

L^p ノルムによる非粘性 バーガース方程式の差分法の比較

平成 14 年 2 月 5 日

情報電子工学科 竹野研究室
佐々木 徹也

目次

1	はじめに	1
2	差分解法基礎	1
2.1	差分法	1
2.2	微分方程式の初期値境界値問題	3
2.3	Burgers 方程式	4
3	本稿で取り扱う差分解法	5
3.1	Lax–Friedrichs 法	5
3.1.1	Lax–Friedrichs 法	5
3.1.2	境界部分での計算	6
3.1.3	安定条件	7
3.2	Lax–Wendroff 法	7
3.2.1	Richtmyer 法	8
3.2.2	MacCormack 法	9
4	本稿におけるノルムの扱い	9
4.1	過去の研究	9
4.2	ノルム	10
5	ノルムにおける振動の影響の考察	12
5.1	導入	12
5.2	ノルムへの振動の影響	17
5.2.1	L^2 ノルムへの振動の影響	17
5.2.2	L^1 ノルムへの振動の影響	21
5.2.3	$L^{1.5}$ ノルムへの振動の影響	21
5.2.4	L^p ノルム同士の相対誤差による比較	21
6	L^p ノルムによる差分法の対応付け	36
6.1	L^2 ノルムによる対応付け	36
6.2	$L^{1.5}$ ノルムによる対応付け	37
6.3	L^1 ノルムによる対応付け	37
6.4	L^p ノルムによる対応付けの評価	37
7	あとがき	44
	参考文献	45

概要

本稿では、一次精度の差分法と二次精度の差分法の精度の比較を行い、一次精度差分と二次精度差分の分割数による精度の対応付けを目的としている。短時間計算においての差分の精度に関しては色々と知られているが、長時間計算後の差分の精度に関してはあまりよく知られていない。そこで、一次精度差分が二次精度差分のどの程度の分割数に対応しているのかなどを検討していく。そして、その対応付けの方法として L^p ノルムを用いる。渡邊氏³⁾の研究において、この L^p ノルムが用いられていたが、この L^p ノルムが差分法の振動を含む近似解の比較において用いることができるという保証はないので、この L^p ノルムが振動を含む近似解の比較に用いることができるかどうか確かめるという目的もある。本稿の考察に用いる差分解法は、一次精度の Lax–Friedrichs 法、二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法の前進差分と後退差分の 4 種類である。また、検討する L^p ノルムは、 L^2 ノルム、 L^1 ノルム、 $L^{1.5}$ ノルムの三種類である。そして、実験と考察の末、この L^p ノルムが振動を含む近似解などの比較には使えないのではないかという結論に至る。よって、本稿では一次精度差分と二次精度差分の精度の対応付けにまでは達していない。

1 はじめに

本稿では、一次精度差分と二次精度差分の精度の対応付けと L^p ノルムの振動を含む近似解曲線の比較への適性の是非を検討することが目的である。

一次精度の Lax–Friedrichs 法、二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法の前進差分と後退差分の 4 種類の差分法で様々な分割数や CFL 条件の元で数値計算を行い、それらのデータを用い目的に沿って L^p ノルムによる計算を行い、 L^p ノルムの振動を含む解曲線の比較への適性を検討する。そして、実際に L^p ノルムによる対応付けを行い適性を検討してみる。実験を行う前の予想としては、ある分割数の一次精度の差分法に対して、より精度の高い二次精度差分は一次精度差分より少ない分割数で同等の精度の数値計算結果が対応して得ることができると考えられる。

本稿は、二章で差分法の基礎となる考え方や非粘性 Burgers 方程式などを紹介し、三章では本研究で用いる差分法を、四章では L^p ノルムについて紹介する。そして、五章では L^p ノルムが近似解などの比較に用いることができるのかどうかを検証し、六章では L^p ノルムを用いて一次精度差分と二次精度差分の対応付けを行っていく。

2 差分法基礎

本稿での議論を展開するにあたり、差分法の基礎となる理論について以下に簡単にまとめておく (参考文献²⁾³⁾ 参照)。

2.1 差分法

小さい k に対して $u(t+k)$ をテイラー展開すると

$$u(t+k) = u(t) + ku'(t) + \frac{k^2}{2!}u''(t) + \dots$$

となり、これを $u'(t)$ について解き

$$\frac{u(t+k) - u(t)}{k} = u'(t) + O(k) \quad (2.1)$$

ここで、 $O(k)$ は同位の無限小と呼ばれるもので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \quad \text{のとき} \quad f(x) = O(g(x))$$

と書くことができる。これより $O(k)$ は、 k を充分小さくしたとき、 k 程度の大きさであることを示す。式 (2.1) の場合、 $O(k)$ は、以下の通りである。

$$O(k) = \frac{k}{2!}u''(t) + \frac{k^2}{3!}u'''(t) + \dots$$

よって、式 (2.1) の $O(k)$ 項を無視すれば

$$u'(t) \simeq \frac{u(t+k) - u(t_n)}{k} \quad (2.2)$$

を得ることができる。また、式 (2.2) を求めるときと同様に $u(t-k)$ をテイラー展開すると

$$u(t-k) = u(t) - ku'(t) + \frac{k^2}{2!}u''(t) - \dots$$

$u'(t)$ について整理して

$$\frac{u(t) - u(t-k)}{k} = u'(t) + O(k)$$

を得る。よって

$$u'(t) \simeq \frac{u(t) - u(t-k)}{k} \tag{2.3}$$

と表すこともできる。

また、 $u(t+k)$ から $u(t-k)$ を引いて、同様に

$$\begin{aligned} u(t+k) - u(t-k) &= \{u(t) + ku'(t) + \frac{k^2}{2!}u''(t) + \dots\} \\ &\quad - \{u(t) - ku'(t) + \frac{k^2}{2!}u''(t) - \dots\} \\ &= 2ku'(t) + 2\frac{k^3}{3!}u'''(t) + \dots \end{aligned}$$

$u'(t)$ について整理して

$$\frac{u(t+k) - u(t-k)}{2k} = u'(t) + O(k^2)$$

を得る。よって

$$u'(t) \simeq \frac{u(t+k) - u(t-k)}{2k} \tag{2.4}$$

と表すこともできる。ここで、 $O(k^2)$ は

$$O(k^2) = \frac{k^2}{3!}u'''(t) + \frac{k^4}{5!}u''''(t) + \dots$$

である。

式 (2.2)、(2.3)、(2.4) は、それぞれ前進差分近似、後退差分近似、中心差分近似と呼ばれる。

誤差については、中心差分が $O(k^2)$ 、他が $O(k)$ なので、中心差分が最も精度が良いと考えられる。

二階微分の差分近似も一階微分の差分近似同様に求めることができる。

$u(t+k)$ と $u(t-k)$ を足して

$$\begin{aligned} u(t+k) + u(t-k) &= \{u(t) + ku'(t) + \frac{k^2}{2!}u''(t) + \dots\} \\ &\quad + \{u(t) - ku'(t) + \frac{k^2}{2!}u''(t) - \dots\} \\ &= 2u(t) + 2\frac{k^2}{2!}u''(t) + \dots \end{aligned}$$

$u''(t)$ について整理して

$$\frac{u(t+k) - 2u(t) + u(t-k)}{k^2} = u''(t) + O(k^2)$$

を得る。よって

$$u''(t) \simeq \frac{u(t+k) - 2u(t) + u(t-k)}{k^2}$$

と表すことができる。

これらから、一階微分では 2 点で近似し、二階微分では 3 点で近似していくことがわかる。

2.2 微分方程式の初期値境界値問題

次の偏微分方程式の初期値境界値問題を差分法で解く場合を考えていく。

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} & (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (0 < x < 1) \end{cases} \quad (2.5)$$

式 (2.5) のように、空間変数 x と時間変数 t で与えられる滑らかな関数 $u = u(x, t)$ から成る偏微分方程式に対して、第二式の境界条件、第三式の初期条件から、 $u = u(x, t)$ の関数値を求めていく問題を偏微分方程式の初期値境界値問題という。

$x-t$ 平面における半無限長方形領域 $0 \leq x \leq 1$ 、 $t \geq 0$ の上に、 t 軸に平行な直線群 $x = x_j = jh (j = 0, 1, 2, \dots, J; Jh = 1)$ と x 軸に平行な直線群 $t = t_n = nk (n = 0, 1, 2, \dots)$ を描いて、この領域の 2 辺の長さがそれぞれ h 、 k の小さい長方形領域、格子に分割する。格子の頂点、格子点で座標が $(x_j, t_n) = (jh, nk)$ であるものを P_j^n で表すことにする (Fig.2.1 参照)。

求めたいのは、各格子点における関数値 $u(x_j, t_n)$ であるが、その近似値 u_j^n を数値計算することを考える。なお、 h 、 k の値を小さくするほど両者の値は近付いていく。

常微分方程式のときとまったく同様に考えて、偏導関数 u_t の格子点 P_j^n における時間方向の前進差分

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \quad (2.6)$$

で近似し、同じ点での u_{xx} の値を空間方向の中心差分

$$u_{xx} \simeq \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} \quad (2.7)$$

で近似する。ここで、式 (2.5) 第一式に従い、式 (2.6)、(2.7) で生じる誤差を無視すれば、この 2 式より

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} \quad (2.8)$$

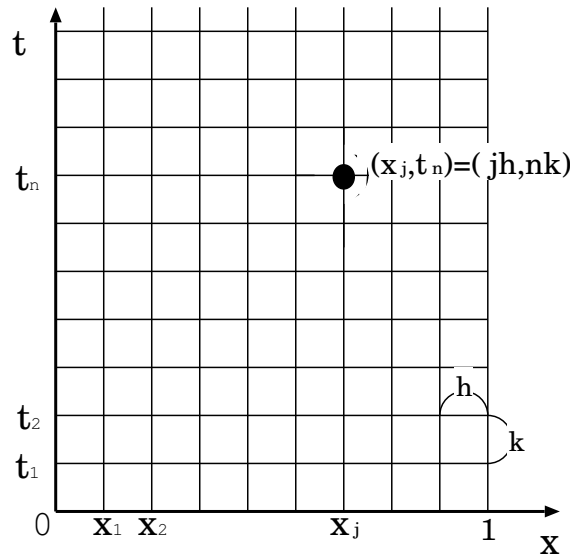


Fig. 2.1 半無限長方形領域

という方程式を得る。式 (2.8) を変形し、初期条件、境界条件に対応する式を併せて書けば、求める関数の格子点上での近似値 u_j^n に対する次の差分方程式系が得られる。

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{k}{h^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) & (j = 1, 2, \dots, J-1; n = 0, 1, 2, \dots) \\ u_0^n = 0, \quad u_J^n = 0 & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ u_j^0 = u_0(jh) & (j = 1, 2, \dots, J-1) \end{cases} \quad (2.9)$$

式 (2.9) 第一式は、時刻 t_n において隣接する 3 個の格子点 P_{j-1}^n 、 P_j^n 、 P_{j+1}^n での値から、次の時刻 t_{n+1} における格子点 P_j^{n+1} での値が、この式 (2.9) 第一式で定まることを意味する。境界値、初期値が第二式、第三式で与えられているので、式 (2.9) 第一式によってすべての格子点での u の近似値が t の増加する方向に順次計算されていく。

2.3 Burgers 方程式

流体運動を支配する方程式に Navier–Stokes 方程式がある。それを簡略化したものが本研究で扱う非粘性 Burgers 方程式である。

まず、一次元の Navier–Stokes 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(ρ : 流体の密度、 u : 流体の速度、 p : 圧力、 ν : 粘性係数)

と表せる。これは

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{移流項} = \text{圧力項} + \text{拡散項}$$

の形をとっている。この式から、圧力項を無視した

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

が Burgers 方程式である。この式から拡散項を無視した

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

が非粘性 Burgers 方程式と呼ばれるものである。 u が滑らかな関数の場合、式 (2.10) は

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \left(f(u) = \frac{u^2}{2} \right) \quad (2.11)$$

と表すことができる。

3 本稿で取り扱う差分解法

ここでは、渡邊氏ら^{3) 2)}と同様の手法で、一次精度の差分解法である Lax–Friedrichs 法や二次精度の Lax–Wendroff 法などについて見ていくことにする。ただし、途中、詳細な説明や証明を省くところもある。

3.1 Lax–Friedrichs 法

3.1.1 Lax–Friedrichs 法

ここで、以下の条件のもとで非粘性 Burgers 方程式の初期値境界値問題を Lax–Friedrichs 法で解くことを考える。

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) & (0 < x < 1) \\ u(0, t) = u(1, t) & (t > 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

この方程式を解く半無限長方形領域の一辺の長さを x 方向に h 、 t 方向に k の長さに分割する。ただし、 x 方向の格子数は J ($Jh = 1$ 、 J : 偶数) とする。 $(x_j, t_n) = (jh, nk)$ での u の近似値を

$$u_j^n \simeq u(x_j, t_n)$$

と表す。

Lax–Friedrichs 法とは、時間微分 $u_t(x_j, t_n)$ を

$$\begin{aligned} u_t(x_j, t_n) &\simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \\ &\simeq \frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

また、空間微分 $u_x(x_j, t_n)$ を

$$u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \quad (3.3)$$

と置き換え、この式 (3.2)、(3.3) より、これを式 (2.11) に用いて

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x &= \frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{k} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

u_j^{n+1} について解き

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{k}{2h} \{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\} \\ (n = 0, 1, 2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots, J) \end{aligned} \quad (3.4)$$

として近似値を計算する方法である。式 (3.4) は、2 点 P_{j+1}^n, P_{j-1}^n の値から、点 P_j^{n+1} での u の値が求められることを意味している。また、 $n = 0$ のとき $j = 1, 2, 3, \dots$ 、 $n = 1$ のとき $j = 2, 4, 6, \dots$ というように、常に $n + j$ は奇数である (Fig. 3.1)。

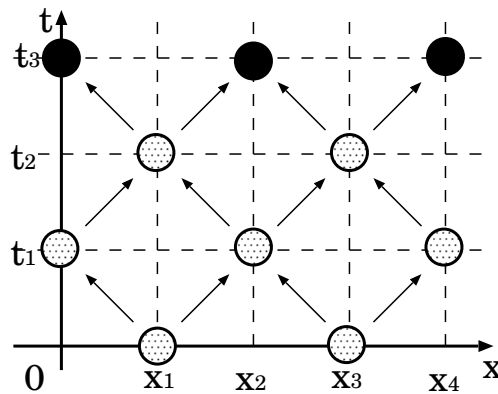


Fig. 3.1 Lax-Friedrichs 法

3.1.2 境界部分での計算

左記での計算方法では、 u_0^1 の計算では P_1^0 の値しか与えられていないので u_0^1 の値が求められない。しかし、ここで渡邊氏ら²⁾³⁾と同様の手法で、境界部分での u の値は条件 (3.1) より求めることにする。条件 (3.1) より、 $x = 0, 1$ のときは、 t が正なら t はどの値でも u の値は同じで u は x 方向に周期的であると考えられる。つまり次式のようにする。

$$\begin{cases} u_{-1}^{2n} &= u_{J-1}^{2n} \\ u_{J+1}^{2n} &= u_1^{2n} \end{cases} \quad (3.5)$$

3.1.3 安定条件

差分近似解には安定性という概念がある。数値計算をしていると真の解はそうでなくても、近似解が振動したり発散したりすることがある。そのような状態を不安定と呼び、対して、近似解が妥当な範囲内に納まった挙動をしていることを安定と呼ぶ。このことは近似解が真の解に近づいているかどうかとは直接関係はないが、ある条件が整ったとき、安定性と収束性は同値であることがある (Lax の同等性定理⁷⁾) ことが知られている。

安定性を考察するには、線形の微分方程式ではフーリエ変換を使うことで行うことができる。しかし、非線形の場合は、線形の方程式に対する条件から推測されるものを安定条件と呼んでいるに過ぎず、厳密な条件であるとは言えない。

式 3.4 において $f(u) = \alpha u$ とすると、この線形での Lax–Friedrichs 法の安定条件は以下の通りになる²⁾。

$$-1 \leq \alpha \frac{k}{h} \leq 1 \quad (3.6)$$

また、これは $k > 0$ 、 $h > 0$ より、 $\alpha < 0$ であり、(3.6) 式より

$$-h \leq \alpha k \leq 0$$

から、 k は h より大きくとることはできないという制限も課している。これは言い換えると、 h を小さくする (空間分割数を多くする) と、 k はそれより大きくとれない (時間分割はより細くなる) ので、同じ時点の計算をする場合でもこの h の設定の仕方により計算量に大きく差が出てきてしまう。このことより、むやみに分割数を増やせば良いということでもないことがわかる。このような k 、 h に関する安定条件を CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) 条件と呼ぶ。

次に非線形の保存則方程式 $u_t + f(u)_x = 0$ 場合を考えてみる。この方程式は

$$\frac{u(x, t+k) - \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t)}{2}}{k} + \frac{f(u(x+h, t)) - f(u(x-h, t))}{2h} = 0 \quad (3.7)$$

と差分化できる。式 (3.7) の CFL 条件は以下の通りである。

$$|f'(u(x, t))| \frac{k}{h} \leq 1$$

3.2 Lax–Wendroff 法

Lax–Friedrichs 法とは時間増分 k に関して一次精度の差分法であった。この時間増分 k を二次精度で求める方法を Lax–Wendroff 法という。これはテイラー展開により

$$u(x, t+k) = u(x, t) + k u_t(x, t) + \frac{k^2}{2!} u_{tt}(x, t) + O(k^3) \quad (3.8)$$

を用いる方法である。線形の方程式 $u_t + \alpha u_x = 0$ の場合

$$u_t = -\alpha u_x$$

を、式 (3.8) に代入して

$$u(x, t + k) = u(x, t) - k\alpha u_x(x, t) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 u_{xx}(x, t) + O(k^3)$$

右辺の空間微分 u_x を中心差分に置きかえ

$$\begin{aligned} u(x, t + k) &= u(x, t) - \frac{k}{2h}\alpha\{u(x + h, t) - u(x - h, t)\} \\ &\quad + \frac{k^2}{2h^2}\alpha^2\{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)\} \\ (u_x &\simeq \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h}, \quad u_{xx} \simeq \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

を計算する方法である。この Lax-Wendroff 法の安定条件は

$$-1 \leq \alpha \frac{k}{h} \leq 1$$

を満たすときであり、Lax-Friedrichs 法のとおり安定条件になる。

3.2.1 Richtmyer 法

先の Lax-Wendroff 法を非線形の場合にも適用しやすくしたものに二段階 Lax-Wendroff 法というものがある。

これは、第一ステップで一次精度の中間的予測値を求め、第二ステップで二次精度の u_j^{n+1} の値を求める予測子-修正子法のひとつである。この方法の安定条件は Lax-Wendroff 法と同じである。ここでは、その中のひとつである Richtmyer 法についてまとめる。

Richtmyer 法の差分式は、 $f_j^n = f(u_j^n)$ として

$$\begin{cases} \text{第一 (予測子) 段階} : u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{k}{2h}(f_{j+1}^n - f_j^n) \\ \text{第二 (修正子) 段階} : u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{k}{h}(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (3.10)$$

ここで、線形の方程式 $u_t + \alpha u_x = 0$ の場合を考えると、 $f(u_j^n) = \alpha u_j^n$ を式 (3.10) に代入して

$$\begin{cases} \text{第一段階} : u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{k}{2h}\alpha(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ \text{第二段階} : u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{k}{h}\alpha(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad (3.11)$$

と表すことができる。また、式 (3.11) の第一段階から得られる $u_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ を第二段階に代入して計算すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha \frac{k}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \alpha^2 \frac{k^2}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.12)$$

となり、線形の場合では Lax-Wendroff 法の差分式と同じものを得ることができる。よって、Richtmyer 法の安定条件は Lax-Wendroff 法と同じである。

3.2.2 MacCormack 法

この MacCormack 法も二段階 Lax–Wendroff 法のひとつである。MacCormack 法の差分式は、 $u_t + \alpha u_x = 0$ の場合を同様に考えて $f(u_j^n) = \alpha u_j^n$ 、 $\tilde{f}_j = f(\tilde{u}_j)$ とすれば、前進差分を用いたもの

$$\begin{cases} \text{第一段階} : \tilde{u}_j = u_j^n - \frac{k}{h}(f_{j+1}^n - f_j^n) \\ \text{第二段階} : u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \frac{k}{2h}(\tilde{f}_j - \tilde{f}_{j-1}) \end{cases} \quad (3.13)$$

後退差分を用いたもの

$$\begin{cases} \text{第一段階} : \tilde{u}_j = u_j^n - \frac{k}{h}(f_j^n - f_{j-1}^n) \\ \text{第二段階} : u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \frac{k}{2h}(\tilde{f}_{j+1} - \tilde{f}_j) \end{cases} \quad (3.14)$$

とがある。ここで、先ほど同様に $u_t + \alpha u_x = 0$ の場合を考えると、 $f(u_j^n) = \alpha u_j^n$ を式 (3.13) に代入して

$$\begin{cases} \text{第一段階} : \tilde{u}_j = u_j^n - \frac{k}{h}\alpha(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ \text{第二段階} : u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + \tilde{u}_j) - \frac{k}{2h}\alpha(\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j-1}) \end{cases} \quad (3.15)$$

同様に、式 (3.15) 第一段で得られる式を第二段の式に代入し計算をすると式 (3.12) が得られる。これもまた、線形の場合には Lax–Wendroff 法と同じ結果が得られ、安定条件などの性質は Lax–Wendroff 法のそれと同様である。

4 本稿におけるノルムの扱い

4.1 過去の研究

長時間計算後の差分においてその精度というのはあまりよく知られていない。長時間計算後、一次精度差分が二次精度差分のどの程度の精度 (分割数) に対応するのか、二次精度差分は一次精度差分よりどの程度よいのか、などのことはまだ知られていないことがある。

木原氏²⁾はその研究において、非粘性 Burgers 方程式の差分の長時間計算に対する比較をグラフの見た目で行っている。渡邊氏³⁾はその研究において、差分法の比較を定量的に行うために、近似解の衝撃波部分に着目し、いくつかの方法で一次精度差分と二次精度差分を比較している。しかし、結果として渡邊氏が実験を行った方法では差分法を比較することはできないのではないかという結論にいたった。そして渡邊氏は、自らの提案した差分の各比較方法についての信頼性の確認のために L^2 ノルムを用いており、この L^2 ノルムによる計測は正しく判断ができ、信頼性のある方法であるとの前提で議論を展開していた。しかし、この L^2 ノルムの計算方法が、二次精度の差分の近似解の衝撃波付近などに見られる振動の影響を受けるのかどうか、また受けるとするとどの程度影響されるのかよく知られていないので、そもそもこの L^2 ノルムをグラフの比較に用いることができるのかはよくわからない、という疑問がある。

4.2 ノルム

ノルムとは、ある二つの関数が等しいかどうか、もしくはそれらがどれくらい近いものであるかを判別する尺度のことである。これには、ある x の値のみで関数を比較するわけにはいかないので、ある範囲内での関数の近さをみるための指標として距離のようなもの $d(f, g)$ を用いる。

$f = f(x)$ 、 $g = g(x)$ とすると

$$\|f - g\|_p = d_p(f, g) = \left\{ \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

と表すことができる。なお、これは L^p ノルムと呼ばれるものであり、ノルムの中のひとつである。

$d_p(f, g)$ は以下に挙げる距離の公理を満たす。

- $d(f, g) \geq 0$
- $d(f, g) = 0 \iff f(x) = g(x)$ (すべての x に対して)
- $d(f, g) = d(g, f)$
- $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

また、ノルムは次の性質をもつ。

- $\|f - g\| \geq 0$
- $\|f - g\| = 0 \iff f(x) - g(x) = 0$ (すべての x に対して)
- $\|c(f - g)\| = |c| \|f - g\|$ (c :定数)
- $\|f - g\| \leq \|f\| + \|g\|$

そして、このノルムの種類の一つに L^p ノルムと呼ばれるものがあり、 $f = f(x)$ 、 $g = g(x)$ とすると

$$\|f - g\|_p = d_p(f, g) = \left\{ \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

と表すことができる。

L^p ノルムのうち、 L^1 ノルムは以下のように表され、本稿では比較する関数同士の近さの指標として取り扱う。

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

これは、計算範囲内においての関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の囲む部分の面積を表している。この二つの関数の囲む面積が小さいほど、その関数同士はより似ている曲線を描いている、より近いところに位置する曲線である、と考えられる。

L^p ノルムのうち、 L^2 ノルムは以下のように表され

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

これは、計算範囲内においての関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の平均二乗誤差と呼ばれるものである。この L^2 ノルムも、その値が小さいほど、二つの関数が近いところに位置している、ということを意味している。

5 ノルムにおける振動の影響の考察

5.1 導入

本稿ではまず、ノルムが二次精度差分などに見られる衝撃波付近などの振動の影響を受けるのか、また、受ける場合どの程度の影響をおよぼされているのかを検討していく。

非粘性 Burgers 方程式 $u_t + uu_x = 0$ に、一昨年の木原氏²⁾ や昨年の渡邊氏³⁾ の研究と同様に、周期が T である次のような時間周期外力を与え長時間計算する。

$$g(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) h(x; a, N) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) & (0 < x \leq a) \\ 0 & (a < x \leq 1) \end{cases} \quad (5.1)$$

まずは先輩諸氏と同様に四種類の差分法で計算を試みた。非粘性 Burgers 方程式の数値計算データはいずれも 300 ~ 330 周期の 31 周期分のデータを取り、得られた解曲線のグラフはその 31 周期分を重ねて描いている。また、いずれも $T = 0.8$ として計算をしている。

一次精度である Lax-Friedrichs 法 (CFL=0.8) での計算結果を Fig. 5.1 に示す。分割数を増やしていくと、次第に衝撃波部分が立ち解曲線がはっきりとすることが見て取れる。次に同じく Lax-Friedrichs 法の 3000 分割での CFL 条件の値を、CFL=0.8~1.6 まで増やしていったときのグラフ Fig. 5.2 を見てみる。CFL 条件の値を緩く(大きく)していくと、次第に衝撃波部分などグラフ全体が丸く歪んでいくことが見て取れる。

次に、二次精度の差分法である Richtmyer 法での計算結果 (CFL=0.8) を Fig. 5.3 に示す。これも先程の Lax-Friedrichs 法と同様に、分割数を増やしていくと、次第に衝撃波部分が立ち解曲線がはっきりとすることが見て取れるようになる。しかし、この二次精度の差分法では、先程の一次精度の差分法では発生しなかった衝撃波付近での近似解の振動が発生する。また、Fig. refpic2 から分かる通り、CFL 条件の値を CFL=0.8 ~ 1.6 と増やすにしたがいこの二次精度の差分では振動部分の幅が広がっていく。CFL 条件の値によっては衝撃波部分以外にも振動が発生していることが分かる。 $x = 0$ 付近と衝撃波の中間付近である。また、MacCormack 法の前進差分と後退差分の場合にも、同様の結果が得られ、同様の振動が近似解に見られた。

この振動部分ももちろん面積を持ち、ノルムの計算を行うにあたってその振動部分を見捨てることはできないのではないかと考えられる。そこで、このノルムがそれら振動にどの程度影響されるのかを調査し考察していく。

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

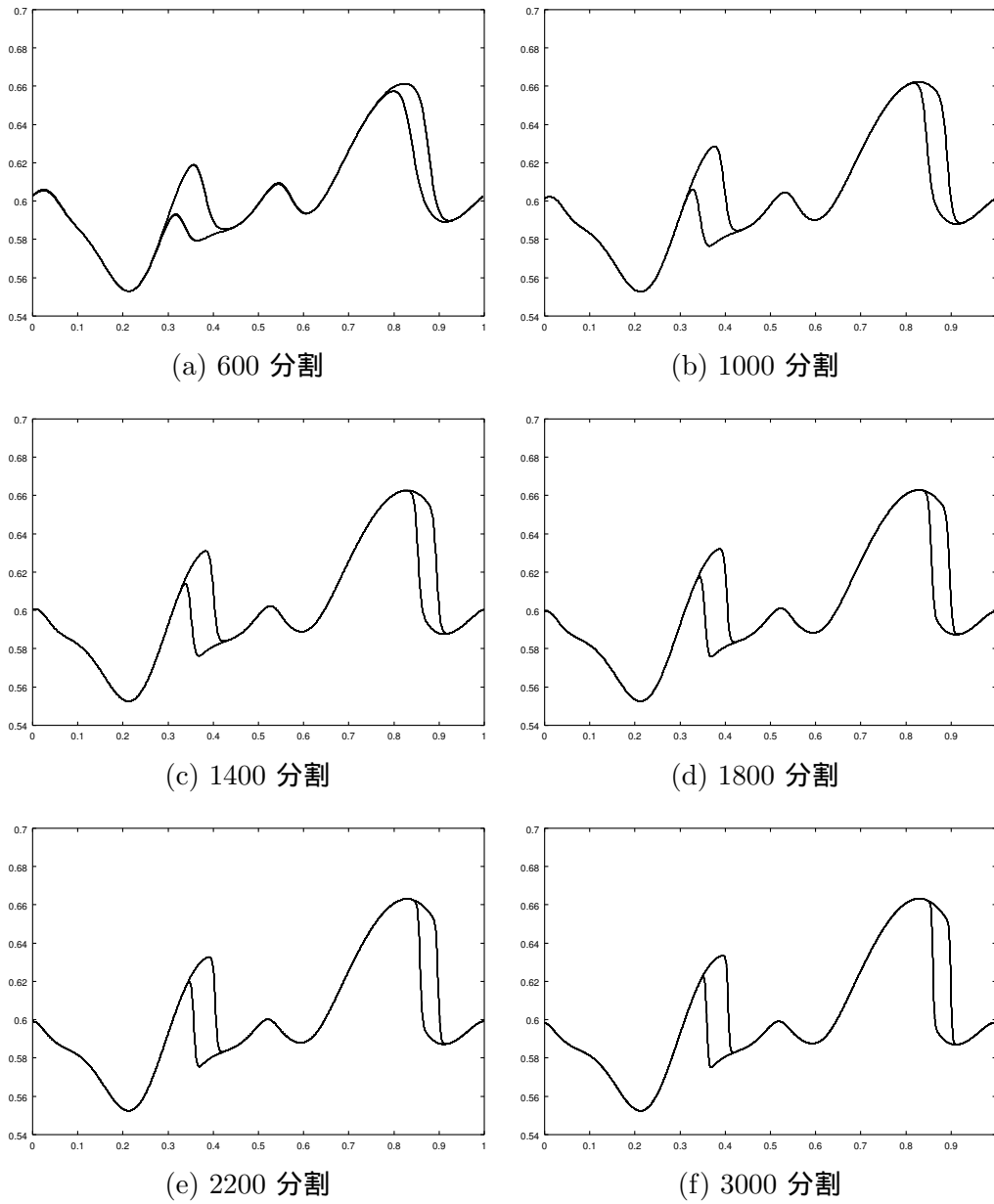


Fig. 5.1 Lax-Friedrichs 法 (CFL=0.8)

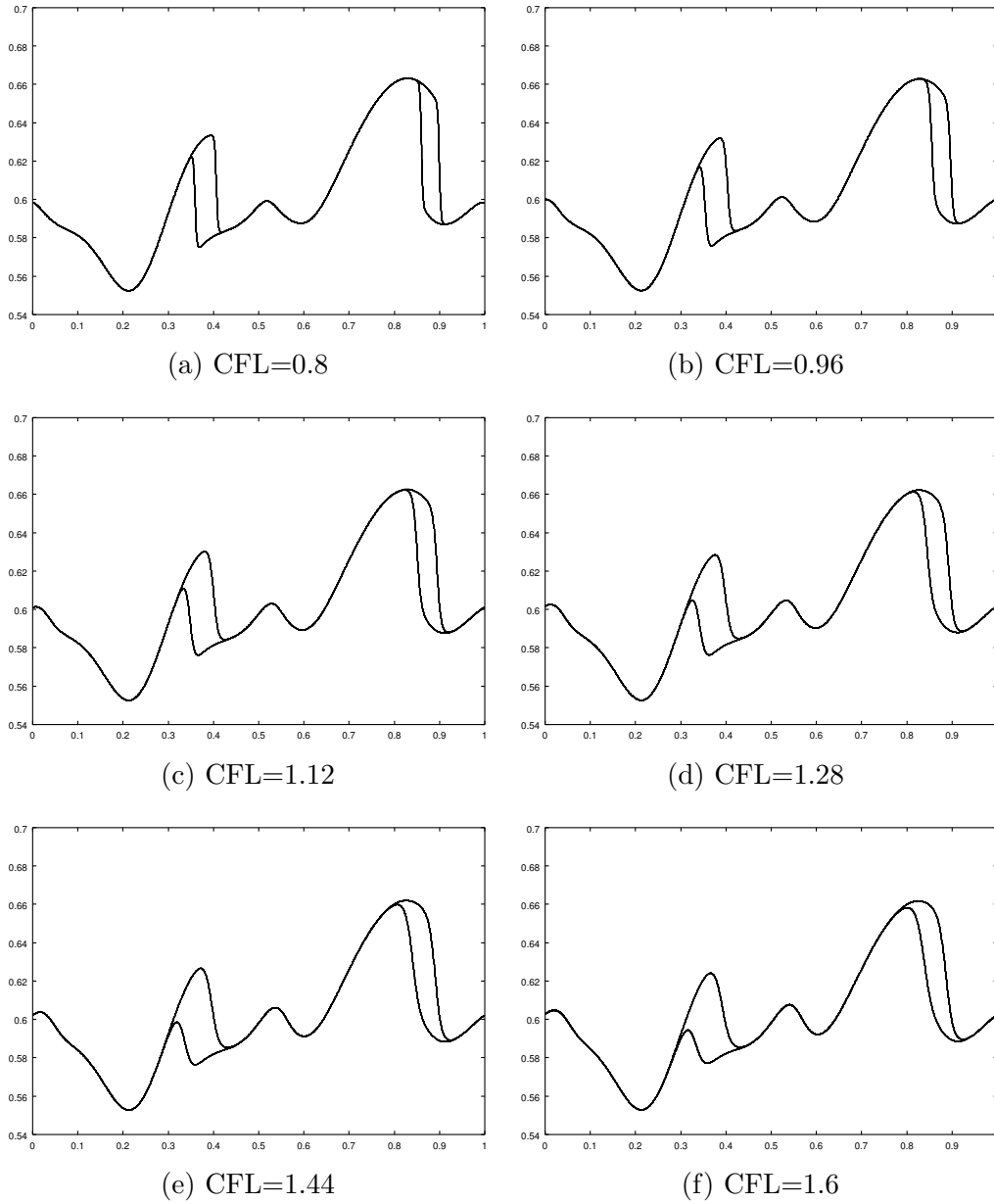


Fig. 5.2 Lax-Friedrichs 法 (3000 分割)

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

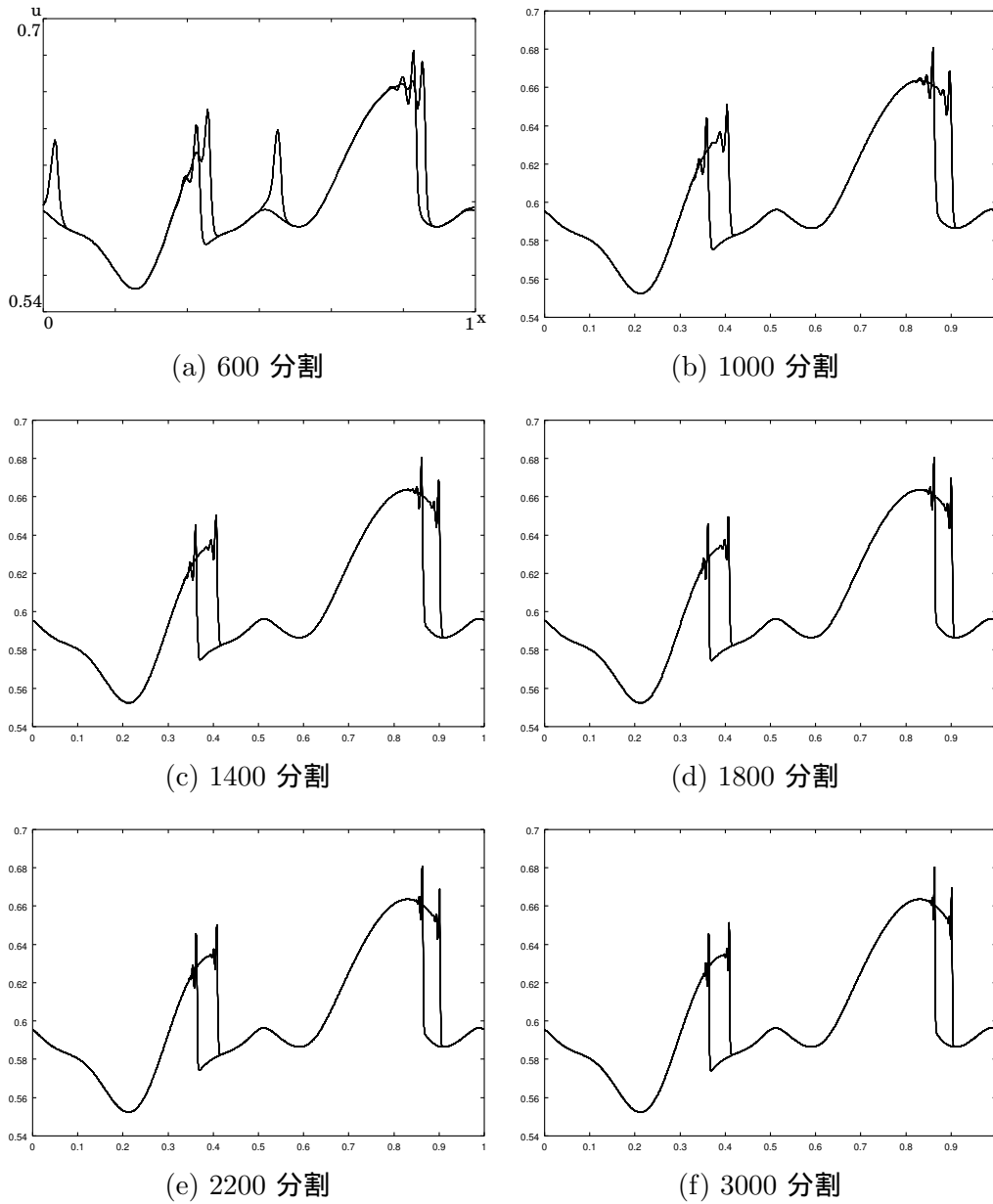


Fig. 5.3 Richtmyer 法 (CFL=0.8)

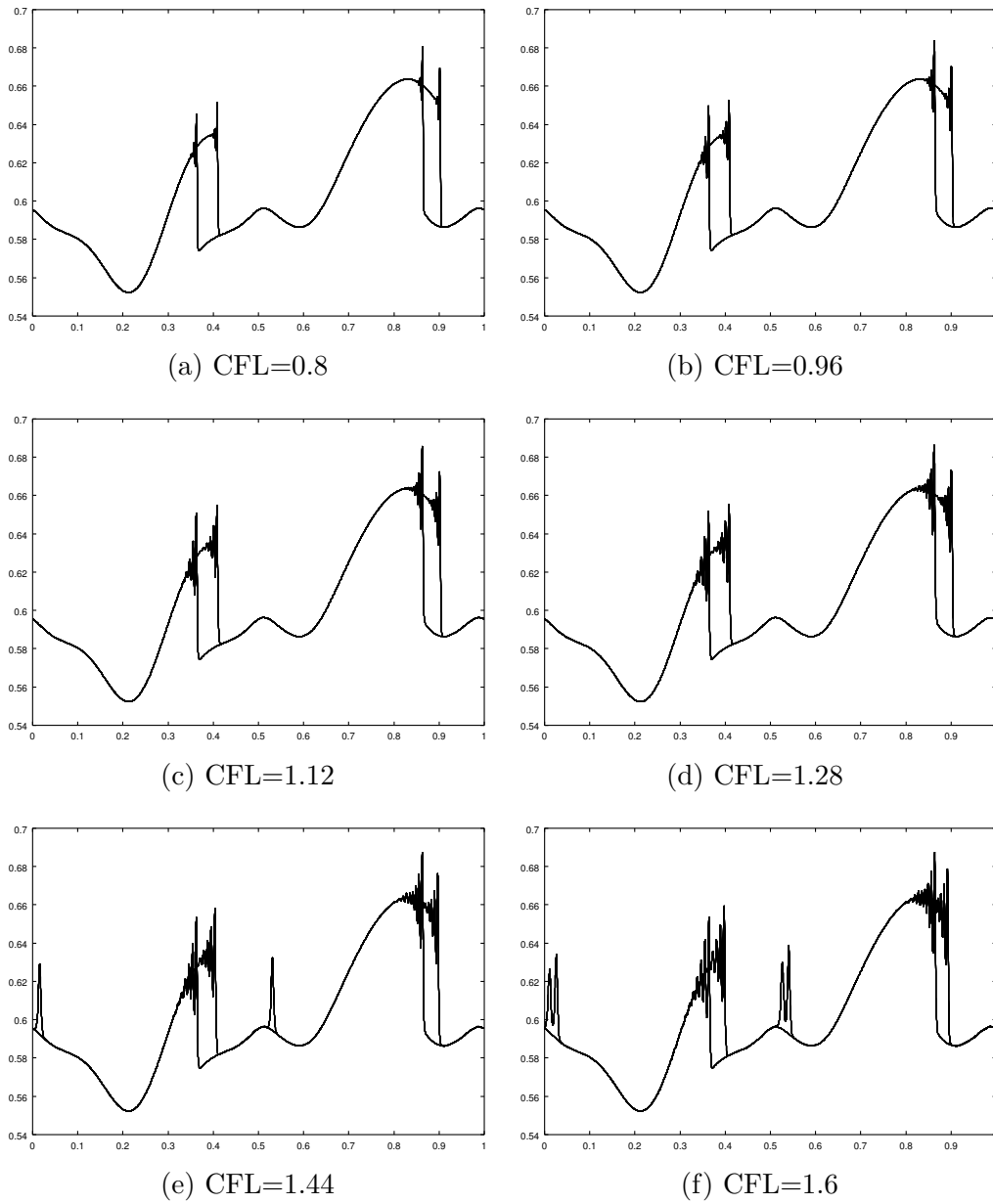


Fig. 5.4 Richtmyer 法 (3000 分割)

5.2 ノルムへの振動の影響

本章では、二次精度差分の振動部分によるノルムへの影響を検討する。検討方法は、分割数を等間隔に 100 づつ増やして 3000 分割までの各差分法のデータを用意する。そして隣合う分割数のデータ同士でノルムの値を計算していく。100 分割と 200 分割、200 分割と 300 分割...、というようにノルムの計算を進める。すると、分割数を増やしていくごとにノルムの値は減少していき、仮に振動部分の影響をノルムが受けないとすると、ノルムの値は最終的に 0 に近づくはずである。これはどういうことか説明すると、 $f(x)$ を真の解、 $f_n(x)$ を n 分割の近似解とすれば

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } f_n(x) \rightarrow f(x)$$

である。ここで、もしノルムに近似解に見られる振動の影響がなければ

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

となるはずである。もしこうなれば

$$\|f_n - f_{n+a}\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_{n+a}\| \quad (a = 100)$$

において、 $\|f_n - f\| = 0$ 、 $\|f - f_{n+a}\| = 0$ より

$$\|f_n - f_{n+a}\| \rightarrow 0$$

となる。よって、ノルムの値が最終的に 0 に近づくようであれば、ノルムが振動部分の影響を受けていないと考えられる。しかし、仮にそうではなくノルムの値が何らかの値に収束したりが振動してしまうようであると、ノルムが振動部分の影響を受けている可能性が考えられる。

まず、本節では、渡邊氏が用いていた L^2 ノルムの振動に対する影響を各差分の計算結果を用いて考察してみる。計算結果は、今回採取したデータの中で振動部分があまり見られなかった CFL=0.8 のデータと振動部分が大きく見受けられた CFL=1.6 のデータを用いることとする。

5.2.1 L^2 ノルムへの振動の影響

Richtmyer 法の計算結果を用いて検討してみる。

初めに、振動部分が小さかった CFL=0.8 のデータで検討する。先に述べたように、100 分割ごとに隣合う分割数の関数値の L^2 ノルムを計算した。しかし、渡邊氏³⁾の研究でもあるように、いま L^2 ノルムで $u_N^R(x, mT)$ (Richtmyer 法、 N 分割での近似解) と $u_M^R(x, mT)$ (Richtmyer 法、 M 分割での近似解) を $m = 330 \sim 330$ までの 31 周期分で考えているので、 L^2 ノルムの値の代わりに

- L^2 ノルムの値の平均値

$$\frac{1}{31} \sum_{m=300}^{330} \sqrt{\int_0^1 |u_N^R(x, mT) - u_M^R(x, mT)|^2 dx}$$

- L^2 ノルムの値の 2 乗の平均値の平方根

$$\sqrt{\frac{1}{31} \sum_{m=300}^{330} \int_0^1 |u_N^R(x, mT) - u_M^R(x, mT)|^2 dx}$$

を用いることにする。しかし、分割数の少ない時点でのノルムの値はばらついており、検討に用いる有効な数値ではないと判断して排除し、有効とみられる 1400 分割からの L^2 ノルムの値を検討に用いた。Table 5.1¹ にその計算結果をまとめた。

Table 5.1 を見ると、 L^2 ノルムの値の平均値と $(L^2$ ノルムの値)² の平均値の平方根のいずれも、分割数を上げていくと徐々に各々の計算値は減少していく。

先に述べたように、これらの数値が分割数を上げていくと 0 に近付いていけば良いのであるが、この計算結果をみるだけでは最終的にこの 2 種の計算値が 0 に近付いているのかどうかを断定することはできない。このグラフの各成分が

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$$

と書き表すことができるとき、もしこのグラフが

$$y = e^{-ax}$$

の形式で表すことができるのなら、縦軸の対数をとると各成分は

$$\begin{bmatrix} x_1 & \log y_1 = z_1 \\ x_2 & \log y_2 = z_2 \\ x_3 & \log y_3 = z_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & \log y_n = z_n \end{bmatrix}$$

と書き換えられて、これらより

$$\begin{aligned} z_n &= \log y_n \\ &= \log e^{-ax_n} \\ &= -ax_n \end{aligned}$$

を得ることができ、直線で表すことができる。また、もしこのグラフが

$$y = x^{-m}$$

¹表中の分割数であるが、例えば分割数 1400 の欄であるならば、それは 1400 分割と 1500 分割とのノルムを計算したという意味である。

の形式で表すことができるのなら、両軸の対数をとると各成分は

$$\begin{bmatrix} \log x_1 = X_1 & \log y_1 = Y_1 \\ \log x_2 = X_2 & \log y_2 = Y_2 \\ \log x_3 = X_3 & \log y_3 = Y_3 \\ \vdots & \vdots \\ \log x_n = X_n & \log y_n = Y_n \end{bmatrix}$$

と書き換えられて、これらより

$$\begin{aligned} Y_n &= \log y_n \\ &= \log(x_n)^{-m} \\ &= -m \log x_n \\ &= -m X_n \end{aligned}$$

を得ることができ、直線で表すことができる。そしてこの 2 つのいずれかの形に収まるようであるならば、そのグラフは $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow 0$ になると言える。ただし、この 2 つの形に強引に当てはめようとするのはあまり良い方法ではないので、誤差を含めた評価が必要である。そこで、この L^2 ノルムの値の平均値が描く曲線の減衰を調べてみるために、縦軸を対数でとった片対数グラフと両軸を対数でとった両対数グラフを比較してみる (Fig. 5.5)。

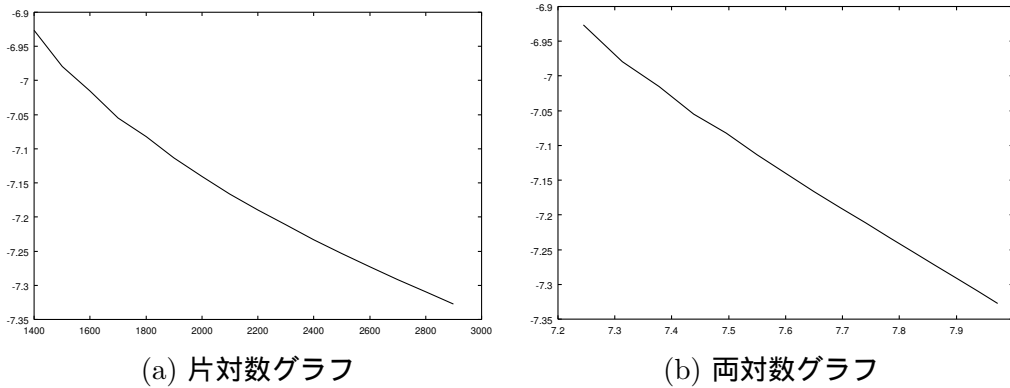


Fig. 5.5 L^2 ノルムの平均値のグラフ

Fig. 5.5 において Table 5.1 の片対数と両対数のグラフを見てみると、視覚的には両対数グラフのほうがやや直線的に見える。しかし、本当に直線であれば $Y = -AX + B$ 、つまり $y = Cx^{-A}$ の形になるのであるが、それとはまた違い $y = C(x + D)^{-A} + E$ のような形である可能性は捨てきれない。もしこの場合だとすると、両対数グラフはしっかりした直線では描かれず少し曲がった曲線になる。実際に Table 5.1 などの数値結果を $y = C(x + D)^{-A} + E$ に当てはめたとき、もっとも誤差が小さくなるように A 、 C 、 D 、 E を選ぶ方法を非線形 fitting という。この L^2 ノルムの値の平均値が描く曲線の分割数

を大きくしていったときの最終的な値の考察を、非線形の最小二乗アルゴリズムにより数値データ点に対する補間を行い、その曲線の漸近線を求めることで行う。

Table 5.1 の数値結果を $y = C(x + D)^{-A} + E$ に当てはめたときの非線形 fitting の結果を Table 5.2 に示す。

ここで問題となるのは $y = C(x + D)^{-A} + E$ の漸近線となる E 項の値である。この E 項の値が 0 に近い程、近似解の振動部分の影響をあまり受けていないと考えることができる。そして、非線形 fitting 結果の E 項を見てみると、 $E = 0.00037402$ で $\pm 55.89\%$ の誤差を示している。この E の値を充分小さいと見ることができかどうかということであるが、この E の値を見た限りでは充分小さいと言い切ることはできない。そこで他の CFL 条件のもとや他の二次精度の差分解法、他の L^p ノルムとの比較も行ってみる。そこで、まずは他の条件のもとでの L^2 ノルムの平均値を計測してみた。それぞれの計測結果の考察はまとめて行うことにする。

次に用意したのは Richtmyer 法の CFL=1.6 での計測結果である。この CFL=1.6 の場合はこのあとでも示すが、いずれの差分やノルムによる計測でもノルムの値の平均値とノルムの平均値の平方根は値のばらつきが多かった。それで、より非線形 fitting のデータが取りやすいように CFL=1.6 の場合は、CFL=0.8 の場合に比べてより広範囲に 600 分割からのデータを採取した。これも先程同様に L^2 ノルムの値の平均値と (L^2 ノルムの値)² の平均値の平方根を Table 5.3 にまとめておく。

また同様にして Table 5.3 の数値結果に対して、その減衰を調べるために非線形 fitting の実行結果を Table 5.4 に示す。Table 5.4 を見て分かる通り、非線形 fitting の誤差はかなり大きい。これも漸近線 E の誤差が大きすぎて 0 に向かって減衰しているとは考えにくい。Table 5.3 の値がばらついているのは、Fig. 5.4 (f) などの衝撃波部分以外にも見られる振動部分の影響を強く受けているのではないかと考えられる。

この Richtmyer 法の CFL=0.8、1.6 の数値結果を見てみると、とても L^2 ノルムの平均値の描く曲線が 0 に近付いていくようには考えられず、それはつまりこの L^2 ノルムが振動部分の影響を受けているということになり、 L^2 ノルムによって振動を含む近似解などの比較はできないのではないかと考えることができる。

MacCormack 法の前進差分と後退差分についても、それぞれ Table 5.5 ~ Table 5.12 に同様に L^2 ノルムの値の平均値と (L^2 ノルムの値)² の平均値の平方根をまとめておいた。これらの表を見て分かる通り、MacCormack 法の前進差分と後退差分においても Richtmyer 法とほぼ同様の数値結果と傾向が得られた。このことから、 L^2 ノルムに対して二次精度差分の振動が及ぼす影響は同じであると考えられる。言い方を変えれば、二次精度差分に生じる振動部分は、どの二次精度の差分法に置いても L^2 ノルムに対して同様の影響を及ぼすということである。このことから、以下では Richtmyer 法のみで検討を行なうものとする。

5.2.2 L^1 ノルムへの振動の影響

ここでは、前節同様にして L^1 ノルムへの振動の影響を検討する。Table 5.13 ~ Table 5.16 に、それぞれ L^1 ノルムの値の平均値と $(L^1$ ノルムの値)² の平均値の平方根、それに対する非線形 fitting 結果をまとめておいた。

この L^1 ノルムにおいても L^2 ノルム同様の L^1 ノルムの値の平均値などの減衰が見られる。この L^1 ノルムの値の平均値などを L^2 ノルムでの結果と絶対的な比較をすると、この L^1 ノルムの方がより 0 に近く、より振動の影響を受けていないように見える。ただし、 L^2 ノルムよりも適性がありそうだとした場合でもこの L^1 ノルムの値自体は 0 に近付いていっているとは考えにくく、もともとこの L^1 ノルムと L^2 ノルムは尺度が違う比較方法なので、どちらの方法がより減衰していくのか、より比較への適性があるのかを調べるには相対的な比較を行なってみる必要がある。この相対誤差による検討は、次に挙げる $L^{1.5}$ ノルムを含めてまとめて行なう。ただ、いずれにしてもこの L^1 ノルムも振動を含む近似解などの比較には用いることはできないのではないかと考えられる。

5.2.3 $L^{1.5}$ ノルムへの振動の影響

ここでは、前節同様にして L^1 ノルムへの振動の影響を検討する。Table 5.17 ~ Table 5.20 に、それぞれ L^1 ノルムの値の平均値と $(L^1$ ノルムの値)² の平均値の平方根、それに対する非線形 fitting 結果をまとめておいた。

この $L^{1.5}$ ノルムにおいても、先のノルム同様の $L^{1.5}$ ノルムの値の平均値などの減衰が見られる。絶対的な比較をすれば、この $L^{1.5}$ ノルムからは丁度 L^2 ノルムと L^1 ノルムの間にとまる数値データをえている。やはりこの $L^{1.5}$ ノルムにおいても非線形 fitting 結果によれば、漸近線は 0 に近いとは考えにくい。ということは、やはりこの $L^{1.5}$ ノルムにおいても同様に、振動を含む近似解などの比較には用いることはできないのではないかと考えられる。

5.2.4 L^p ノルム同士の相対誤差による比較

ここでは、以上に挙げた 3 種類の L^p ノルムの相対誤差による L^p ノルム同士の比較を行なう。ここでは、 L^p ノルムにの平均値に対する相対誤差 ε_r を次のように考える。

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{1}{31} \sum_{m=300}^{330} \left\{ \int_0^1 |f_n(x, mT) - f_{n+100}(x, mT)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}}{\|f_{3000}\|_p} \quad (5.2)$$

式 (5.2) を用い、それぞれの L^p ノルムで Richtmyer 法 (CFL=0.8) での L^p ノルムの値の平均値に対する相対誤差 ε_r を求め L^p ノルム同士の比較を行なう。Table 5.21 ~ Table 5.26 に各ノルムの相対誤差と非線形 fitting の数値計算データをまとめておく。また、そのグラフを Fig. 5.6 に記載しておく。

Table 5.21 ~ Table 5.26 と Fig. 5.6 から見て取ることができるように、相対誤差で比較してみた場合でも、 L^1 ノルムでの計算値の誤差の値が最も小さくまとまっており、

またその減衰が 3 種類のノルムの中で最も漸近線が 0 に近付き漸近線の誤差範囲も狭くなっている。これらのことから、やはり L^1 ノルムが本研究で用いた L^p ノルムの中で最も振動を含む近似解の比較に適性があると考えられ、この L^1 ノルムでさえも決して L^1 ノルムの平均値の減衰における漸近線が 0 に近いと言えないので、実験的に L^p ノルムによる振動を含む近似解の比較は無理であるという結論が妥当であると考えられる。

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
1400	9.81091×10^{-4}	9.834531×10^{-4}
1500	9.31100×10^{-4}	9.338409×10^{-4}
1600	8.98086×10^{-4}	9.008138×10^{-4}
1700	8.63332×10^{-4}	8.661476×10^{-4}
1800	8.40258×10^{-4}	8.431644×10^{-4}
1900	8.13903×10^{-4}	8.169229×10^{-4}
2000	7.92519×10^{-4}	7.955320×10^{-4}
2100	7.72390×10^{-4}	7.753700×10^{-4}
2200	7.54589×10^{-4}	7.575335×10^{-4}
2300	7.37871×10^{-4}	7.407853×10^{-4}
2400	7.22075×10^{-4}	7.249521×10^{-4}
2500	7.07471×10^{-4}	7.102995×10^{-4}
2600	6.93839×10^{-4}	6.966217×10^{-4}
2700	6.81056×10^{-4}	6.837972×10^{-4}
2800	6.68912×10^{-4}	6.716142×10^{-4}
2900	6.57442×10^{-4}	6.601038×10^{-4}

Table 5.1 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における L^2 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 1.02469	± 1.047 (102.2%)
C : 1.00875	± 8.013 (794.4%)
D : 0.999711	± 1002 ($1.002 \times 10^5\%$)
E : 0.00037402	± 0.000209 (55.89%)

Table 5.2 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における Table 5.1 の非線形 fitting 結果

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	1.332482×10^{-2}	1.334043×10^{-2}
700	1.510797×10^{-2}	1.511219×10^{-2}
800	1.537789×10^{-2}	1.538179×10^{-2}
900	5.356536×10^{-3}	5.361305×10^{-3}
1000	1.326299×10^{-2}	1.326734×10^{-2}
1100	1.173164×10^{-2}	1.176716×10^{-2}
1200	8.180851×10^{-3}	8.184944×10^{-3}
1300	9.245881×10^{-3}	9.249011×10^{-3}
1400	3.197144×10^{-3}	3.201345×10^{-3}
1500	1.027266×10^{-2}	1.027398×10^{-2}
1600	9.635744×10^{-3}	9.638323×10^{-3}
1700	9.436821×10^{-3}	9.437579×10^{-3}
1800	9.383311×10^{-3}	9.383505×10^{-3}
1900	9.271177×10^{-3}	9.271180×10^{-3}
2000	8.800200×10^{-3}	8.800266×10^{-3}
2100	8.678315×10^{-3}	8.678323×10^{-3}
2200	7.893008×10^{-3}	7.893140×10^{-3}
2300	9.025166×10^{-3}	9.025509×10^{-3}
2400	5.389701×10^{-3}	5.390737×10^{-3}
2500	6.586031×10^{-3}	6.586468×10^{-3}
2600	6.276124×10^{-3}	6.277280×10^{-3}
2700	4.584718×10^{-3}	4.586413×10^{-3}
2800	2.577473×10^{-3}	2.578051×10^{-3}
2900	2.149854×10^{-3}	2.149854×10^{-3}

Table 5.3 Richtmyer 法 (CFL=1.6) における L^2 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.054925	± 7.067 ($1.287 \times 10^4\%$)
C : 0.154262	± 10.89 (7060%)
D : 1.00444	± 8547 ($8.51 \times 10^5\%$)
E : -0.0943796	± 12.65 ($1.341 \times 10^4\%$)

Table 5.4 Richtmyer 法 (CFL=1.6) における Table 5.3 の非線形 fitting 結果

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
1400	8.594633×10^{-4}	8.611225×10^{-4}
1500	8.178661×10^{-4}	8.199753×10^{-4}
1600	7.894826×10^{-4}	7.915370×10^{-4}
1700	7.590408×10^{-4}	7.610098×10^{-4}
1800	7.384484×10^{-4}	7.404249×10^{-4}
1900	7.154557×10^{-4}	7.175362×10^{-4}
2000	6.966745×10^{-4}	6.987705×10^{-4}
2100	6.787740×10^{-4}	6.808268×10^{-4}
2200	6.627924×10^{-4}	6.647992×10^{-4}
2300	6.478517×10^{-4}	6.498419×10^{-4}
2400	6.337840×10^{-4}	6.357632×10^{-4}
2500	6.207243×10^{-4}	6.226774×10^{-4}
2600	6.084756×10^{-4}	6.103971×10^{-4}
2700	5.969881×10^{-4}	5.988844×10^{-4}
2800	5.861056×10^{-4}	5.879831×10^{-4}
2900	5.758197×10^{-4}	5.776768×10^{-4}

Table 5.5 MacCormack 法 (前進差分) (CFL=0.8) における L^2 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.933487	± 0.8754 (93.78%)
C : 0.488693	± 3.206 (656.1%)
D : 1.00198	± 879.5 ($8.778 \times 10^4\%$)
E : 0.000291155	± 0.0001946 (66.83%)

Table 5.6 MacCormack 法 (前進差分) (CFL=0.8) における Table 5.5 の非線形 fitting 結果

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	1.271873×10^{-2}	1.273174×10^{-2}
700	1.450095×10^{-2}	1.450469×10^{-2}
800	1.472389×10^{-2}	1.472687×10^{-2}
900	5.119590×10^{-3}	5.123702×10^{-3}
1000	1.265237×10^{-2}	1.265719×10^{-2}
1100	1.135355×10^{-2}	1.138677×10^{-2}
1200	8.141339×10^{-3}	8.145034×10^{-3}
1300	8.979311×10^{-3}	8.981288×10^{-3}
1400	3.019177×10^{-3}	3.023082×10^{-3}
1500	9.769331×10^{-3}	9.770965×10^{-3}
1600	9.149875×10^{-3}	9.152365×10^{-3}
1700	8.978712×10^{-3}	8.979516×10^{-3}
1800	8.955649×10^{-3}	8.955857×10^{-3}
1900	8.846305×10^{-3}	8.846311×10^{-3}
2000	8.388639×10^{-3}	8.388714×10^{-3}
2100	8.275397×10^{-3}	8.275398×10^{-3}
2200	7.501693×10^{-3}	7.501855×10^{-3}
2300	8.637969×10^{-3}	8.638280×10^{-3}
2400	5.102200×10^{-3}	5.103325×10^{-3}
2500	6.235982×10^{-3}	6.236472×10^{-3}
2600	5.953325×10^{-3}	5.954498×10^{-3}
2700	4.331531×10^{-3}	4.333265×10^{-3}
2800	2.461835×10^{-3}	2.462590×10^{-3}
2900	2.046024×10^{-3}	2.046025×10^{-3}

Table 5.7 MacCormack 法 (前進差分) (CFL=1.6) における L^2 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.0529291	± 6.963 ($1.315 \times 10^4\%$)
C : 0.152678	± 11.35 (7434%)
D : 1.00457	± 8440 ($8.401 \times 10^5\%$)
E : -0.0952017	± 13.01 ($1.367 \times 10^4\%$)

Table 5.8 MacCormack 法 (前進差分) (CFL=1.6) における非 Table 5.7 の線形 fitting 結果

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
1400	9.790309×10^{-4}	9.813899×10^{-4}
1500	9.291595×10^{-4}	9.318984×10^{-4}
1600	8.962136×10^{-4}	8.989381×10^{-4}
1700	8.615088×10^{-4}	8.643180×10^{-4}
1800	8.384633×10^{-4}	8.413624×10^{-4}
1900	8.121544×10^{-4}	8.151662×10^{-4}
2000	7.908057×10^{-4}	7.938108×10^{-4}
2100	7.707059×10^{-4}	7.736781×10^{-4}
2200	7.529284×10^{-4}	7.558646×10^{-4}
2300	7.362347×10^{-4}	7.391410×10^{-4}
2400	7.204642×10^{-4}	7.233333×10^{-4}
2500	7.058830×10^{-4}	7.087042×10^{-4}
2600	6.922723×10^{-4}	6.950474×10^{-4}
2700	6.795089×10^{-4}	6.822428×10^{-4}
2800	6.673852×10^{-4}	6.700798×10^{-4}
2900	6.559337×10^{-4}	6.585890×10^{-4}

Table 5.9 MacCormack 法 (後退差分) (CFL=0.8) における L^2 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 1.0239	± 1.044 (102%)
C : 1.00188	± 7.932 (791.7%)
D : 0.999868	± 999.1 ($9.992 \times 10^4\%$)
E : 0.000372651	± 0.0002084 (55.93%)

Table 5.10 MacCormack 法 (後退差分) (CFL=0.8) における Table 5.9 の非線形 fitting 結果

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	1.320804×10^{-2}	1.322312×10^{-2}
700	1.499396×10^{-2}	1.499807×10^{-2}
800	1.524914×10^{-2}	1.525288×10^{-2}
900	5.303466×10^{-3}	5.308058×10^{-3}
1000	1.311699×10^{-2}	1.312207×10^{-2}
1100	1.179503×10^{-2}	1.182901×10^{-2}
1200	8.209317×10^{-3}	8.213412×10^{-3}
1300	9.208355×10^{-3}	9.211240×10^{-3}
1400	3.164204×10^{-3}	3.168356×10^{-3}
1500	1.017623×10^{-2}	1.017761×10^{-2}
1600	9.542675×10^{-3}	9.545250×10^{-3}
1700	9.348265×10^{-3}	9.349037×10^{-3}
1800	9.300680×10^{-3}	9.300880×10^{-3}
1900	9.188996×10^{-3}	9.188999×10^{-3}
2000	8.720955×10^{-3}	8.721024×10^{-3}
2100	8.600247×10^{-3}	8.600254×10^{-3}
2200	7.818162×10^{-3}	7.818300×10^{-3}
2300	8.952082×10^{-3}	8.952427×10^{-3}
2400	5.336881×10^{-3}	5.337915×10^{-3}
2500	6.518892×10^{-3}	6.519343×10^{-3}
2600	6.214798×10^{-3}	6.215952×10^{-3}
2700	4.536944×10^{-3}	4.538653×10^{-3}
2800	2.554246×10^{-3}	2.554849×10^{-3}
2900	2.129450×10^{-3}	2.129450×10^{-3}

Table 5.11 MacCormack 法 (後退差分) (CFL=1.6) における L^2 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.053938	± 7.039 ($1.305 \times 10^4\%$)
C : 0.155241	± 11.28 (7267%)
D : 1.00447	± 8523 ($8.485 \times 10^5\%$)
E : -0.0958529	± 13.02 ($1.358 \times 10^4\%$)

Table 5.12 MacCormack 法 (後退差分) (CFL=1.6) における Table 5.11 の非線形 fitting 結果

分割数	L^1 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^1 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
1400	2.571308×10^{-4}	2.577873×10^{-4}
1500	2.344327×10^{-4}	2.348099×10^{-4}
1600	2.178415×10^{-4}	2.182258×10^{-4}
1700	2.058067×10^{-4}	2.062884×10^{-4}
1800	1.946866×10^{-4}	1.951583×10^{-4}
1900	1.835990×10^{-4}	1.840153×10^{-4}
2000	1.732304×10^{-4}	1.735917×10^{-4}
2100	1.651141×10^{-4}	1.654836×10^{-4}
2200	1.570733×10^{-4}	1.574401×10^{-4}
2300	1.501541×10^{-4}	1.505530×10^{-4}
2400	1.433254×10^{-4}	1.436728×10^{-4}
2500	1.381774×10^{-4}	1.385087×10^{-4}
2600	1.326263×10^{-4}	1.329377×10^{-4}
2700	1.278093×10^{-4}	1.281467×10^{-4}
2800	1.229624×10^{-4}	1.233031×10^{-4}
2900	1.187071×10^{-4}	1.190334×10^{-4}

Table 5.13 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における L^1 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 1.25118	± 1.1 (87.92%)
C : 1.96378	± 16.74 (852.2%)
D : 0.981736	± 939.5 ($9.57 \times 10^4\%$)
E : 2.78109e-05	$\pm 5.636e-05$ (202.7%)

Table 5.14 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における Table 5.13 の非線形 fitting 結果

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数	L^1 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^1 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	6.241303×10^{-3}	6.244468×10^{-3}
700	6.543779×10^{-3}	6.547286×10^{-3}
800	7.867254×10^{-3}	7.867447×10^{-3}
900	3.110634×10^{-3}	3.112087×10^{-3}
1000	5.521968×10^{-3}	5.527901×10^{-3}
1100	5.625939×10^{-3}	5.635268×10^{-3}
1200	3.280965×10^{-3}	3.281518×10^{-3}
1300	3.560729×10^{-3}	3.560985×10^{-3}
1400	1.727223×10^{-3}	1.728393×10^{-3}
1500	3.420664×10^{-3}	3.421519×10^{-3}
1600	3.303745×10^{-3}	3.304502×10^{-3}
1700	2.958964×10^{-3}	2.959276×10^{-3}
1800	2.906128×10^{-3}	2.906369×10^{-3}
1900	2.849194×10^{-3}	2.849207×10^{-3}
2000	2.604159×10^{-3}	2.604341×10^{-3}
2100	2.614614×10^{-3}	2.614615×10^{-3}
2200	2.266909×10^{-3}	2.267060×10^{-3}
2300	2.973845×10^{-3}	2.973938×10^{-3}
2400	1.447996×10^{-3}	1.448147×10^{-3}
2500	1.705729×10^{-3}	1.705965×10^{-3}
2600	1.691302×10^{-3}	1.691526×10^{-3}
2700	1.179524×10^{-3}	1.179958×10^{-3}
2800	7.787467×10^{-4}	7.787861×10^{-4}
2900	6.786994×10^{-4}	6.788284×10^{-4}

Table 5.15 Richtmyer 法 (CFL=1.6) における L^1 ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.179205	± 3.972 (2217%)
C : 0.0733886	± 0.7644 (1042%)
D : 1.0058	± 4233 ($4.208 \times 10^5\%$)
E : -0.0164329	± 0.3786 (2304%)

Table 5.16 Richtmyer 法 (CFL=1.6) における Table 5.15 の非線形 fitting 結果

分割数	$L^{1.5}$ ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^{1.5} \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
1400	5.322816×10^{-4}	5.340548×10^{-4}
1500	4.927813×10^{-4}	4.941524×10^{-4}
1600	4.670398×10^{-4}	4.684239×10^{-4}
1700	4.470674×10^{-4}	4.488109×10^{-4}
1800	4.300023×10^{-4}	4.318767×10^{-4}
1900	4.109009×10^{-4}	4.127011×10^{-4}
2000	3.940914×10^{-4}	3.957556×10^{-4}
2100	3.805911×10^{-4}	3.823038×10^{-4}
2200	3.681063×10^{-4}	3.698712×10^{-4}
2300	3.565107×10^{-4}	3.583042×10^{-4}
2400	3.449334×10^{-4}	3.466270×10^{-4}
2500	3.353359×10^{-4}	3.370121×10^{-4}
2600	3.259699×10^{-4}	3.276356×10^{-4}
2700	3.176525×10^{-4}	3.193384×10^{-4}
2800	3.092638×10^{-4}	3.109208×10^{-4}
2900	3.016595×10^{-4}	3.032962×10^{-4}

Table 5.17 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における $L^{1.5}$ ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 1.13999	± 1.442 (126.5%)
C : 1.53589	± 17 (1107%)
D : 0.992077	± 1300 ($1.31 \times 10^5\%$)
E : 0.000129479	± 0.0001552 (119.8%)

Table 5.18 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における Table 5.17 の非線形 fitting 結果

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数	$L^{1.5}$ ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^{1.5} \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	9.864884×10^{-3}	9.872691×10^{-3}
700	1.089550×10^{-2}	1.089975×10^{-2}
800	1.176508×10^{-2}	1.176660×10^{-2}
900	4.207604×10^{-3}	4.210725×10^{-3}
1000	9.334645×10^{-3}	9.340684×10^{-3}
1100	8.720148×10^{-3}	8.741160×10^{-3}
1200	5.679425×10^{-3}	5.681585×10^{-3}
1300	6.334389×10^{-3}	6.335931×10^{-3}
1400	2.429403×10^{-3}	2.432162×10^{-3}
1500	6.707928×10^{-3}	6.709145×10^{-3}
1600	6.372547×10^{-3}	6.374212×10^{-3}
1700	6.038126×10^{-3}	6.038688×10^{-3}
1800	5.982310×10^{-3}	5.982606×10^{-3}
1900	5.895111×10^{-3}	5.895118×10^{-3}
2000	5.523977×10^{-3}	5.524133×10^{-3}
2100	5.485912×10^{-3}	5.485916×10^{-3}
2200	4.898343×10^{-3}	4.898526×10^{-3}
2300	5.960315×10^{-3}	5.960558×10^{-3}
2400	3.257320×10^{-3}	3.257885×10^{-3}
2500	3.944278×10^{-3}	3.944646×10^{-3}
2600	3.812693×10^{-3}	3.813304×10^{-3}
2700	2.724841×10^{-3}	2.725920×10^{-3}
2800	1.615838×10^{-3}	1.616083×10^{-3}
2900	1.370994×10^{-3}	1.371038×10^{-3}

Table 5.19 Richtmyer 法 (CFL=1.6) における $L^{1.5}$ ノルムによる計算結果

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.086218	± 5.544 (6430%)
C : 0.103982	± 1.954 (1879%)
D : 1.0048	± 6487 ($6.456 \times 10^5\%$)
E : -0.049312	± 3.303 (6698%)

Table 5.20 Richtmyer 法 (CFL=1.6) における Table 5.19 の非線形 fitting 結果

分割数	相対誤差 ε_r (%)
1400	0.16328
1500	0.15497
1600	0.14946
1700	0.14369
1800	0.13984
1900	0.13547
2000	0.13190
2100	0.12854
2200	0.12558
2300	0.12280
2400	0.12017
2500	0.11774
2600	0.11548
2700	0.11334
2800	0.11133
2900	0.10942

Table 5.21 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における L^2 ノルムの値の平均値による相対誤差

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.0327929	± 0.1496 (456.3%)
C : 1.40486	± 4.754 (338.4%)
D : -941.117	± 132.2 (14.05%)
E : -0.98617	± 4.953 (502.2%)

Table 5.22 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における Table 5.21 の非線形 fitting 結果

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数	相対誤差 ε_r (%)
1400	0.04285
1500	0.03906
1600	0.03630
1700	0.03430
1800	0.03243
1900	0.03058
2000	0.02886
2100	0.02751
2200	0.02616
2300	0.02501
2400	0.02388
2500	0.02301
2600	0.02210
2700	0.02130
2800	0.02048
2900	0.01978

Table 5.23 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における L^1 ノルムの値の平均値による相対誤差

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.0540477	± 0.1691 (312.8%)
C : 0.388695	± 0.7048 (181.3%)
D : -1010.4	± 131.1 (12.97%)
E : -0.238845	± 0.7995 (334.7%)

Table 5.24 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における Table 5.23 の非線形 fitting 結果

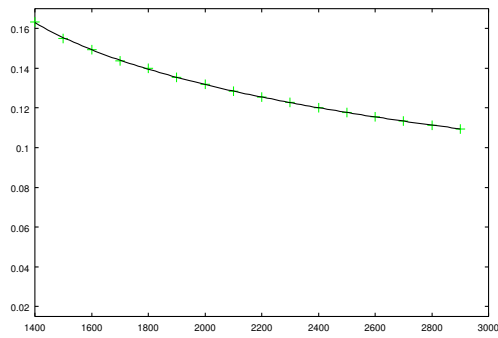
分割数	相対誤差 ε_r (%)
1400	0.08864
1500	0.08206
1600	0.07778
1700	0.07445
1800	0.07161
1900	0.06843
2000	0.06562
2100	0.06337
2200	0.06130
2300	0.05937
2400	0.05744
2500	0.05584
2600	0.05428
2700	0.05289
2800	0.05149
2900	0.05023

Table 5.25 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における $L^{1.5}$ ノルムの値の平均値による相対誤差

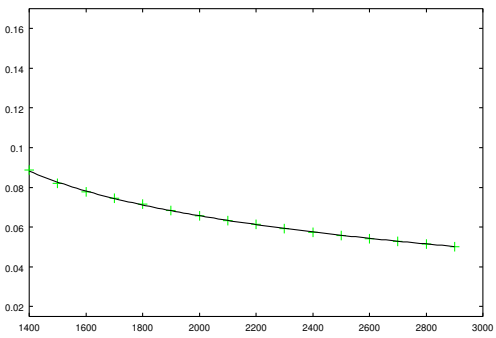
Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
A : 0.026909	± 0.2183 (811.3%)
C : 1.0901	± 6.988 (641%)
D : -997.427	± 178.2 (17.86%)
E : -0.839415	± 7.172 (854.4%)

Table 5.26 Richtmyer 法 (CFL=0.8) における Table 5.25 の非線形 fitting 結果

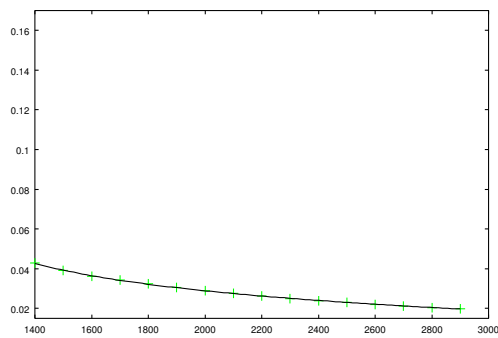
L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較



(a) L^2 ノルム相対誤差



(b) $L^{1.5}$ ノルム相対誤差



(c) L^1 ノルム相対誤差

Fig. 5.6 相対誤差の非線形 fitting 結果

6 L^p ノルムによる差分法の対応付け

本章では、実際に L^p ノルムによる一次精度と二次精度の差分法の対応付けをしていく。

まずは、Lax–Friedrichs 法に対する二次精度差分法の対応表を用意した。Lax–Friedrichs 法は、600 分割から 400 分割ごとに 3000 分割までの数値計算データを用意し、それぞれの分割数の Lax–Friedrichs 法に対して各二次精度差分の 100 分割から 100 分割ごとに 3000 分割までの数値計算データと L^p ノルムを計算してみた。Table 6.1 ~ Table 6.9 の各表では、それぞれ Lax–Friedrichs 法のある分割数に対して二次精度差分の各分割数との L^p ノルムを計算してみて一番ノルムの計算値が小さかった分割数を対応する分割数として挙げている。なお、Fig. 6.1 ~ Fig. 6.3 では、Lax–Friedrichs 法のそれぞれの分割数に対して、Richtmyer 法の 100 分割から 3000 分割までの各データとの L^p ノルムの値をグラフにまとめた（ただし、各グラフは Lax–Friedrichs 法 600 分割に対する L^p ノルムの値のグラフは割愛した。なお、Lax–Friedrichs 法は L.F. 法、Richtmyer 法は Ric 法と表記した）。

6.1 L^2 ノルムによる対応付け

始めに、 L^2 ノルムによる対応付けを見てみる (Table 6.1 ~ Table 6.3、Fig. 6.1 参照)。Table 6.1 ~ Table 6.3 の各表を見てみると、Lax–Friedrichs 法に対して二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法の前進差分と後退差分の L^2 ノルムの計算値や減衰の傾向はほぼ同じであることが分かる。MacCormack 法の前進差分のみ他の二次精度の差分よりも若干 L^2 ノルムの計算値が小さいことも分かる。しかし、いずれの二次精度差分との対応付けにおいても Lax–Friedrichs 法の 1400 分割や 1800 分割より多い分割数に対応するのは、どの二次精度差分でも、本研究で用意した最大の分割数である 3000 分割に対応している。これは、一次精度差分はより分割数の低い二次精度差分に対応するという当初の予想に大きく沿わないものとなってしまった。たとえば、Table 6.1 より、これは Lax–Friedrichs 法 1400 分割や 1800 分割に対応する、つまり L^2 ノルムの計算値が最も小くなる近似解曲線が、Richtmyer 法 3000 分割の近似解曲線になるということを表している。従来の短時間計算においては Richtmyer 法は Lax–Friedrichs 法よりも精度がよいのに、長時間計算においては、より精度の低い Lax–Friedrichs 法に対して二倍以上の分割数で対応しているというのである。これはにわかには考えがたいことである。Lax–Friedrichs 法の 600 分割や 1000 分割に対しては、いずれの二次精度差分もそれぞれ 400 分割、700 分割に対応している。しかし、もともと Lax–Friedrichs 法の 600 分割などの荒い精度のデータに対する対応はあまり意味があるものではないと考えられる。

これらのことをまとめて考え、 L^2 ノルムによる一次精度と二次精度の差分法の対応付けはできないのではないかという結論に至った。

6.2 $L^{1.5}$ ノルムによる対応付け

次に、 $L^{1.5}$ ノルムによる対応付けをしてみる (Table 6.4 ~ Table 6.6、Fig. 6.2 参照)。Table 6.4 ~ Table 6.6 の各表をしてみると、やはり L^2 ノルムと同じ傾向にあると考えることができる。この $L^{1.5}$ ノルムにおいても L^2 ノルム同様に、Lax–Friedrichs 法に対して二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法の前進差分と後退差分の $L^{1.5}$ ノルムの計算値や減衰の傾向はほぼ同じであることが分かり、Fig. 6.2 から、減衰の傾向が L^2 ノルムのそれと同じ傾向にあることが見て取ることができる。そして、対応する分割数も L^2 ノルムの場合に得られた対応とほぼ同様のものだった。

以上のことから、この $L^{1.5}$ ノルムにおいても一次精度と二次精度の差分法の対応付けはできないのではないかという結論に至った。

6.3 L^1 ノルムによる対応付け

最後に、 L^1 ノルムによる対応付けをしてみる (Table 6.7 ~ Table 6.9、Fig. 6.3 参照)。Table 6.7 ~ Table 6.9 の各表をしてみると、やはり L^2 ノルム、 $L^{1.5}$ ノルムと同じ傾向にあると考えることができる。この $L^{1.5}$ ノルムにおいても L^2 ノルムなどと同様に、Lax–Friedrichs 法に対して二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法の前進差分と後退差分の L^1 ノルムの計算値や減衰の傾向はほぼ同じであることが分かり、Fig. 6.3 から、減衰の傾向が L^2 ノルムのそれと同じ傾向にあることが見て取ることができる。しかし、この L^1 ノルムには本研究で用いた他の L^p ノルムとは違う点がある。それは、対応する分割数が他の L^p ノルムと異なり、Lax–Friedrichs 法 1400 分割以上では、いずれの二次精度差分もそれぞれ Lax–Friedrichs 法と同じ分割数で対応しているということである。なぜ L^1 ノルム (つまり、比較する 2 本の近似解の囲む面積) での比較ではこのような結果が得られたのか具体的な原因の究明はしていないが、言えることは、やはり本研究で用いた 3 種類のノルムの中ではこの L^1 ノルムが最も適しているのではないかということである。しかし、だからと言ってこの L^1 ノルムが振動を含む近似解などの比較に用いることができるかという、そうとは決して言えない対応付けの結果である。

6.4 L^p ノルムによる対応付けの評価

以上の結果から、本研究で用いた 3 種類の L^p ノルムは、おそらく二次精度差分などに見られる振動部分の影響を少なからず受けており、振動を含む近似解などの比較には用いることが出来ないと結論付ける。

分割数 (A)	対応する分割数 (B)	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	1.106904×10^{-2}	1.107038×10^{-2}
1000	700	8.921366×10^{-3}	8.924604×10^{-3}
1400	3000	7.531635×10^{-3}	7.532040×10^{-3}
1800	3000	6.514460×10^{-3}	6.514843×10^{-3}
2200	3000	5.835264×10^{-3}	5.835634×10^{-3}
2600	3000	5.344136×10^{-3}	5.344470×10^{-3}
3000	3000	4.969005×10^{-3}	4.969355×10^{-3}

Table 6.1 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (B) Richtmyer 法 の L^2 ノルムによる対応付け

分割数 (A)	対応する分割数 (C)	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	1.050992×10^{-2}	1.051097×10^{-2}
1000	700	8.561477×10^{-3}	8.564546×10^{-3}
1400	700	7.373695×10^{-3}	7.377657×10^{-3}
1800	3000	6.406966×10^{-3}	6.407362×10^{-3}
2200	3000	5.716179×10^{-3}	5.716563×10^{-3}
2600	3000	5.215003×10^{-3}	5.215357×10^{-3}
3000	3000	4.830283×10^{-3}	4.830648×10^{-3}

Table 6.2 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (C) MacCormack 法 (前進差分) の L^2 ノルムによる対応付け

分割数 (A)	対応する分割数 (D)	L^2 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^2 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	1.106086×10^{-2}	1.106220×10^{-2}
1000	700	8.915602×10^{-3}	8.918848×10^{-3}
1400	3000	7.529914×10^{-3}	7.530321×10^{-3}
1800	3000	6.512489×10^{-3}	6.512874×10^{-3}
2200	3000	5.833089×10^{-3}	5.833461×10^{-3}
2600	3000	5.341787×10^{-3}	5.342123×10^{-3}
3000	3000	4.966495×10^{-3}	4.966847×10^{-3}

Table 6.3 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (D) MacCormack 法 (後退差分) の L^2 ノルムによる対応付け

L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較

分割数 (A)	対応する分割数 (B)	$L^{1.5}$ ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^{1.5} \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	8.484386×10^{-3}	8.484633×10^{-3}
1000	700	6.216296×10^{-3}	6.217014×10^{-3}
1400	3000	4.883292×10^{-3}	4.883369×10^{-3}
1800	3000	3.986606×10^{-3}	3.986673×10^{-3}
2200	3000	3.408005×10^{-3}	3.408066×10^{-3}
2600	3000	3.001542×10^{-3}	3.001596×10^{-3}
3000	3000	2.692169×10^{-3}	2.692222×10^{-3}

Table 6.4 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (B) Richtmyer 法の $L^{1.5}$ ノルムによる対応付け

分割数 (A)	対応する分割数 (C)	$L^{1.5}$ ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^{1.5} \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	8.190724×10^{-3}	8.190945×10^{-3}
1000	700	6.021195×10^{-3}	6.021942×10^{-3}
1400	3000	4.854717×10^{-3}	4.854796×10^{-3}
1800	3000	3.955405×10^{-3}	3.955475×10^{-3}
2200	3000	3.374497×10^{-3}	3.374561×10^{-3}
2600	3000	2.966020×10^{-3}	2.966078×10^{-3}
3000	3000	2.654615×10^{-3}	2.654673×10^{-3}

Table 6.5 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (C) MacCormack 法 (前進差分) の $L^{1.5}$ ノルムによる対応付け

分割数 (A)	対応する分割数 (D)	$L^{1.5}$ ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^{1.5} \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	8.480335×10^{-3}	8.480583×10^{-3}
1000	700	6.213262×10^{-3}	6.213984×10^{-3}
1400	3000	4.882770×10^{-3}	4.882847×10^{-3}
1800	3000	3.986036×10^{-3}	3.986103×10^{-3}
2200	3000	3.407395×10^{-3}	3.407456×10^{-3}
2600	3000	3.000897×10^{-3}	3.000951×10^{-3}
3000	3000	2.691489×10^{-3}	2.691543×10^{-3}

Table 6.6 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (D) MacCormack 法 (後退差分) の $L^{1.5}$ ノルムによる対応付け

分割数 (A)	対応する分割数 (B)	L^1 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^1 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	6.173706×10^{-3}	6.173709×10^{-3}
1000	700	4.042476×10^{-3}	4.042510×10^{-3}
1400	1400	2.919334×10^{-3}	2.919337×10^{-3}
1800	1800	2.240475×10^{-3}	2.240476×10^{-3}
2200	2200	1.816976×10^{-3}	1.816977×10^{-3}
2600	2600	1.528022×10^{-3}	1.528022×10^{-3}
3000	3000	1.313772×10^{-3}	1.313772×10^{-3}

Table 6.7 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (B) Richtmyer 法 の L^1 ノルムによる対応付け

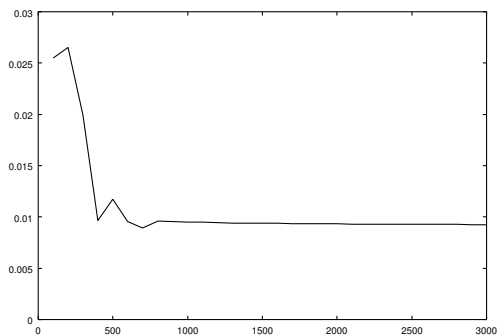
分割数 (A)	対応する分割数 (C)	L^1 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^1 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	6.067723×10^{-3}	6.067726×10^{-3}
1000	700	3.960275×10^{-3}	3.960312×10^{-3}
1400	1400	2.917775×10^{-3}	2.917780×10^{-3}
1800	1800	2.238960×10^{-3}	2.238962×10^{-3}
2200	2200	1.815962×10^{-3}	1.815963×10^{-3}
2600	2600	1.526992×10^{-3}	1.526993×10^{-3}
3000	3000	1.312828×10^{-3}	1.312828×10^{-3}

Table 6.8 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (C) MacCormack 法 (前進差分) の L^1 ノルムによる対応付け

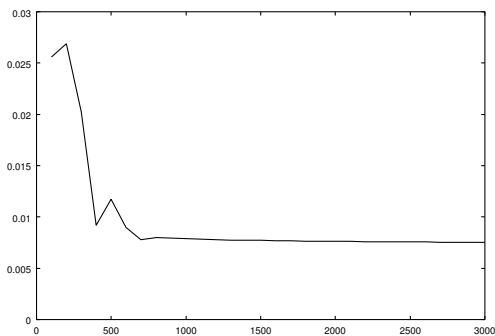
分割数 (A)	対応する分割数 (D)	L^1 ノルムの値の平均値	$\sqrt{(L^1 \text{ ノルムの値})^2}$ の平均値
600	400	6.172539×10^{-3}	6.172542×10^{-3}
1000	700	4.041285×10^{-3}	4.041319×10^{-3}
1400	1400	2.919334×10^{-3}	2.919337×10^{-3}
1800	1800	2.240464×10^{-3}	2.240465×10^{-3}
2200	2200	1.816961×10^{-3}	1.816962×10^{-3}
2600	2600	1.527989×10^{-3}	1.527989×10^{-3}
3000	3000	1.313753×10^{-3}	1.313753×10^{-3}

Table 6.9 (A) Lax–Friedrichs 法 対 (D) MacCormack 法 (後退差分) の L^1 ノルムによる対応付け

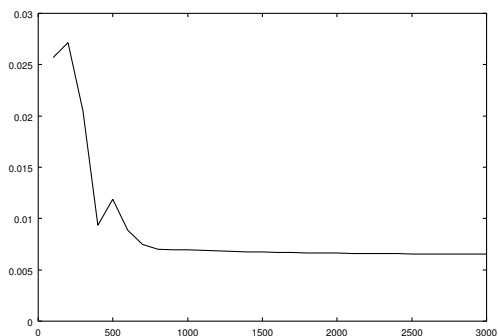
L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較



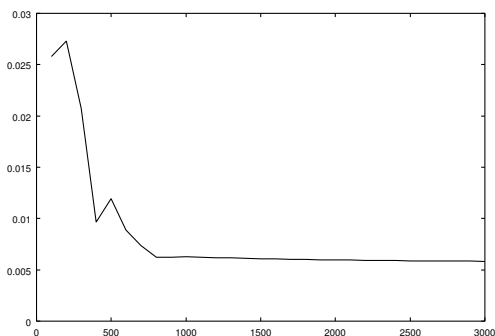
(a)L.F. 法 (1000 分割) 対 Ric 法



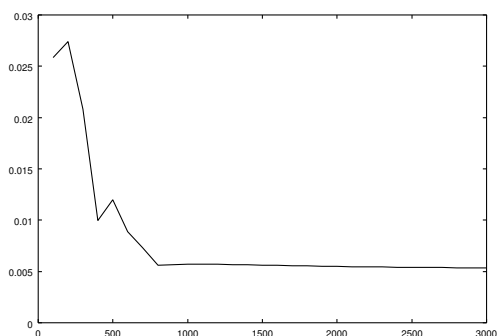
(b)L.F. 法 (1400 分割) 対 Ric 法



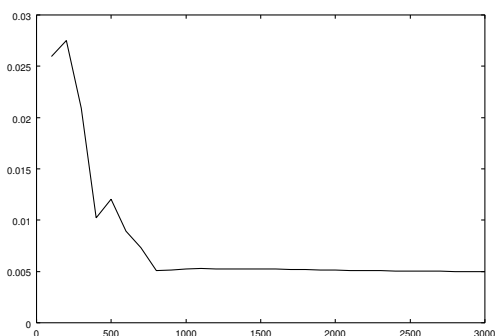
(c)L.F. 法 (1800 分割) 対 Ric 法



(d)L.F. 法 (2200 分割) 対 Ric 法

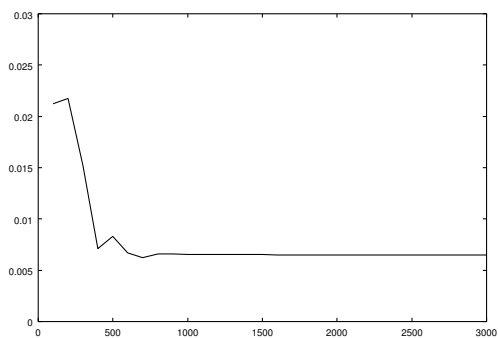


(e)L.F. 法 (2600 分割) 対 Ric 法

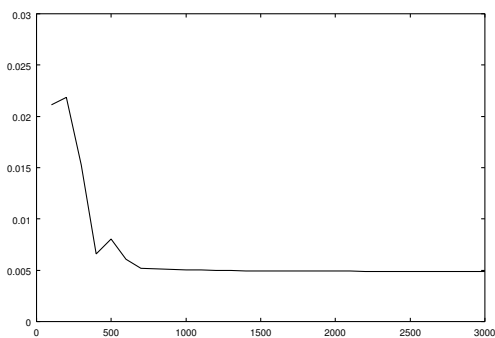


(f)L.F. 法 (3000 分割) 対 Ric 法

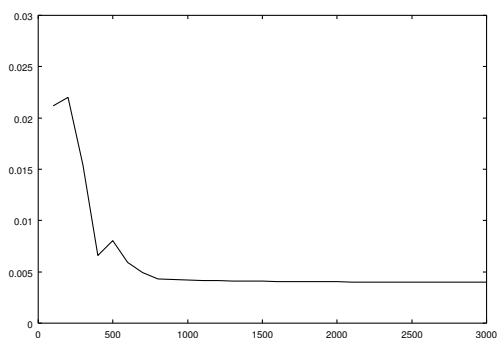
Fig. 6.1 L.F. 法 対 Ric 法 (100 ~ 3000 分割) の L^2 ノルムによる計算



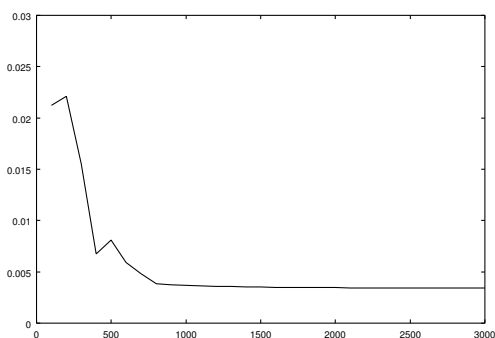
(a)L.F. 法 (1000 分割) 対 Ric 法



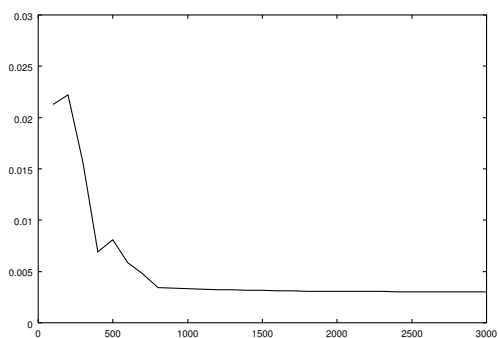
(b)L.F. 法 (1400 分割) 対 Ric 法



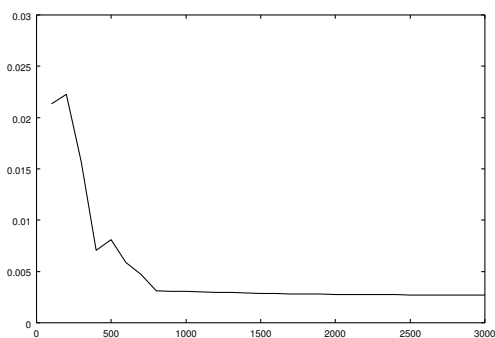
(c)L.F. 法 (1800 分割) 対 Ric 法



(d)L.F. 法 (2200 分割) 対 Ric 法



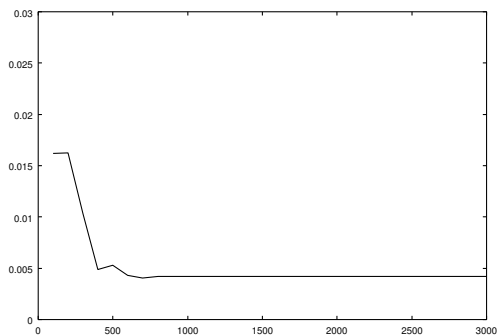
(e)L.F. 法 (2600 分割) 対 Ric 法



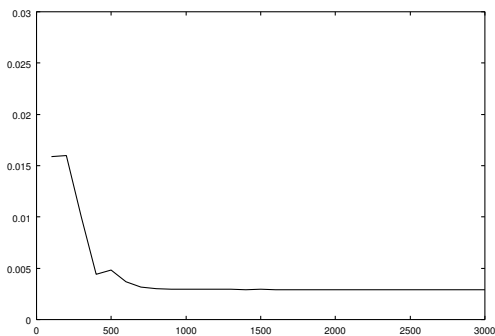
(f)L.F. 法 (3000 分割) 対 Ric 法

Fig. 6.2 L.F. 法 対 Ric 法 (100 ~ 3000 分割) の $L^{1.5}$ ノルムによる計算

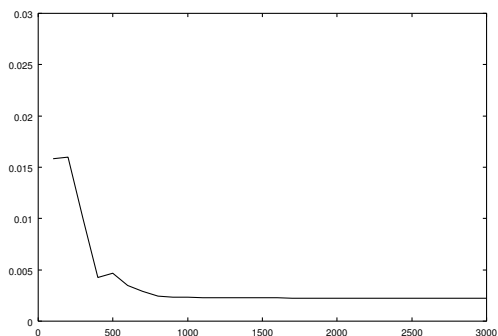
L^p ノルムによる非粘性バーガス方程式の差分法の比較



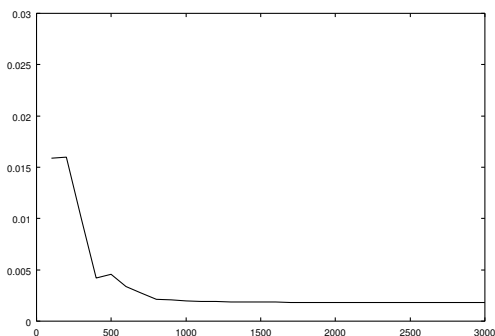
(a)L.F. 法 (1000 分割) 対 Ric 法



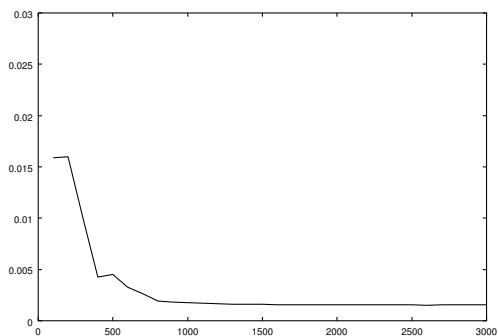
(b)L.F. 法 (1400 分割) 対 Ric 法



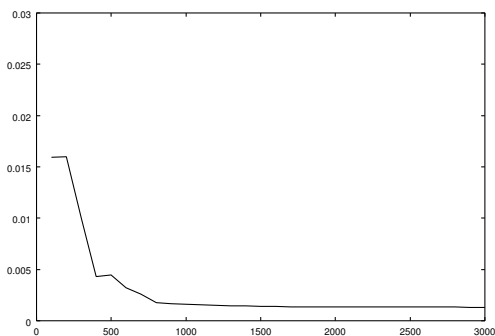
(c)L.F. 法 (1800 分割) 対 Ric 法



(d)L.F. 法 (2200 分割) 対 Ric 法



(e)L.F. 法 (2600 分割) 対 Ric 法



(f)L.F. 法 (3000 分割) 対 Ric 法

Fig. 6.3 L.F. 法 対 Ric 法 (100 ~ 3000 分割) の L^1 ノルムによる計算

7 あとがき

本研究では、非粘性 Burgers 方程式に対して、一次精度の Lax–Friedrichs 法、二次精度の Richtmyer 法、MacCormack 法の前進差分と後退差分の 4 種類で長時間計算を行い、それらの数値計算結果から、近似解の振動部分の L^p ノルムへの影響を検討し、実際に一次精度差分と二次精度差分の比較を行った。

L^2 ノルムへの振動の影響の検討では、おそらく L^2 ノルムは二次精度差分の近似解などに見ることができる振動部分の影響を受けるのではないかという考えに至った。他の L^1 ノルムや $L^{1.5}$ ノルムにおいても、もともと尺度が違うので絶対的な比較はできないが、 L^2 ノルムにおいての結果とおおよそ同じ結果が得られた。ただし、この 3 つのノルムの中では L^1 ノルムがもっとも比較に用いる方法に適していると判断した。

L^p ノルムへの振動の影響検討で、おそらくこの L^p ノルムは、振動を含む近似解などの比較には適性はなく用いることができないのではないかという結論に至った。これは、 L^p ノルムによる実験からおそらく近似解の振動部分の影響を受けているであろうこと、当初考えていた二次精度差分は一次精度差分よりも少ない分割数で対応するという予測に沿わない結果であったことよりそう考えられた。この実験で L^p ノルムが振動を含む近似解の比較に用いることができないということが明らかになった。

L^p ノルムが振動を含む近似解の比較に用いることができないということで、本研究では一次精度差分と二次精度差分の対応付けにはいたらなかった。

今後の課題としては、本研究で L^p ノルムが振動を含む近似解の比較に用いることができないということが明らかになったので、渡邊氏が研究で提案した比較方法の中にもしかすると適性のあるものがある可能性が出てきた。または、これまでとは全くことなる方法を提案したり他の比較方法を試してみる必要がある。また、本研究では取り扱わなかったが、 $p > 2$ の L^p ノルムでの比較も行ってみたいということも考えられる。もしくは、例えば振動部分などの影響を受ける比較方法であっても、近似解などの振動部分以外で比較検討するという手段も考えられる。

参考文献

- [1] 大川戸 太郎：“周期外力を持つ非粘性バーガス方程式の倍周期解の自動判別法”、新潟工科大学卒業論文、pp1-25(1998)
- [2] 木原 涼子：“非粘性バーガス方程式の大きい時間幅に対する数値計算”、新潟工科大学卒業論文、pp1-32(1999)
- [3] 渡邊 伸征：“衝撃波による非粘性バーガス方程式の差分法の比較”、新潟工科大学卒業論文、pp1-35(2000)
- [4] キーポイント偏微分方程式 河村哲也著 岩波書店
- [5] 偏微分方程式の差分解法 河村哲也著 東京大学出版会
- [6] 流れの数値シミュレーション 日本機械学会
- [7] 応用偏微分方程式 河村哲也著 共立出版