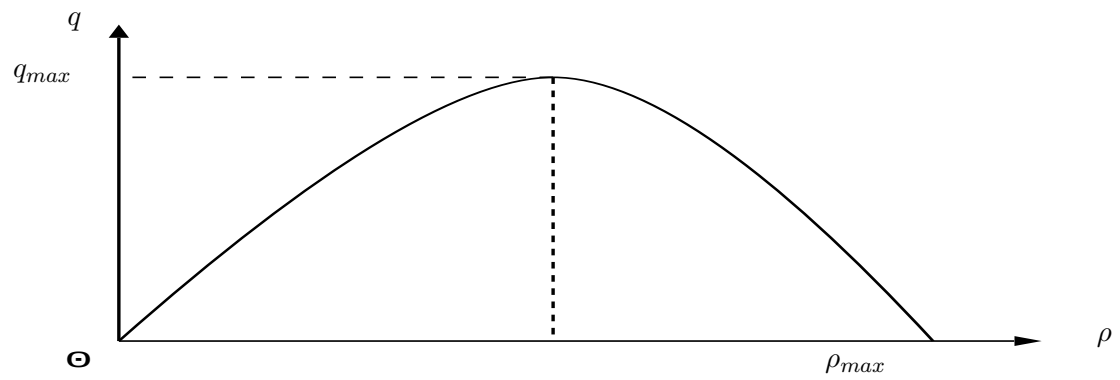


Fig. 4　車の密度

交通量もまた密度に依存しているので、次の場合、0 になる性質を持つ。

- 交通がない場合 $(\rho = 0)$
- 交通が動かない場合 $(v = 0$ であり $\rho = \rho_{max})$

交通量と密度の関係は、道路交通の基本図と呼ばれる (2.4)。これによれば、交通量の最大値 q_{max} はある密度で起こる。最大交通量 q_{max} を交通容量と呼ぶ。

3　流体モデルのシミュレーション

3.1　停止距離モデル

保存則方程式 (7) を解くためには速度の式が必要であり、速度は密度に依存する。密度の式は

$$\rho = \frac{1}{L + d} \tag{11}$$

で、L (自動車の車長) を定数とすれば車間距離 d の式となる。実際の交通でも、車間距離はブレーキを踏んで自動車が止まるまでの距離 (停止距離) だけは最低でも離すように指導されるので、このモデルでも停止距離だけ離れているとする。

停止距離は以下の空走距離と制動距離を足したものである。

- 空走距離：運転者が危険に気付いてから、実際にブレーキを踏んでそれが効くまでに車が走る距離
- 制動距離：ブレーキが効き始めてから車が止まるまでに走る距離

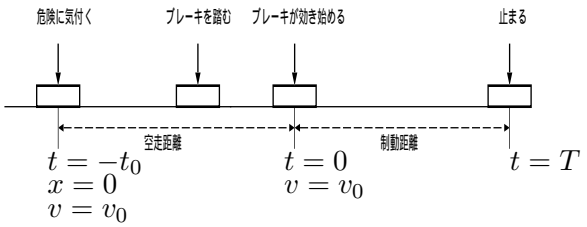


Fig. 5 停止距離

空走距離を d_k とし制動距離を d_s とすれば、$d_k = v_0 t_0$ であり、停止距離$=v_0 t_0 + d_s$ となる。今、フルブレーキで止まることとする。タイヤはロックされ地面と摩擦を起こし、摩擦によって生じる負の加速度によって、自動車は等加速度直線運動を起こして止まるものとして制動距離を求める。

等加速度直線運動の式

$$v = v_0 + at \tag{12}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{13}$$

から t を消去すると、

$$2ax = v^2 - v_0^2 \tag{14}$$

となる。これは初速 v_0 の物体がある速度 v まで変化する様子を表した式である。a を加速度とし、初速 $v = 0$ とすれば制動距離 d_s は

$$x = d_s = \frac{-v_0^2}{2a} \tag{15}$$

と求まる。ロックしたタイヤにかかる動摩擦力は、車の進行方向を正方向としたとき $F = -\mu N$(μ は動摩擦係数、N は垂直抗力) となる。運動方程式より

$$ma = -\mu N = -\mu mg$$

となり、よって

$$a = -\mu g \tag{16}$$

となる。これを式 (15) に代入すれば

$$d_s = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g} \tag{17}$$

となるので停止距離 d は

$$d = v_0 t_0 + \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

となる。初速度 v_0 を v とすれば

$$d = vt_0 + \frac{v^2}{2\mu g} \tag{18}$$

となる。これに式 (11) を代入すると

$$\frac{1}{\rho} - L = vt_0 + \frac{v^2}{2\mu g}$$

となり、これを整理して

$$\frac{1}{2\mu g}v^2 + vt_0 - (\frac{1}{\rho} - L) = 0$$

これを v について解の公式で解くと、

$$v(\rho) = -\mu g t_0 + \sqrt{(\mu g t_0)^2 + 2\mu g(\frac{1}{\rho} - L)} \tag{19}$$

が得られる。

坂道の場合は、[3] にあるように、式 (19) の μ を $\mu cos\theta + sin\theta$ で置き換えればよい。θ は地面からの坂道の角度を表し、上り坂のときは正、下り坂のときは負の値とする。よって、

$$v = \sqrt{g^2 t_0^2(\mu\cos\theta + \sin\theta)^2 + 2g(\mu\cos\theta + \sin\theta)(1/\rho - L)} \\ -gt_0(\mu\cos\theta + \sin\theta) \tag{20}$$

この式 (20) の内、変数となっているのは θ と ρ のみなので、$v(\rho, \theta)$ と表せる。ただし、θ は実際には x によって変化するので、v は ρ, x の関数で、$q = q(\rho, x)$ とみることもできる。すると保存則方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho v(\rho, \theta) = 0 \tag{21}$$

$q = \rho v$ より q は ρ と x の関数となり、$q(\rho, \theta)$ と書ける。

3.2 Lax–Friedrichs の差分法

差分法とは微分の定義式

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

で Δx を小さくとって近似した式

$$\frac{df}{dx}(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

のことを前進差分とよぶ。差分法とは微分方程式をこのような形に差分化し、その解を求める方法をいう。ここでは保存則方程式でよく用いられる Lax–Friedrichs の差分法を取り上げる。

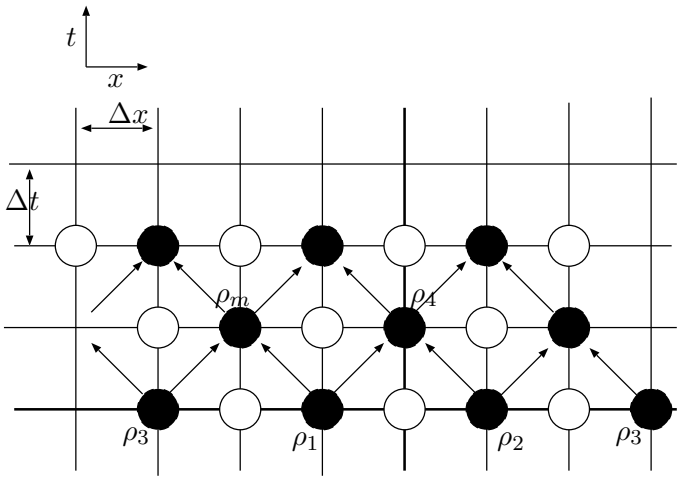


Fig. 6 Lax–Friedrichs の差分法

横軸を位置 x、縦軸を時間 t とし、格子の間隔をそれぞれ $\Delta x, \Delta t$ とする。Lax–Friedrichs の差分法は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

を

$$\frac{\rho(t + \Delta t, x) - \frac{\rho(t, x+\Delta x) + \rho(t, x-\Delta x)}{2}}{\Delta t} + \frac{q(t, x + \Delta x) - q(t, x - \Delta x}{2\Delta x} = 0$$

と差分化する方法である。これに $q = q(\rho, x)$ を代入し、$\rho(t + \Delta t, x)$ について解くと、

$$\rho(x, t + \Delta t) = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}(q(\rho(x + \Delta x, t), x + \Delta x)$$
$$-q(\rho(x - \Delta x, t), x - \Delta x)) + \frac{\rho(x + \Delta x, t) + \rho(x - \Delta x, t)}{2} \tag{22}$$

となる。Lax–Friedrichs の差分法は 2 点間から点を求める過去の卒論にあるように [1), 3)] 境界部分の点を求めようとすると、1 点しか境界内に存在しないために求められない。そこで、左側の境界と右側の境界が接合されていると考えて対応する。

x 軸の境界を ρ_1 のある $(x - \Delta x)$ までとすると、ρ_m は領域外の ρ から求めることになる。そこで、領域の左端と右端がつながっているとして ρ_1 と ρ_3 から ρ_m を求める。

また、Lax–Friedrichs の差分法は安定な解を求めるために CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 条件

$$|q_\rho(\rho, x)|\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq 1 \tag{23}$$

を満たす必要がある。

4　セルオートマトン

セルオートマトンは道路を 1 つ 1 つのセルに分割し、各セルに車がいるかどうかを定め、その後の車の挙動を調べることで、実際の交通をモデル化する。

セルオートマトンは、時間の進行 (アップデート) に対する各車の挙動を設定することでいくつものモデルを構成できる。

4.1　ルール 184 のシミュレーション

ルール 184 の時間発展ルールは、

- 1 つのセルに存在できる車は最大でも 1 台
- 進行方向は x 軸の正方向で、1 ステップにつき最大 1 セル移動できる
- 1 つ前のセルに車がいるとき、次のステップでは前進できない
- 1 つ前のセルに車がいなければ、次のステップで前進出来る

である。これを島状境界条件、周期境界条件、開放境界条件に対して適用する。セル数 x、ステップ数 t ともに 100 とする。右方向を x 軸の正方向とし、車は右端の x_0 から左端の x_{99} へ進む。下方向を t 軸の正方向とし、下向きに時間が進むとする。黒い点が車が存在するセル、白い点が車がいないセルである。

4.2　島状境界条件

島状境界条件はセル空間に入って来る車は存在せず、出ていく車にも特別な処理をしない境界条件である。

初期密度 ($\rho =$ 車両の数/セル数) を 20 と 80 としたシミュレーション結果を図 7 と図 8 に示す。左が初期密度を手で入力したもの、右が初期密度を乱数によって自動的に配置

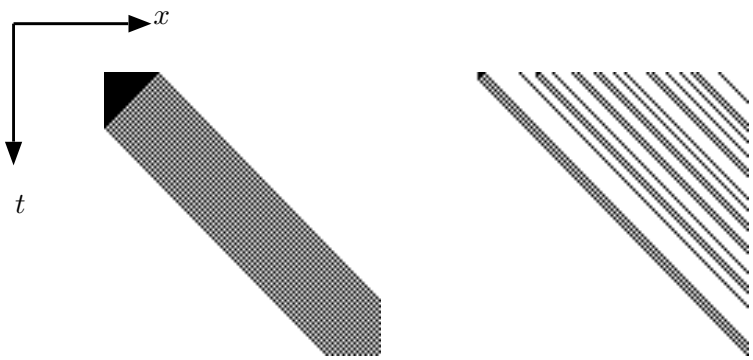


Fig. 7 密度=20 の島状境界条件を用いたシミュレーション

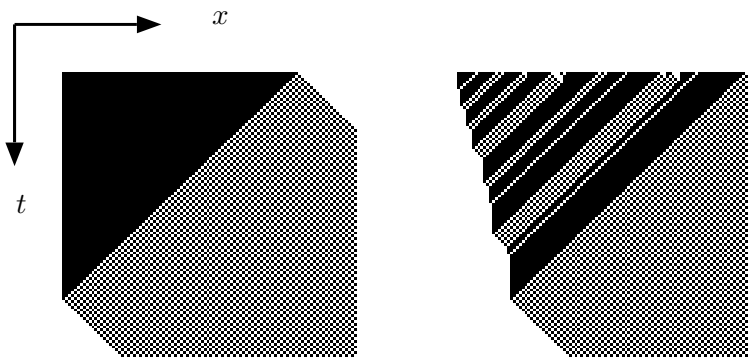


Fig. 8 密度=80 の島状境界条件を用いたシミュレーション

させたものである。 手入力では x_0 から連続して車を配置し、意図的に渋滞を作った。どれも、左から右へ順に空いて行くだけなのでこの境界条件はシュミレーションには向かない。

4.3 周期境界条件

周期境界条件はセル空間の右端と左端が接続されているとする境界条件で、サーキットを周回しているように見える。初期密度 0.2 から 0.9 で 0.1 刻みのシミュレーション結果を図 9 に示す。初期配置はすべてランダム配置である。

0.2 から 0.4 では斜線は右に傾いており、車が順調に流れているのが分かる。この段階では、渋滞 (車が 2 台以上続いている状態) ができても、時間が進むにつれて解消される。0.5 から空白 (2 セル以上車が存在しない状態) が無くなり、0.6 からは渋滞を示す黒い太線ができる。渋滞が解消する前に後続車が来るので、渋滞は解消せず後方に伝播する。密度が高くなるにつれて安定して渋滞する場所が増えて来る。安定した渋滞が発生するのは密度 0.51 以上からと推測できる。これを確かめるために密度 0.48,0,49,0.50,0.51,0.52 でシミュレーションを行ったのが図 10 である。0.5 までは安定した渋滞は現れず、0.51 か

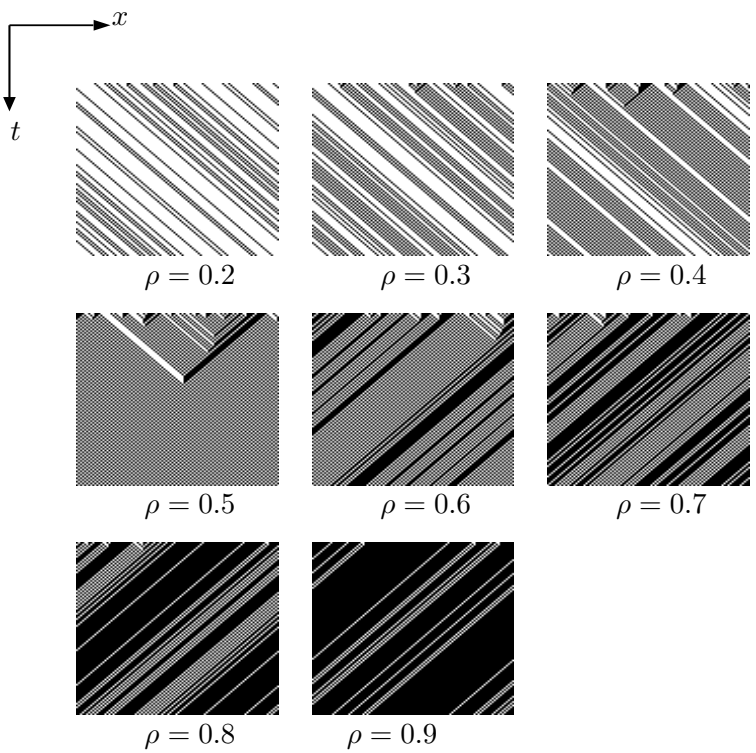


Fig. 9 周期境界条件を用いたシミュレーション 1

ら安定した渋滞が現れることが分かる。

よって、

$\rho < 0.5$ では必ず空白が存在し、例え渋滞が発生しても空白とぶつかって解消する。(自由流)

$\rho > 0.5$ では必ず渋滞が存在し、例え空白があっても渋滞とぶつかって無くなる。(混雑流)

$\rho = 0.5$ では渋滞も空白も存在せず、1 つおきに車が存在する。

このルール 184 モデルでの交通量 q を ρ の式で表してみる。セルオートマトンでは瞬間の交通量は 0 か 1 にしかならないので、100 マスのセル空間の平均交通量を求める。セル空間に存在する車の数を M とすると、$\rho < 0.5$ で安定したときの 1 ステップに動く車の数は M に等しい。これは交通量 1 のセルが M 個あるということなので、平均交通量 $\overline{q}$ は

$$\overline{q} = \frac{1 \times M}{100} = \rho \tag{24}$$

となる。

$\rho \leq 0.5$ では車の存在しないセル数は $100 - M$ 個で、交通が安定すれば 2 つ以上連続しない。このとき動く車の数は $100 - M$ 台となる。よって平均交通量 $\overline{q}$ は、

$$\overline{q} = \frac{100 - M}{100} = 1 - \rho \tag{25}$$

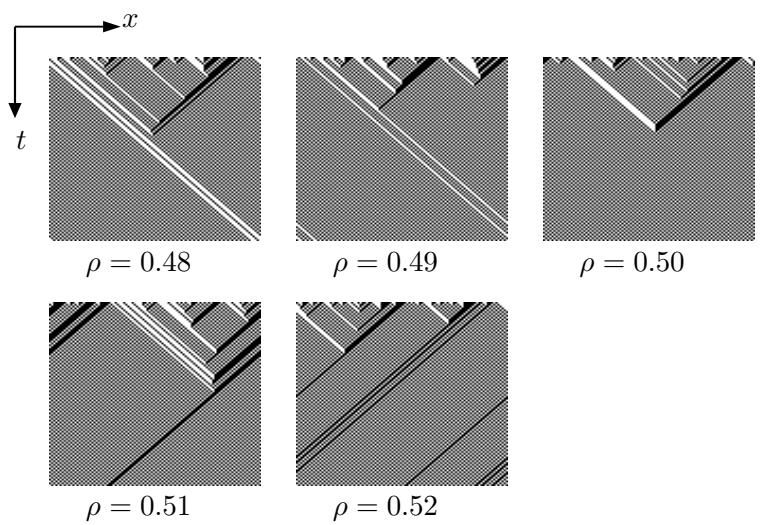


Fig. 10 周期境界条件を用いたシミュレーション 2

となる。

ルール 184 モデルでは、臨界密度 ($\rho = 0.5$) で自由流から混雑流へ変化する。これを相転移と呼ぶ。また、混雑流で渋滞と空白に分かれることを相分離と呼ぶ。

4.4 開放境界条件

開放境界条件はセル空間に車が入って来る確率 P_{in} と出て行く確率 P_{out} を設定した境界条件である。

初期密度 0.2,0.8 、$P_{in} = 0.2, 0.5, 0.8$ でのシミュレーション結果が図 11 である。セル空間の車の増加を最小限に抑えるため $P_{out} = 1 - P_{in}$ とした。

この境界条件は P_{in} と P_{out} のとりかたで大きく結果が異なるのが特徴である。同じ $\rho = 0.2$ でも、$P_{in} = 0.2, P_{out} = 0.8$ では車は入り難く出易いため、島状境界条件に近い結果になった。逆に、$P_{in} = 0.8, P_{out} = 0.2$ では入り易く出難いので早いステップから右端に渋滞ができている。同様に、$\rho = 0.8$ でも $P_{in} = 0.2, P_{out} = 0.8$ では左端に空白ができている。

また、この境界条件では ρ の値が初期値とずれる特徴もある。$P_{in} = 0.2, P_{out} = 0.8$ では初期値よりも小さく、$P_{in} = 0.8, P_{out} = 0.2$ では初期値よりも大きくなる。

4.5 事故渋滞

渋滞の原因には、道路幅が狭かったり夜間であったり上り坂であったりすることで速度が下がり、自然に発生してしまう自然渋滞と、信号や踏切、事故などで特定の場所のみ通過しにくくなって起こる渋滞がある。

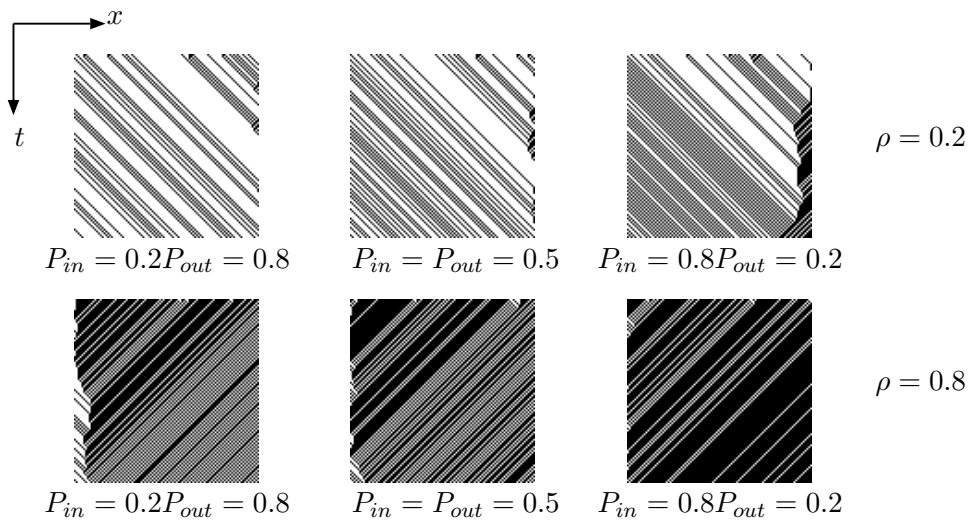


Fig. 11 開放境界条件を用いたシミュレーション

図 12 は事故渋滞のシミュレーションである。境界条件は周期境界条件を用いた。x_{49} と x_{50} の間で事故が起こったものとし、x_{49} に到達した車は 30% の確率で x_{50} に進むことができるものとする。初期密度は 0.2,0.4,0.5,0.7 とする。$\rho = 0.2$ では事故現場で多少渋滞

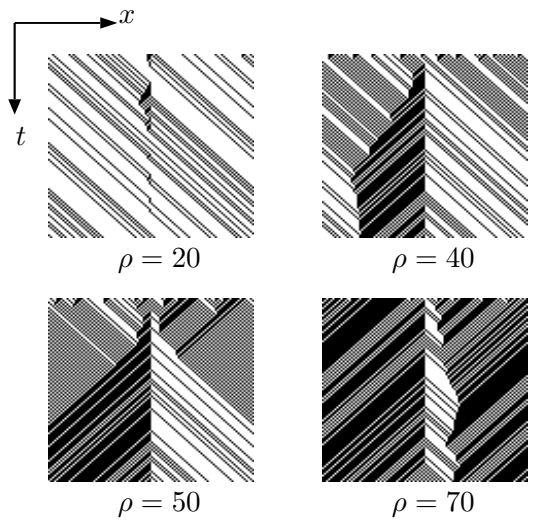


Fig. 12 周期境界条件を用いた事故シミュレーション

しても、すぐに解消している。$\rho = 40$ と $\rho = 50$ では事故現場を中心に渋滞と空白が顕著にみられる。$\rho = 70$ では事故現場での渋滞が右端まで続いている。(サーキットを 1 周した状態) $\rho = 70$ ではもともと渋滞しているので、渋滞の影響としては中密度のときが最も影響を受ける。

4.6 スロースタートモデル

スロースタートモデルはルール 184 に、一度止まった車は動きにくいという慣性の法則を組み込んだものである。

一度停止した車は前のセルが空いて動ける状態になっても、1 ステップ待ってから動くというルール以外の振舞いはルール 184 と同様である。

図 13 は密度 0.2 のスロースタートモデルとルール 184 である。左がルール 184 で、右がスロースタートモデルである。20 台の車を連続して配置した所、スロースタートモデルはルール 184 に比べて明らかに渋滞の影響が長引いているのが分る。

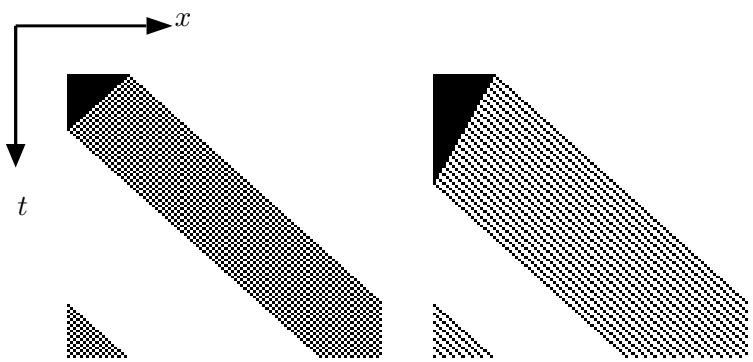


Fig. 13 密度 0.2 のルール 184 とスロースタートモデル

このスロースタートモデルで、車の初期配置をランダムにした場合のシミュレーション結果を図 14 に示す。左から密度 0.2,0.3,0.4,0.5 である。2002 年度の宮入氏の卒論では、ス

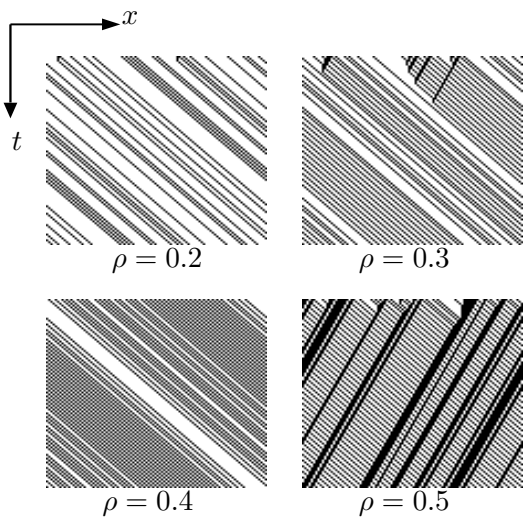


Fig. 14 密度 0.2 から 0.5 のスロースタートモデル

ロースタートモデルの臨界密度 ρ_c は $\rho_c = 1/3$ となっているが、実際にシミュレーション

を行なったところ図 15 のように密度 0.34 でも渋滞が起きていない場合があった。スロー

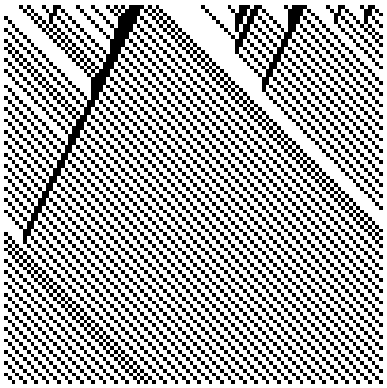


Fig. 15 密度 0.34 のスロースタートモデル

スタートモデルは一回停止のルールによって臨界密度が低下するが、初期配置で 2 台以上連続で車が配置されなければ、一回停止のルールは適用されない。よってこの状態ならば、密度が 0.5 まで渋滞が発生しない状態が起こり得る。逆に、初期配置で 2 台以上連続に配置されたなら、密度が 0.5 未満でも安定した渋滞が発生し得る。よって、スロースタートモデルの臨界密度は最大でも 0.5 で、実際にどのような値となるかは車の初期配置によって決まると思われる。

このスロースタートモデルの基本図は図 16 のようになる。$\frac{1}{3} \leq \rho \leq \frac{1}{2}$ の範囲では q が 2 価関数となっているが、この部分をメタ安定分岐と呼び、このような不安定性は交通流のもつ本質的な性質であり、自然渋滞を起こす原因と考えられている。[4)]

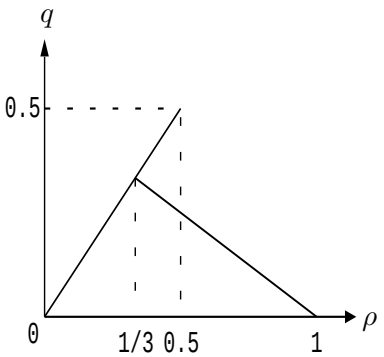


Fig. 16 スロースタートモデルの基本図

5　セルオートマトンモデルと流体モデルの比較

5.1　宮入氏の研究

流体モデルとセルオートマトンモデルはともに交通流の解析に用いられる。流体モデルは存在する車全体を連続した流体のように考え、連続方程式や流体方程式に基づいて解析するマクロなものであり、セルオートマトンモデルは定められたルールに従って、車一台ごとの挙動を調べるミクロなものである。流体モデルで得られる値は実数値で、セルオートマトンモデルで得られる値は 0、1 などの離散数値であるため、直接比較することは難しい。

2002 年度に宮入氏 [3] はルール 184 モデルの基本図を流体モデルの交通量 q として与えることにより、両モデルの比較を行なった。このシミュレーション例が図 17 であるが、この方法では流体モデルでの計算結果が 0.5 で収束しているように見える。

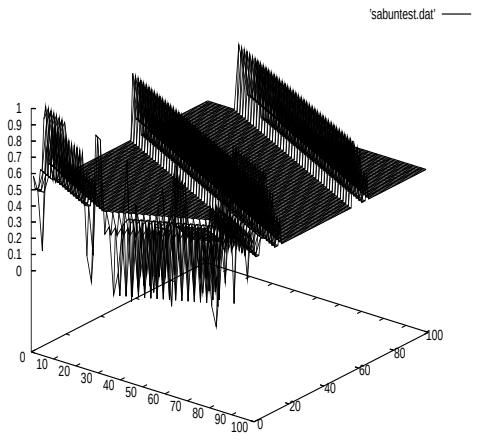


Fig. 17　流体モデルシミュレーション

宮入氏が用いたプログラムは、

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0$$

の $q(\rho)$ をルール 184 の基本図である図 18 から求め、Lax–Friedrichs の差分法によって計算するものである。$q(\rho)$ は図 18 より、

$$q(\rho) = \begin{cases} q_{max}\frac{\rho}{\rho_a} & 0 \le \rho \le \rho_a \\ q_{max}\frac{\rho_{max}-\rho}{\rho_{max}-\rho_a} & \rho_a \le \rho \le \rho_{max} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{26}$$

である。このとき式 (23) の Lax–Friedrichs 法の CFL 条件より

$$|\frac{\Delta t}{\Delta x}q'(\rho)| \le 1$$

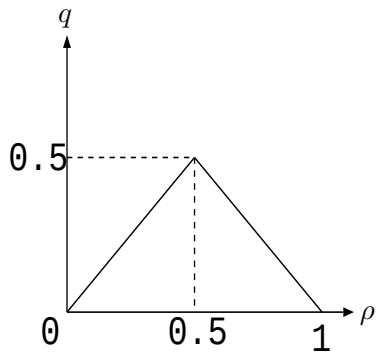


Fig. 18 宮入氏の流体モデルの基本図

である必要がある。$q'(\rho)$ は図 18 より

$$q'(\rho) = \begin{cases} \frac{q_{max}}{\rho_a} & \rho \leq \rho_a \\ \frac{-q_{max}}{\rho_{max}-\rho_a} & \rho \geq \rho_a \end{cases} \tag{27}$$

である。このプログラムでは $\rho_a = \frac{1}{2}\rho_{max}$ であり、このときの CFL 条件は

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{q_{max}}{\rho_a} \leq 1$$

であるので、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\rho_a}{q_{max}}$$

とすればよい。

実際に宮入氏が用いたプログラムでは

$$\rho(x-\Delta x, t) > 0.5 > \rho(x+\Delta x, t)$$

$$\rho(x-\Delta x, t) < 0.5 < \rho(x+\Delta x, t)$$

$$\rho(x-\Delta x, t) = \rho(x+\Delta x, t) = 0.5$$

のとき密度 ρ の値は 0.5 に収束することが容易に示される。しかし、これは $\rho_a = \frac{1}{2}\rho_{max} = 0.5$ のときに安定するように CFL 条件を求めており、ρ_a を 0.5 以外にすると CFL 条件が崩れ安定した解が得られない。

臨界密度を 0.4 に変えて行なったシミュレーション結果を図 19 に 0.3 に変えてシミュレーション結果を図 20 に示す。

宮入氏は流体モデルに、式 (26) や式 (27) のようにセルオートマトンモデルの基本図から求めた値を与えてシミュレーションを行なっている。しかし、セルオートマトンモデルの基本図は理論的に求めるのが難しい。そこで本研究ではでは両者を比較するために、セルオートマトンモデルに速度と停止時間を付加することで基本図に様々なバリエーションを持たせ、流体モデルとセルオートマトンモデルの対応をとり、比較しやすくする。

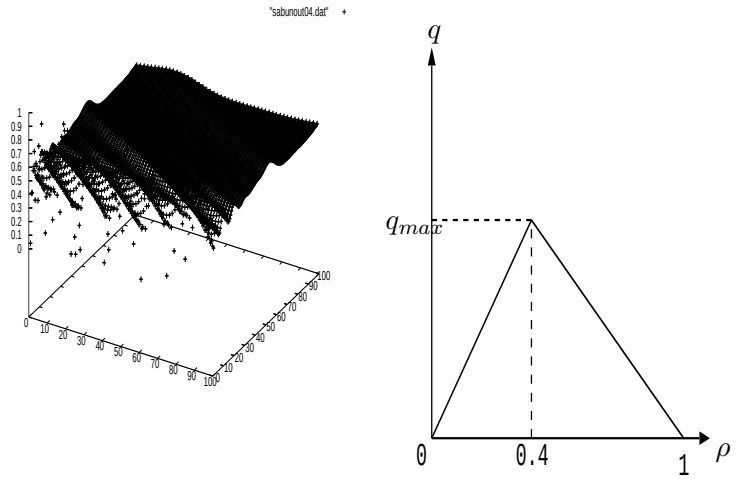


Fig. 19 臨界密度 0.4 での流体モデルシミュレーション

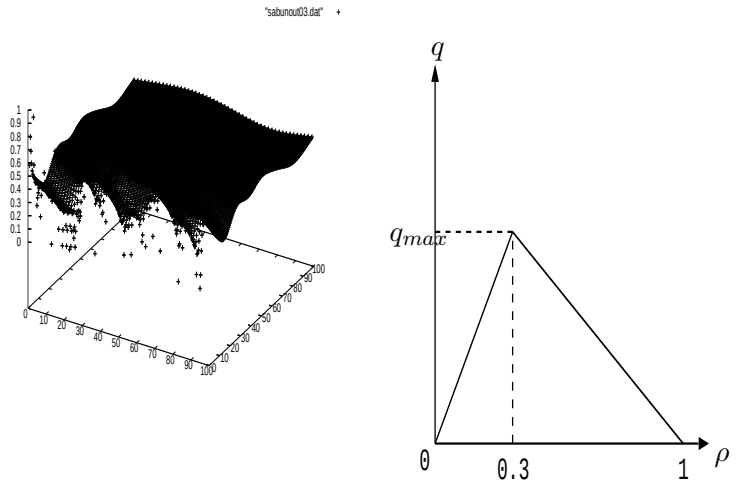


Fig. 20 臨界密度 0.3 での流体モデルシミュレーション

5.2 スロースタートモデルの改良とシミュレーション結果

速度と停止時間を付加するモデルはスロースタートモデルを用いた。これは、

- ルール 184 は単純すぎて実際の交通を十分再現しているとは言えない
- NS モデルはランダムブレーキの影響で基本図を作りにくい
- スロースタートモデルはオーバーシュートなど、実際の交通を良く再現しているといわれている

といった理由からである。付加する機能は、

速度 車は 1 ステップに V_{max} の速度で動く

停止時間 一度止まった車は、前のセルが空いて走行可能になっても STOPNUM ステップ待ってから動く

である。改良スロースタートモデルによるシミュレーション結果を図 21 に示す。ここで $V_{max} = 3$、STOPNUM =3 とした。図 14 や図 15 と比べて明らかに渋滞の影響が大きく、

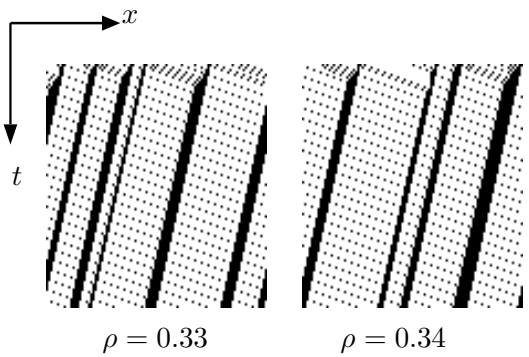


Fig. 21 改良スロースタートモデルシミュレーション

幅の長い渋滞ができている。

V_{max} と STOPNUM がどの程度渋滞に影響を与えているかを考察する (図 22)。A 台

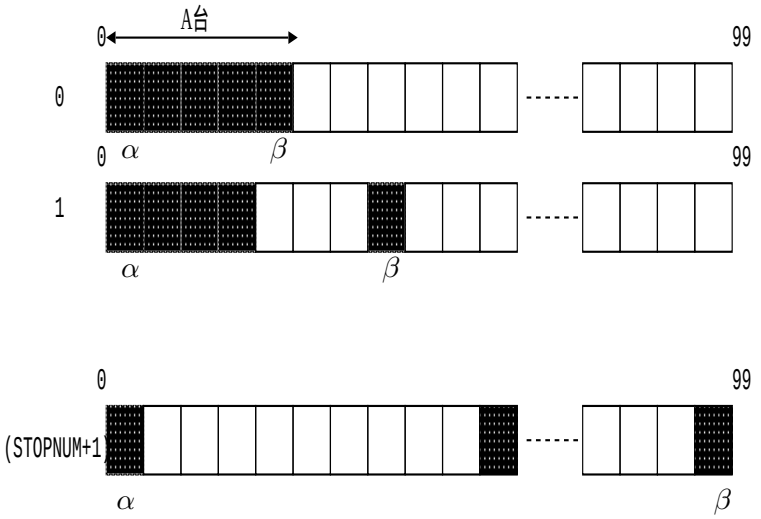


Fig. 22 改良スロースタートモデル

の車が初期配置で渋滞しているとすると、次のステップで先頭 β が渋滞を抜けて残りの

(A-1) 台がその場に留まる。渋滞の先頭の車は (STOPNUM+1) ステップごとに渋滞を抜け出し、最左の α が渋滞を抜けるのは (A-1)(STOPNUM+1) ステップ後である。その間に渋滞を抜け出した先頭の一台が渋滞の左隣に来れば渋滞は維持される。よって、β の速度は、

$$V_{max} = \frac{100 - A}{(A-1)(STOPNUM+1)}$$

これを展開し、A について整理すると、

$$A = \frac{100 + V_{max}(STOPNUM+1)}{V_{max}(STOPNUM+1)+1} \tag{28}$$

となる。

A 台の前後で実際に自由流と渋滞が入れ替わるか確かめる。式 (28) に V_{max} と STOPNUM を代入すると、

$V_{max} = 3, STOPNUM = 2$ のとき

$$A = \frac{100 + 3(2+1)}{3(2+1)+1} = 10.9$$

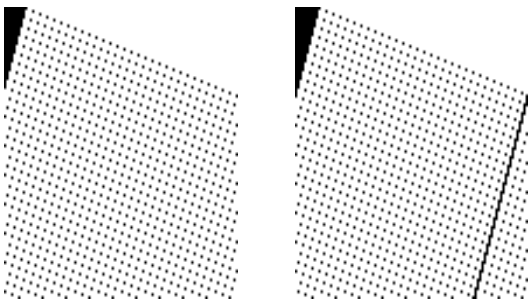
$V_{max} = 3, STOPNUM = 3$ のとき

$$A = \frac{100 + 3(3+1)}{3(3+1)+1} = 8.6$$

$V_{max} = 4, STOPNUM = 3$ のとき

$$A = \frac{100 + 4(3+1)}{4(3+1)+1} = 6.8$$

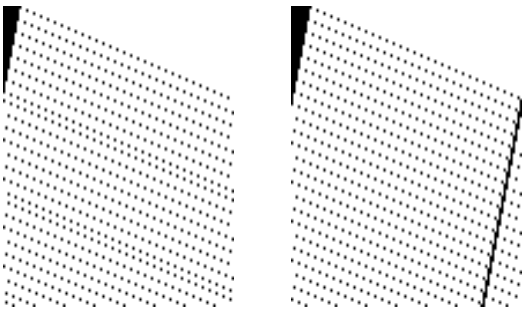
となる。各々の実際のシミュレーション結果を図 23、図 24、図 25 に示す。車の初期配置はセル空間の最左から連続して配置した。上段から $V_{max} = 3, STOPNUM = 2$、$V_{max} = 3, STOPNUM = 3$、$V_{max} = 4, STOPNUM = 3$ である。 これらの結果から、このモデルの基本図は図 26 のようになると思われる。



$\rho = 0.10$ $\rho = 0.11$

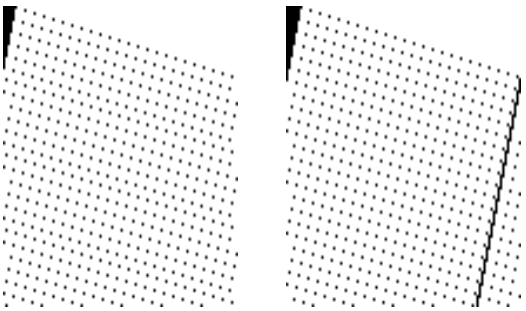
Fig. 23 $V_{max} = 3$,STOPNUM=2 のグラフ

この基本図の各部に対応するシミュレーション結果を図 27 から図 29 に示す。ここでは、$V_{max} = 3$, STOPNUM=2 とする。



$\rho = 0.08$ $\rho = 0.09$

Fig. 24 $V_{max} = 3$,STOPNUM=3 のグラフ



$\rho = 0.06$ $\rho = 0.07$

Fig. 25 $V_{max} = 4$,STOPNUM=3 のグラフ

- $0 < \rho \leq 1/A$ では初期配置で渋滞が存在しても時間と共に解消する。ここでは、(1/A)=10 である (図 27)。
- $1/A < \rho \leq 1/(V_{max}+1)$ では初期配置で渋滞が存在すれば σ に、存在しなければ ω になる。ここでは $1/(V_{max}+1)$=0.25 である (図 28)。
- $1/(V_{max}+1) < \rho \leq$0.5 では初期配置で渋滞が存在すれば、$\omega$ になり、そうでなければ σ になる。σ では渋滞は存在しないが、前車との距離が短くなるため最大速度で走れず、交通量は $1/A < \rho \leq 1/(V_{max}+1)$ に比べて小さくなる (図 29)。

密度 $\rho = \frac{1}{V_{max}+1}$ で全ての車が最大速度で動くため交通量 q が最大となり、1 に漸近する。図 26 の σ 付近は渋滞が存在しない交通で、密度が $\rho = \frac{1}{V_{max}+1}$ を超えると、最大速度で動けなくなり、交通量は減少する。図 26 の ω は渋滞の存在する交通である。

この基本図は V_{max} と STOPNUM で変化する。図 26 の σ は V_{max} によって変化し、$V_{max} = 1, STOPNUM = 0$ のルール 184、$V_{max} = 1, STOPNUM = 1$ のスロースタートモデルでは $\rho = 0.5, q = 0.5$ の点へ向かう直線となる。ω は V_{max} と STOPNUM によって変化し、各々$\rho = 34/100, \rho = 0.5$ から相転移する。このように、ルール 184、スロース

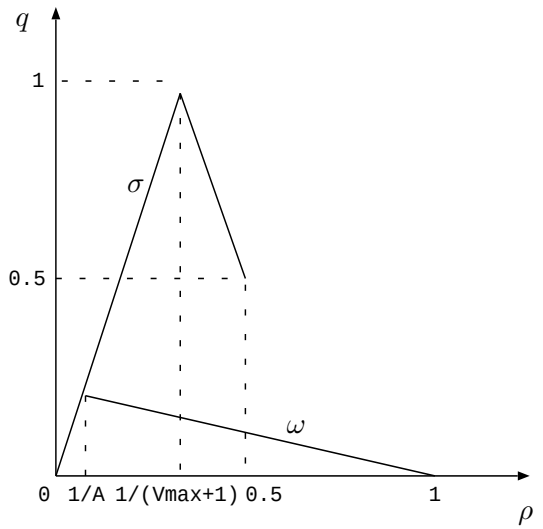


Fig. 26 改良スロースタートモデルの基本図

$\rho = 0.10$

Fig. 27 $0 < \rho \leq 1/\mathrm{A}$ のグラフ

タートモデルの基本図とも対応する基本図となった。

6 まとめ

セルオートマトンのスロースタートモデルに速度と停止時間を持たせて基本図を変化させる研究を行い、基本図を作成した。また、基本図での臨界密度の変化をシミュレーションで確認した。

今回の研究では計算から臨界密度となるであろう車の台数を求め、その付近での交通の様子を 2、3 の初期値に対して調べただけであるので、このモデルの基本図の一部を確認したにすぎない。V_{max} と STOPNUM や初期配置を変えながら、シミュレーションで得られた ρ と q のデータをプロットすれば、実験によって基本図の全体像を確認できただろうと思う。

また、この研究では前車との距離が十分なら、車は常に V_{max} で動くが、実際の車は徐々にスピードアップして行くので、 Nagel–Schreckenberg モデル [2] のように 1 ずつ加速し

$\rho = 0.20$

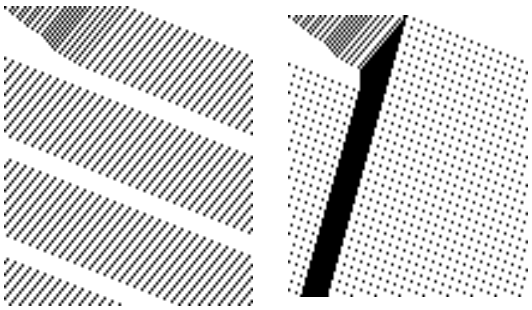


Fig. 28 $1/A < \rho \leq 1/(V_{max}+1)$ のグラフ

$\rho = 0.40$

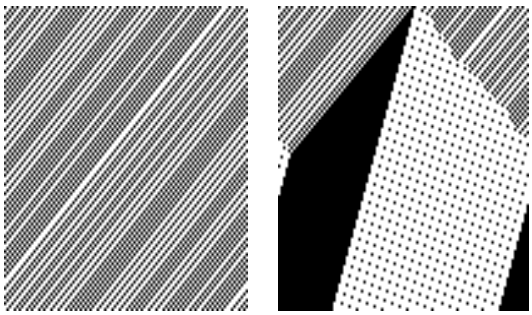


Fig. 29 $1/(V_{max}+1) < \rho \leq 0.5$ のグラフ

て行くルールではまた違った結果になったかも知れない。これらは今後の課題である。

参考文献

[1] 西田 匡佑: “停止距離から導かれる交通流の数学モデルとその数値解析”, 新潟工科大学情報で電子工学科卒業論文 (1999)

[2] 木原 修: “セルオートマトンモデルによる交通流解析”, 新潟工科大学情報で電子工学科卒業論文 (2000)

[3] 宮入 洋介: “交通流解析における流体モデルとセルオートマトンモデルの比較”, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文 (2003)

[4] 西成 活裕: “交通流のセルオートマトンモデルについて”, 応用数理 12,no.2,pp26 - 37(2002)