交通流の流体モデルにおける信号の考察とその数値解析

平成 12 年 2 月 15 日

情報電子工学科 竹野研究室
鈴木 保弘

目 次

1 はじめに **1**

2 車の保存則 **1**

2.1 速度と速度場 1

2.2 交通量と交通密度 2

2.3 ３つの基本的交通変数 3

2.4 交通密度と車の台数の関係 4

2.5 車の数の保存 5

2.6 速度と密度の関係 6

2.7 交通量と密度の関係 7

3 さまざまな交通流への影響 **8**

3.1 車の停止距離 8

3.2 摩擦による影響 9

3.3 坂道による影響と角度の条件 11

4 信号問題の取り扱い **13**

4.1 青信号での境界条件 13

4.2 赤信号での境界条件 14

4.3 最高速度の設定 14

5 差分近似解 **15**

5.1 Lax-Friedrichs の差分近似 15

5.2 Lax-Friedrichs の差分の保存性 18

5.3 保存性を利用した赤信号付近での計算 19

6 実験と考察 **24**

6.1 信号がない場合 24

6.2 実際の道路での信号の特徴 25

6.3 平坦な道で信号を取り入れた場合 27

6.4 信号の時間間隔を変えた場合 28

6.5 坂道で信号を取り入れた場合 32

7 まとめ **36**

参考文献 **37**

概要

交通流の流体モデルにおける信号の考察を行なう。本稿で扱う流体モデルとは、交通流に対する理論的な取り扱いをマクロな立場からとらえるモデルである。本稿では、速度と密度の関係式について、車間距離を車の停止距離とみなしたモデルを採用し、そこに、信号を取り入れるための、境界条件を考察した。そして、その条件を Lax-Friedrichs の差分法で、計算するための適切な計算方法を構成することにより、そのモデルに信号問題を取り入れることを実現した。さまざまな道路条件を設定し、実験を行ない、赤信号では渋滞を引き起こし、青信号では渋滞が解消され、実際の現象に対応していることが、確認された。さらに、坂道の影響よりも赤信号の影響力のほうが、はるかに大きいという結果が出たので、それについて紹介する。

1　はじめに

交通混雑は、近年特に激しくなっている。現在の交通問題としては、より進んだ交通信号システムをどう開発すべきか、出入口や高架をどこに設置すべきかなどさまざまな問題がある。交通流に対する理論的な取り扱いの一つにマクロな立場から交通流をとらえる流体力学的なものがある。本稿では、交通問題の数学的理論を述べるとともに、交通流のモデルとして、車の停止距離から導かれる流体モデルを考え、坂道の影響によっての交通流の変化を考察した西田 [1)] を基に、さらに交通信号の条件を加えて交通流がどのように変化するかを考察する。

第 2 章では、基本的な語句の説明と保存則方程式について述べる。交通問題を考える際に大切な語句は、速度、密度、交通量である。それらの 3 つの要素を時間や位置で偏微分したものが、車の流れの保存則方程式として表される。第 3 章では、さまざまな交通流への影響について考察していく。坂道の影響を考える上で、傾斜角度には条件があることなどを述べる。第 4 章では、信号問題の取り扱いとして、青、赤信号の境界条件について述べる。赤信号の右側では、密度がなくなる状態が起こる。そのときに、速度と密度の関係より、速度が無限大となってしまう。そこで、密度が低いときは修正が必要になるが、その修正のための最高速度の設定について述べる。第 5 章では、Lax-Friedrichs の差分法を説明し、さらに、信号を取り入れた差分計算方法について述べる。第 6 章では、第 5 章に基づいた計算方法で数値計算を行ない、さまざまな状況での数値計算の結果について紹介する。

2　車の保存則

2.1　速度と速度場

高速道路を走っている車の流れを考える。時刻が t であるとき、車の位置 x が $x_0(t)$ で表されるなら速度は $dx_0(t)/dt$ で加速度は $d^2x_0(t)/dt^2$ であることがいえる。多くの車が走っている高速道路では図 2.1 に示されるようにそれぞれの位置を $x_i(t)(i = 1, 2, 3, \dots)$ で表す。

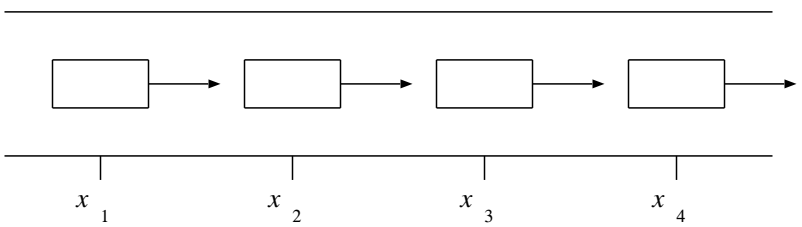


Fig. 2.1　x_i で示される車の位置

速度を測るのには 2 つの方法がある。 1 つの方法は個々の車の速度 $v_i(t)$、 すなわち $v_i = dx_i(t)/dt$ を測ることである。しかし、N 台の車の場合には、それぞれの車が異なった速度 $v_i(t)(i = 1, 2, 3, ..., N)$ を持つため、車の数が多すぎると、個々の車を追って速度を測ることは困難となる。もう 1 つの方法として、空間の各点、各時刻に対して速度場と呼ばれるただ 1 つの速度 $v(x, t)$ を考える方法がある。

図 2.1 で車の中心を車の位置とする。位置 x_1 にいる観測者によって時刻 t_1 で測定された速度は $v(x_1, t_1)$ で表される。また、同時刻で位置 x_2 で測定された速度は $v(x_2, t_1)$ で表される。さらに、位置 x_1、 時刻 t_2 で測定された速度は $v(x_1, t_2)$ で表される。このように、位置 x_i、時刻 t_j での速度 $v(x_i, t_j)$ は、その場所 x_i にいる車の速度のことを表す。このことから i 番目の車の位置 $x_i(t_j)$ における速度場 $v(x_i(t_j), t_j)$ は、その車の速度 $v_i(t_j)$ でなければならないから、

$$v(x_i(t_j), t_j) = v_i(t_j) \tag{2.1}$$

が成り立つ。速度場 $v(x, t)$ の存在は、各 x, t において 1 つだけ速度が存在していることを意味する。したがってこの研究では車の追い越しは考えない。その理由は追い越しの時点で車が横に 2 台並んでしまい、その場所に 2 つの異なる速度が存在してしまうからである。なお、流体モデルでは、速度場を採用する。

2.2 交通量と交通密度

高速道路上である位置にとまっている観測者は、単位時間内に通過する車の数を測定できる。例えば具体的に、観測者はその測定結果から、一時間に通過する車の平均台数を計算できる。この量を交通量といい q で表す。交通量 q は位置 x、時間 t に依存しているから交通量 q を $q(x, t)$ と書くことができる。

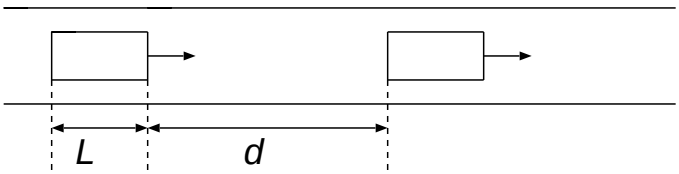


Fig. 2.2 車の密度

交通量では固定された位置で考察したのに対して、固定された時間に、与えられた領域内の車の台数を測定すると交通密度を求めることができる。領域内に完全に入らない車は、車の中心が領域に入った時にカウントするなど何か決まった方法をとる。これらの測定から、単位長さ当りの道路上の車の数がわかる。その量を車の密度といい ρ で表す。車体の長さを L 、車間距離を d とすると車の密度は、

$$\rho = \frac{1}{L+d} \tag{2.2}$$

である。

2.3　3 つの基本的交通変数

これまでは、3 つの基本的交通変数である速度、密度、交通量について簡単に述べてきた。これらの 3 変数の関係についてここで示していく。ある道路で交通が定速 v_0 、定密度 ρ_0 で動いているものとする。各々の車は同じ速さで動いているから、車間距離は一定を保っている。したがって交通密度は変化しないことになる。ここでの車の交通量を調べるために通過する車の数を測定している観測者を考える。車は一定速度で動いているため、移動距離は (速度 $\times$ 時間) であるから、ある時間 T の間に各車は距離 v_0T だけ動く。したがって時間 T の間に観測者を通過する車の数は距離 v_0T にいる車の数に等しいことがわかる。図 2.3 に定速 v_0 で動いている車が時間 T に進む距離を示す。

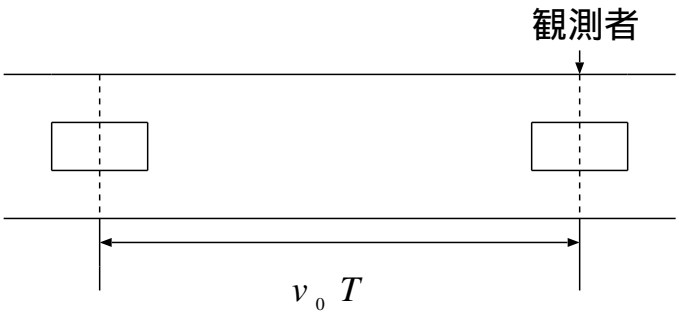


Fig. 2.3　定速 v_0 で動いている車が時間 T に進む距離

ρ_0 をある単位長さ当たりの車の数とすると、ここでの距離は v_0T だから時間 T の間に観測者を通過する車の数はこれらを掛けた $\rho_0 v_0 T$ である。したがって、その単位時間あたりの交通量は、

$$q = \rho_0 v_0 \tag{2.3}$$

となる。これは単純化された場合から引き出されたものだが、一般的に、

$$\text{交通量} = (\text{交通密度}) \times (\text{速度})$$

が成り立つ。3 つの交通変数は x と t に依存しているので、

$$q(x,t) = \rho(x,t)v(x,t) \tag{2.4}$$

と表される。

2.4 交通密度と車の台数の関係

ここでは、次節で述べる、道路上のある区間における車の数と、交通密度の積分との関係について説明する。

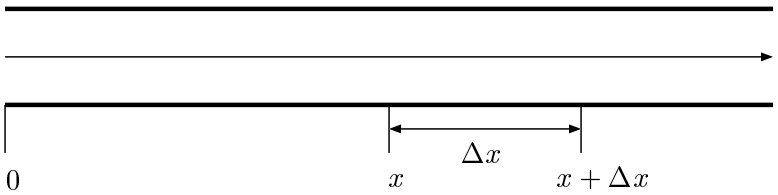


Fig. 2.4 説明図

図 2.4 をもとに考える。$N(x)$ を位置 0 から x までの車の台数とする。図 2.4 において、位置 x での交通密度 $\rho(x)$ は、区間 x と $(x+\Delta x)$ の間に存在する車の台数 $(N(x+\Delta x)-N(x))$ と Δx との比について、幅 Δx を限りなく小さくしたものと考えればよいので、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{N(x+\Delta x) - N(x)}{\Delta x} = \rho(x) \tag{2.5}$$

となる。これは、導関数の定義より、

$$N'(x) = \rho(x) \tag{2.6}$$

となる。以上のことより、区間 $[a,b]$ の交通密度がわかっている場合その区間の車の台数は、

$$\int_a^b \rho(x)dx = \int_a^b N'(x)dx = [N(x)]_a^b = N(b) - N(a) \tag{2.7}$$

と求めることができ、交通密度の積分が車の台数になることがわかる。

ここでの考えは区間 (距離) を限りなく小さくする方法をとっているが、車自体はある程度の大きさがあるために現実と違いがあるといえる。このように、マクロ的に考えることが流体モデルの特徴である。

2.5 車の数の保存

図 2.5 に示すような道路上の $x = a$ と $x = b$ の間の区間における車の数 N は、前節より

$$N = \int_a^b \rho(x,t)dx \tag{2.8}$$

と表すことができる。たとえ、この道路上に入口も出口もないとしても、$x = a$ と $x = b$ の間にいる車の数はやはり時間と共に変化する。その車の数は車が $x = b$ で領域から去っていくことで減少し、$x = a$ で領域に入ってくることで増加する。

Fig. 2.5 道路の区間における車の出入り

区間の中で車が生成したり消滅したりしないと仮定すれば、車の数の変化は $x = a$ と $x = b$ を横切る車の数のみで決まる。例えば、$x = a$ において 1 時間当り 300 台の割合で車が流入し、$x = b$ で 1 時間当り 280 台の割合で流出するとすれば、$x = a$ と $x = b$ の間にいる車の数は 1 時間当り 20 台の割合で増加する。各境界を横切る車の数 (交通量 $q(a,t), q(b,t)$) が時間に対して一定でないならば、車の数の変化率 dN/dt は、単位時間に $x = a$ を右へ横切る車の数から $x = b$ をやはり右へ横切る車の数を引いたものに等しい。単位時間あたりの車の通過した数は交通量 $q(x,t)$ に等しいから、

$$\frac{dN}{dt} = q(a,t) - q(b,t) \tag{2.9}$$

となる。よって、式 (2.8), 式 (2.9) より次の式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = q(a,t) - q(b,t) \tag{2.10}$$

車は生成も消滅もしないから車の数は保存される。しかし、このことは、$x = a$ と $x = b$ の間にいる車の数が一定であることを意味しているわけではない。もしそうなら、$q(a,t) = q(b,t)$ となり、式 (2.10) の右辺が 0 となってしまう。式 (2.10) を積分保存則と呼ばれ、この法則は有限の長さをもつ道路 $a \le x \le b$ 上の交通流の性質を表している。

積分保存則は、道路の各点での局所的保存則としても表現される。道路の端点 $x = a$ と $x = b$ は任意の独立変数と考える。式 (2.10) は $x = a, x = b$ が時間について固定されているとの仮定のもと得られたのだから、式 (2.10) における時間に関する導関数は偏導関数に置き換える必要がある。さらに、x を y に、b は道路上の任意の位置を示すものだから、 b を x にそれぞれ置き換えて x について偏微分すると、次の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x \rho(y,t)dy = \frac{\partial}{\partial x}\{q(a,t) - q(x,t)\} \tag{2.11}$$

ここで、偏微分の順序は入れ換えることができるので、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \rho(y,t)dy = \frac{\partial}{\partial x}\{q(a,t) - q(x,t)\} \tag{2.12}$$

この式を計算して、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t) \tag{2.13}$$

が得られる。この式と式 (2.4) より、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{2.14}$$

が得られる。 この式は、車の保存則は交通密度と速度に関する偏微分方程式として書かれることを示している。

2.6 速度と密度の関係

２つの変数である交通密度と車の速度はただ１つの方程式である車の保存則方程式 (2.14) で関係づけられている。

Lighthill と Whitham は道路上の任意の点で車の速度は車の密度のみに依存するという

$$v = v(\rho) \tag{2.15}$$

というモデルを提唱した [3)]。

高速道路上に他の車がいないような、大変低い交通密度の状況なら、その車は最大速度で走行することができると考えることができる。これは、次式のように表すことができる。

$$v(0) = v_{max} \tag{2.16}$$

しかし、ある長さの区間で、もっと多くの車がいるようになると密度が増えてくるとになり、ついには他の車の存在が車の速度を落とすことになる。密度がさらに増すにつれ、車の速度は減少し続ける。こうして

$$\frac{dv}{d\rho} = v'(\rho) \leq 0 \tag{2.17}$$

となる。そして、最大密度 ρ_{max} になると車は停止してしまい、次式のように表すことができる。

$$v(\rho_{max}) = 0 \tag{2.18}$$

以上のことは例えば図 2.6 のように示される。この曲線は車の速度は交通密度の増加に従って減少することを意味している。また、このことは、式 (2.17) で傾き $v'(\rho)$ が負になることからわかる。

しかしながら、速度の密度に対する依存の仕方は、すべての道路条件に対して同じとはいえない。さらにこの関係は、位置や時間にも依存しているかもしれない。

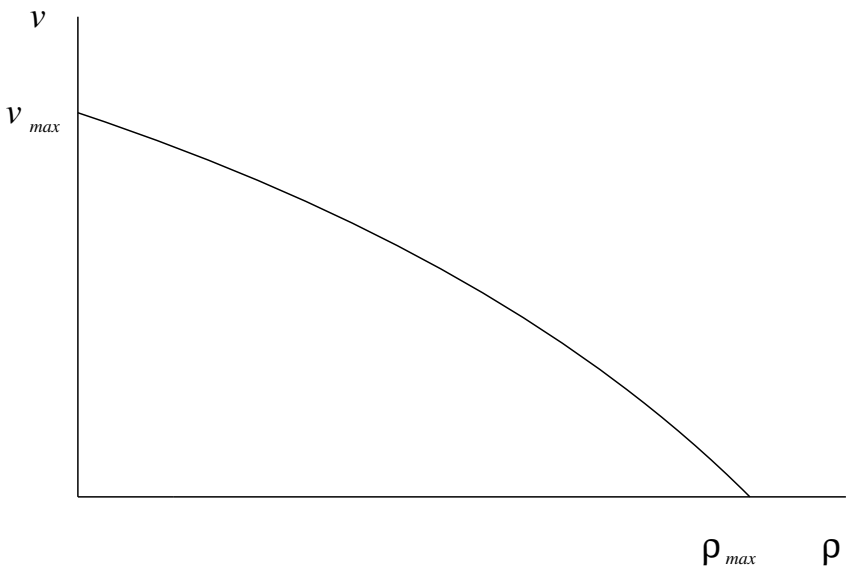


Fig. 2.6 車の速度 v と交通密度 ρ の関係

2.7 交通量と密度の関係

与えられた道路上において、現実的に交通量はできるだけ多いほうが理想である。

交通量は (密度)×(速度) であるから、2.5 節のモデルでは交通量もまた密度のみに依存している。

$$q = \rho v(\rho) \tag{2.19}$$

なお、交通量は次の 2 つの場合に 0 となる。

- 交通がない場合 $(\rho = 0)$
- 交通が動かない場合 $(v = 0$ すなわち $\rho = \rho_{max})$

密度の $(0 < \rho < \rho_{max})$ 値に対しては交通量は正でなければならない。したがって一般的に交通量の密度への依存は例として図 2.7 のように示される。これによれば、交通量の最大はある密度で起こり、この図で極大のときである。最大交通量をその道路の容量とよぶ。

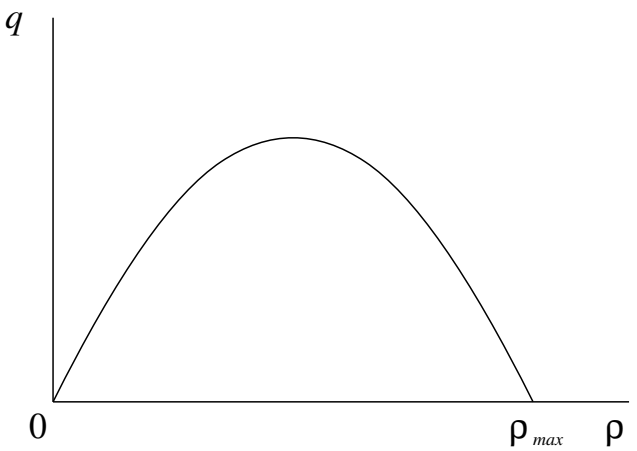


Fig. 2.7 交通量と密度の関係の基本図

3 さまざまな交通流への影響

3.1 車の停止距離

本研究では西田 [1] と同じ、停止距離によるモデルを使用する。

ここでは、再び密度に着目し、密度を定義した式 (2.2) を考える。この式で、車の長さ L は定数とするため、車間距離 d によってのみ密度は変化する。この車間距離を停止距離と考え、停止距離について説明する。

停止距離とは、空走距離と制動距離を足したものである。

$$(\text{空走距離}) + (\text{制動距離}) = (\text{停止距離})$$

また、空走距離と制動距離とは次のとおりである。

- 空走距離 ‥ 運転者が危険を感じてからブレーキを踏み、ブレーキが実際にきき始めるまでの間に車が走る距離
- 制動距離 ‥ ブレーキがきき始めてから車が停止するまでの距離

3.2 摩擦による影響

停止距離をより深く考えるためには、摩擦の影響と空走距離に要した反応時間を考慮するべきである。まず、この研究における ' 摩擦' というものは道路の路面とタイヤの表面との間に起こるもので、かつ、タイヤは回転せず、ロックした状態で滑っていくものと考えなければいけない。下図に摩擦係数を示すが、これは以上のような状況での摩擦係数であるとする。

速度 [km/h]	20	30	40	50	60	70	80	90	100
摩擦係数	0.60	0.59	0.58	0.55	0.53	0.50	0.47	0.47	0.47

ここでは、摩擦係数を比例定数 μ として扱うために、平均を採用して $\mu = 0.53$ とする。また、反応時間は、$t_0 = 1.0[s]$ [2] とする。

空走距離と制動距離について考える。

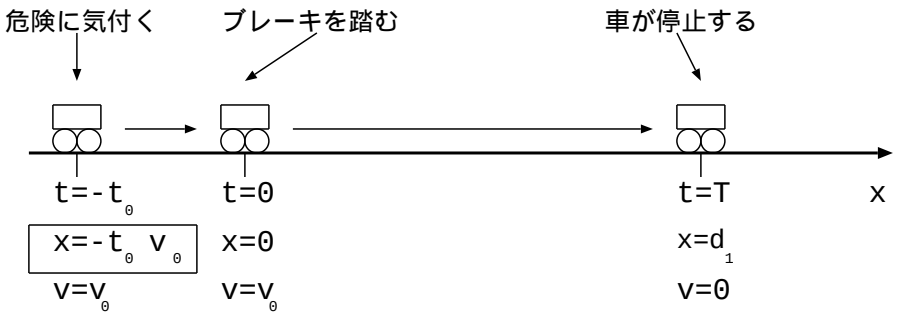


Fig. 3.1 初速度 v_0 の車が $x = \bar{d}$ で停止する

図 3.1 は運転者が危険に気付く位置、ブレーキを踏む位置、車が停止する位置のそれぞれの位置における t、x、v それぞれの値を示したものである。これを見れば、ブレーキを踏む位置からブレーキがきき始める位置までの速度は、初速度の v_0 であるから、空走距離は $t_0 v_0$ となることがわかる。

制動距離を d_1 として、停止距離 (車間距離) は、

$$d = t_0 v_0 + d_1 \tag{3.1}$$

と表すことができる。ニュートンの運動方程式より

$$ma = -\mu N = -\mu mg \tag{3.2}$$

この式より、加速度 a について求めると、

$$a = -\mu g \tag{3.3}$$

ここで $a = dv/dt$ よりブレーキを踏み始めてから車が停止する位置までの速度 $v(t)$ を求めると

$$v(t) = -\mu g t + C \quad (C：積分定数) \tag{3.4}$$

この式で $t = 0$ を代入すると、$v(0) = C$ であり、また図 3.1 より $v(0) = v_0$ がいえるので式 (3.4) は

$$v(t) = -\mu g t + v_0 \tag{3.5}$$

となる。次に、同様に $v = dx/dt$ より位置 $x(t)$ を求めると

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t + C \quad (C：積分定数) \tag{3.6}$$

ここで図 3.1 より $t = 0$、$x = 0$ を代入すると、$C = 0$ であるから式 (3.6) は

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t \tag{3.7}$$

と表すことができる。制動距離 d_1 を求めるために式 (3.7) に $x = d_1$、$t = T$ を代入して

$$d_1 = -\frac{1}{2}\mu g T^2 + v_0 T \tag{3.8}$$

式 (3.5) で $t = T$ のとき $v = 0$ だからこれらを代入して T は

$$T = \frac{v_0}{\mu g} \tag{3.9}$$

となり、これを式 (3.8) に代入して整理すると

$$d_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{3.10}$$

となる。式 (3.10) を式 (3.1) に代入することで

$$d = t_0 v_0 + \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{3.11}$$

となり、式 (3.11) に密度の定義式 (2.2) を代入して、整理すると、

$$\frac{1}{2\mu g} v_0^2 + t_0 v_0 - \frac{1}{\rho} + L = 0 \tag{3.12}$$

となり、 2 次方程式の解の公式より、v_0 を求めて整理すると

$$v_0 = -t_0 \mu g + \sqrt{t_0^2 \mu^2 g^2 + 2\mu g(\frac{1}{\rho} - L)} \quad (v > 0) \tag{3.13}$$

となる。

3.3 坂道による影響と角度の条件

坂道においてはどのような影響があるか、まずは図 3.2 の登り坂の場合を考える。

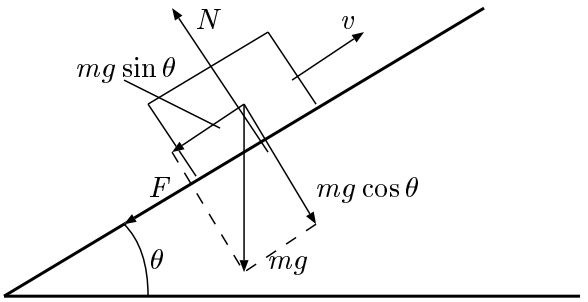


Fig. 3.2 登り坂

図 3.2 と、ニュートンの運動方程式より

$$ma = -F - mg\sin\theta \tag{3.14}$$

$$F = \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{3.15}$$

この 2 式より加速度 a を求めると

$$a = -g(\mu\cos\theta + \sin\theta) \tag{3.16}$$

となる。次に下り坂を考える。

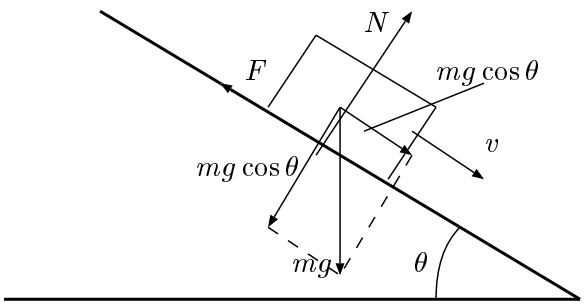


Fig. 3.3 下り坂

同様に図 3.3 と、ニュートンの運動方程式より

$$ma = -F + mg\sin\theta \tag{3.17}$$

$$F = \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{3.18}$$

$$a = -g(\mu\cos\theta - \sin\theta) \tag{3.19}$$

となる。この式は式 (3.16) で角度がマイナスになっていると考えたものに一致する。
角度 θ のときの加速度 a は式 (3.3) をもとに

$$a = -g(\mu\cos\theta + \sin\theta) \tag{3.20}$$

と表せられるので式 (3.13) で μ を $\mu\cos\theta + \sin\theta$ とおいて

$$\begin{aligned} v(\rho,\theta) &= -(\mu\cos\theta + \sin\theta)t_0 g \\ &\quad + \sqrt{(\mu\cos\theta + \sin\theta)^2 t_0^2 g^2 + 2g((\mu\cos\theta + \sin\theta)(\frac{1}{\rho} - L)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

が得られる。これにより、保存則方程式 (2.14) は、

$$\rho_t + q(\rho, \theta) = 0 \tag{3.22}$$

$$q(\rho, \theta) = \rho v(\rho, \theta) \quad \theta = \theta(x) \tag{3.23}$$

となり、道の形状を反映した交通流の流体モデルが得られる。

また、摩擦係数は正だから、式 (3.21) で $\mu\cos\theta + \sin\theta > 0$ となるように θ の条件を考える。$\mu = 0.53$ だから、

$$0.53\cos\theta + \sin\theta = 0 \tag{3.24}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \tan\theta &= -0.53 \\ \theta &= -27.92° \end{aligned} \tag{3.25}$$

となる。このとき、摩擦力と重力による力が同じくなり、ブレーキをかけても重力のため、止まらなくなる。つまり、停止距離が無限大 $(d = \infty)$ となる。

したがって $\theta = -27.92°$ より正に大きい傾斜角を考えなければいけない。

4　信号問題の取り扱い

交通流の流体モデル式 (3.22) における信号の取り扱いについて考察する。

4.1　青信号での境界条件

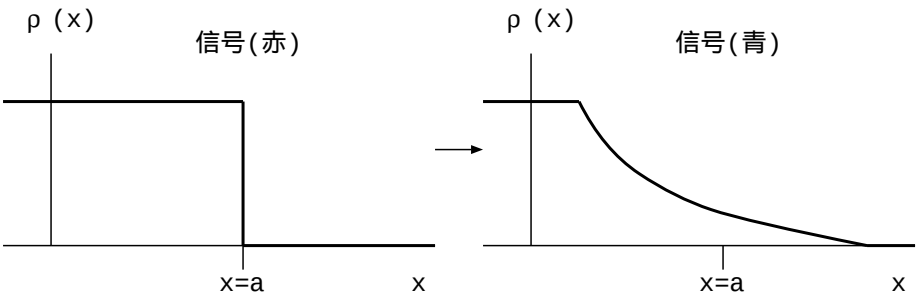


Fig. 4.1 信号が赤から青に変わったときの交通量の変化

図 4.1 において $x = a$ に信号があるとする。青信号においては、交通流に与える制約はなにもない。

実際の交通流を考えると、赤から青に変わったばかりの状態では信号の付近では交通量の変化があらわれるが、それ以後の変化は単に式 (3.22) によって交通流が推移し、何らかの制約を受けるわけではない。まして、青信号の境界での交通量の変化を仮定してしまうような条件をつけることは好ましくないといえる。

4.2 赤信号での境界条件

$x = a$ に信号があり、それが赤信号なら、その場所で車の流れは分断され、信号を超えて車が出入りすることはできない。よって、ここに不連続性が生じることになる。この状態は方程式 (3.22) のみによって決まるのではなく $x = a$ で流れに特定の条件を与えることによって決め、$x = a$ での条件を境界条件として与えることとする。

赤信号の位置では交通量 q は 0 となる。しかし、$q = 0$ といっても信号の前後では状態が異なる。図 4.2 で信号のすぐ右側では交通密度は $\rho = 0$ になるであろう。しかし、左側ではそうではない。それには交通が信号に達していないときと、すでに交通が信号に達しているときの 2 つの場合がある。

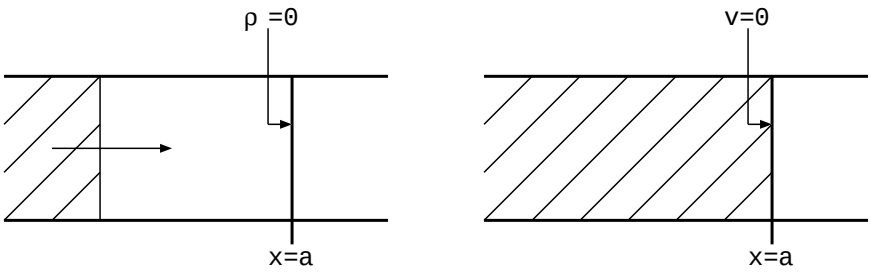


Fig. 4.2 赤信号のときの交通

$q = 0$ は $\rho = 0$ または $\rho = \rho_{max}$ $(v = 0)$ を意味するので、どちらの場合も確かに含んでいる。よって、$q = 0$ を条件とする。

4.3 最高速度の設定

赤信号の右側では $\rho = 0$ である車のない状態が起こる。停止距離によるモデルである式 (3.21) において、$v = v_1(\rho)$ として、速度 v と 密度 ρ を考えると、図 4.3 より、ρ を正の方から 0 に近づけるとき、$v_1(\rho)$ は ∞ となってしまう。よって、密度が低いときには修正が必要になる。その修正方法の 1 つとして最高速度を設定する。

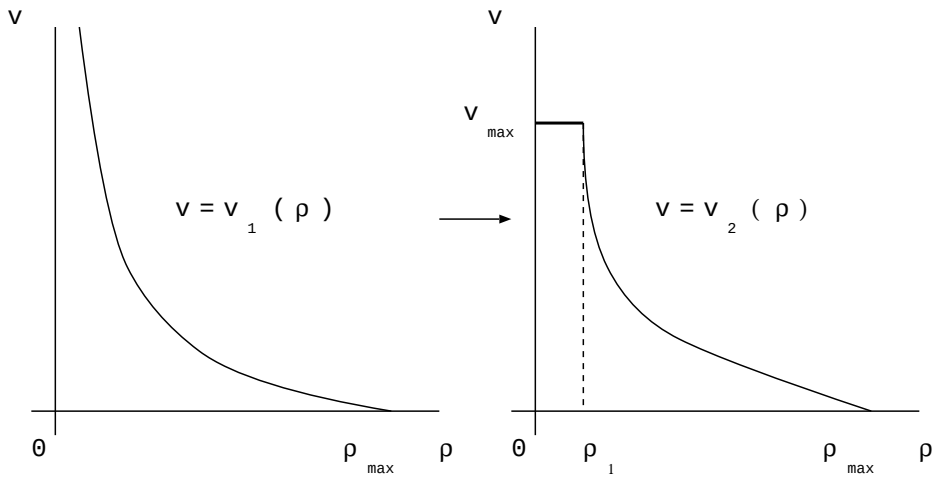


Fig. 4.3 最高速度 v_{max} の設定

すなわち、最高速度 $v = v_{max}$ を設定し、

$$v_2(\rho) = \begin{cases} v_1(\rho) & \rho_1 \le \rho \le \rho_{max} \\ v_{max} & 0 \le \rho < \rho_1 \end{cases} \tag{4.1}$$

として、考えていく。

5 差分近似解

式 (3.22) は、保存則方程式の形をしているので、非線形保存則方程式に対するいろいろな差分近似を適用することができる。この研究では Lax-Friedrichs の差分近似を行なう。

5.1 Lax-Friedrichs の差分近似

Lax-Friedrichs の差分近似は式 (3.22) を

$$\frac{\rho(x,t+\Delta t) - \frac{\rho(x+\Delta x,t)+\rho(x-\Delta x,t)}{2}}{\Delta t} + \frac{q(\rho(x+\Delta x,t),\theta(x+\Delta x)) - q(\rho(x-\Delta x,t),\theta(x-\Delta x))}{2\Delta x} = 0 \tag{5.1}$$

の形で近似する方法であり、$(x+\Delta x, t)$,$(x-\Delta x, t)$ での値を使って $(x, t+\Delta t)$ での値を求めることができ、これにより時刻 t の進行方向に近似解を計算することができる。

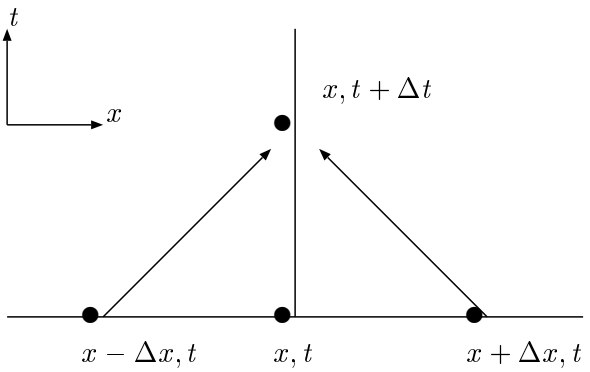


Fig. 5.1 Lax-Friedrichs の差分法

以後、

$$\rho_j^n = \rho(j\Delta x, n\Delta t) \quad (n: 0 \text{ 以上の整数}, j: \text{整数})$$

と表すことにして、式 (5.1) に $t = n\Delta t$、$x = j\Delta x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} &= \frac{\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{(q(\rho_{j+1}^n, \theta((j+1)\Delta x)) - q(\rho_{j-1}^n, \theta((j-1)\Delta x)))\} \\ &= \frac{1}{2}(\rho_{j+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} q_{j+1}^n) + \frac{1}{2}(\rho_{j-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} q_{j-1}^n) \end{aligned} \tag{5.2}$$

と表すことができる。ただし、$q_j^n = q(\rho_j^n, \theta(j\Delta x))$ とする。

まず、青信号での差分計算を考える。簡単のため、信号機の位置を $x = 0$ とする。青信号の場合は信号がないことと同じと考えるから、
$P_j^n = (j\Delta x, n\Delta t)$ とすると、

$$P_j^0 = (j\Delta x, 0) \quad (j = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots)$$

での ρ の値 ρ_j^0 により式 (5.2) によって、

$$\rho_j^n = \rho(P_j^n) \quad (n + j: \text{奇数})$$

の値が時間方向に $n = 1, n = 2, n = 3, \cdots$ と順に計算されていくことになる。

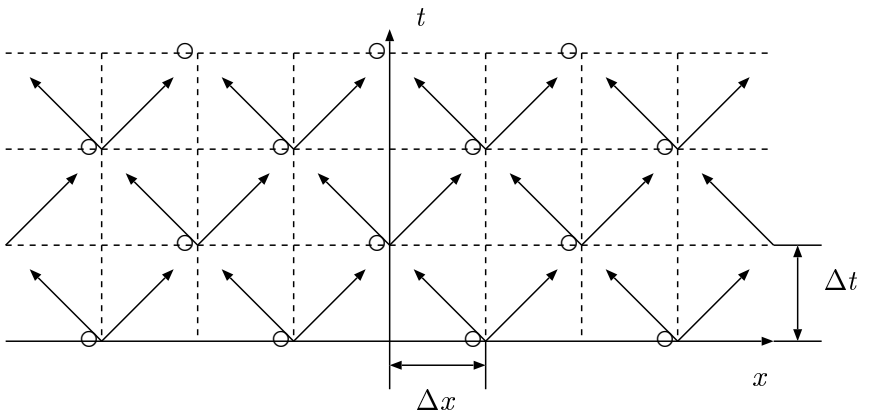


Fig. 5.2 青信号での求め方

次に、青信号での差分計算を考える。赤信号の場合、図 5.3 で白抜きの丸は青信号のときと同様に計算できるが、黒丸の部分は別な計算法で求める必要がある。

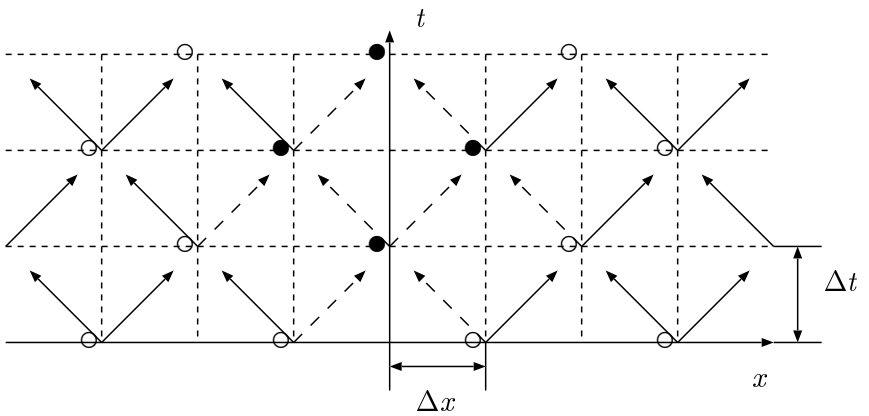


Fig. 5.3 赤信号での求め方

この場合、次の 2 つのことに注意しなければいけない。

- 赤信号の左右での車の出入りを許さない
- 赤信号での左右それぞれでは車の量は保存されなければならない

この後者の性質は、差分の作り方によっては満たされないこともある。

5.2 Lax-Friedrichs の差分の保存性

Lax-Friedrichs の差分近似は保存形の差分であり、前節の 2 つの条件を満たしているため、この問題を解決するための最適の方法といえる。このことについて説明する。

図 5.4 の状態を考える。ただし、Δx、$9\Delta x$ のところには車がなく、$\rho = 0$ であるとする。

$$\rho_1^0 = \rho_9^0 = 0 \tag{5.3}$$

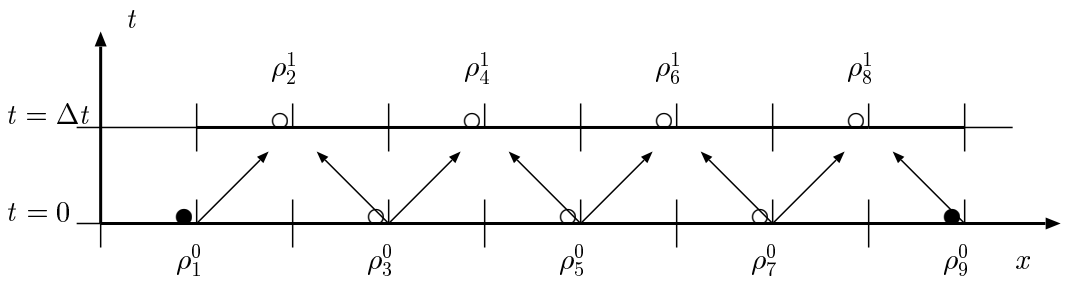


Fig. 5.4 説明図

各 ρ_j^n という値は、x 方向には、区間 $((j-1)\Delta x, (j+1)\Delta x)$ という部分での ρ の値を代表していると考えることができる。

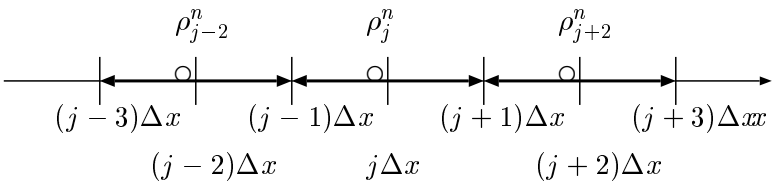


Fig. 5.5 各 ρ_j^n の値

これより、区間 $((j-1)\Delta x, (j+1)\Delta x)$ での車の台数は式 (2.8) より、

$$\int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \rho(x, n\Delta t)dx \simeq \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \rho_j^n dx = 2_j^n \Delta x \tag{5.4}$$

と考えることができる。

よって、図 (5.4) の状態では、区間 $[\Delta x, 9\Delta x]$ における車の台数は $t = 0$ のときは、式 (5.3) より、

$$\int_{\Delta x}^{9\Delta x} \rho(x,0)dx = 2\rho_3^0\Delta x + 2\rho_5^0\Delta x + 2\rho_7^0\Delta x \tag{5.5}$$

であり、$t = 1$ のときは、

$$\int_{\Delta x}^{9\Delta x} \rho(x,\Delta t)dx = 2\rho_2^1\Delta x + 2\rho_4^1\Delta x + 2\rho_6^1\Delta x + 2\rho_8^1\Delta x \tag{5.6}$$

となるはずであり、ここには車の出入りはないので、その総数である式 (5.5) と式 (5.6) が等しくならなければいけない。

式 (5.6) に式 (5.2) を代入し、

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta x}^{9\Delta x} \rho(x,\Delta t)dx \\
&= \Delta x(\rho_3^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_3^0) + \Delta x(\rho_1^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_1^0) + \Delta x(\rho_5^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_5^0) + \Delta x(\rho_3^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_3^0) \\
&\quad + \Delta x(\rho_7^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_7^0) + \Delta x(\rho_5^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_5^0) + \Delta x(\rho_9^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_9^0) + \Delta x(\rho_7^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_7^0) \\
&= \Delta x\rho_1^0 + 2\Delta x(\rho_3^0 + \rho_5^0 + \rho_7^0) + \Delta x\rho_9^0 - \Delta t q_9^0 + \Delta t q_1^0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

となるが、(5.3) より $q_1^0 = \rho_1^0 v_1^0 = 0$、$q_9^0 = \rho_9^0 v_9^0 = 0$ でありよって、

$$\int_{\Delta x}^{9\Delta x} \rho(x,\Delta t)dx = 2\Delta x(\rho_3^0 + \rho_5^0 + \rho_7^0) \tag{5.8}$$

となって、確かに総数が保存されることがわかる。これは Lax-Friedrichs の差分のもつ、保存性による。

赤信号のときの境界付近での計算もこの保存性を壊さないように計算していく。

5.3 保存性を利用した赤信号付近での計算

まず、赤信号の右側の計算を考える。

境界上に ρ_0^1 という値を設定しようとすると、この値は、区間 $[0, \Delta x]$ での ρ の値を代表しているとみることができる。

一方、ρ_2^1 は式 (5.2) により、

$$\rho_2^1 = \frac{1}{2}(\rho_3^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_3^0) + \frac{1}{2}(\rho_1^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_1^0) \tag{5.9}$$

であるので $n = 1$ $(t = \Delta t)$ での車の総量は、

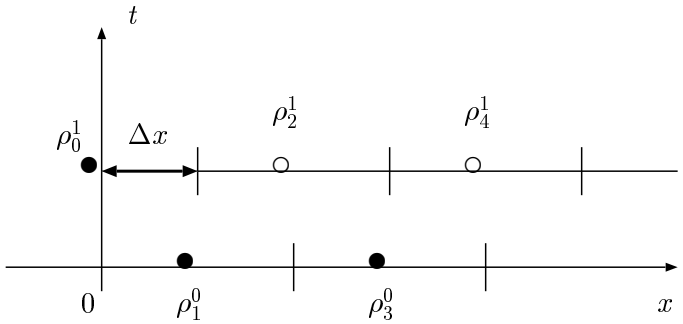


Fig. 5.6 信号の右側の計算

$$
\begin{aligned}
&\Delta x\rho_0^1 + 2\Delta x\rho_2^1 + 2\Delta x\rho_4^1 + \cdots \\
&= \Delta x\rho_0^1 + \{\Delta x(\rho_3^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_3^0) + \Delta x(\rho_1^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_1^0)\} \\
&\quad + \{\Delta x(\rho_5^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_5^0) + \Delta x(\rho_3^0 + \frac{\Delta t}{\Delta x}q_3^0)\} + \cdots \\
&= \Delta x\rho_0^1 + \{(\Delta x\rho_1^0 + \Delta t q_1^0) + (\Delta x\rho_3^0 - \Delta t q_3^0)\} \\
&\quad + \{(\Delta x\rho_3^0 + \Delta t q_3^0) + (\Delta x\rho_5^0 - \Delta t q_5^0)\} + \cdots \\
&= (\Delta x\rho_0^1 + \Delta x\rho_1^0 + \Delta t q_1^0) + 2\Delta x(\rho_3^0 + \rho_5^0 + \cdots)
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

となり、式 (5.10) の $\Delta x\rho_0^1 + \Delta x\rho_1^0 + \Delta t q_1^0$ の部分は、図 5.6 の ρ_1^0 に関する項であり、それ以外の項は $\rho_3^0, \rho_5^0, \rho_7^0, \cdots$ に関する項であることがわかる。

一方、$t = 0$ での車の総量は、

$$2\Delta x\rho_1^0 + 2\Delta x\rho_3^0 + 2\Delta x\rho_5^0 + \cdots \tag{5.11}$$

であるので、車の総量が保存されるとすると式 (5.10) の $(\Delta x\rho_0^1 + \Delta x\rho_1^0 + \Delta t q_1^0)$ の部分と、式 (5.11) の $2\Delta x\rho_1^0$ の部分は等しくなるはずである。よって、

$$\Delta x\rho_0^1 + \Delta x\rho_1^0 + \Delta t q_1^0 = 2\Delta x\rho_1^0$$

より、

$$\rho_0^1 = \rho_1^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x}q_1^0 \tag{5.12}$$

となり、これを仮の境界値とすれば、保存性が満たされることになる。

しかし、式 (5.12) のように ρ_0^1 を定めることにすると次のような問題がある。

- ρ_0^1 は必ずしも $\rho_0^1 = 0$ となるとは限らないので $q_0^1 = q(\rho_0^1, \theta(0)) = 0$ とはならないから、境界条件をみたしていないために ρ_0^1 の影響が信号の左側に及んでしまう
- この ρ_0^1 は信号の右側から計算したもので、信号の左側から計算すると別の ρ_0^1 がでてくることになる

以上の点を解決するために ρ_0^1 を設定することは断念し、その代わりとして車の総量が保存されるように ρ_2^1 をとり直すことにする。

ρ_2^1 の代わりに総量が保存されるように $\bar{\rho}_2^1$ を作り直す。$\bar{\rho}_2^1$ は図 5.7 のように、区間 $[0, 3\Delta x]$ を代表する値であるとする。

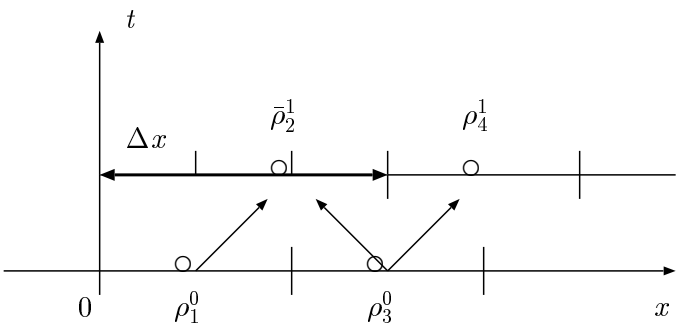


Fig. 5.7 $\bar{\rho}_2^1$ の設定

すると、$t = \Delta t$ での車の総量は、

$$\begin{aligned} & 3\Delta x\bar{\rho}_2^1 + 2\Delta x\rho_4^1 + 2\Delta x\rho_6^1 + \cdots \\ &= 3\Delta x\bar{\rho}_2^1 + (\Delta x\rho_3^0 + \Delta t q_3^0 + \Delta x\rho_5^0 - \Delta t q_5^0) \\ &\quad +(\Delta x\rho_5^0 + \Delta t q_5^0 + \Delta x\rho_7^0 - \Delta t q_7^0) + \cdots \\ &= (3\Delta x\bar{\rho}_2^1 + \Delta x\rho_3^0 + \Delta t q_3^0) + 2\Delta x(\rho_5^0 + \rho_7^0 + \cdots) \end{aligned} \tag{5.13}$$

$t = 0$ では、

$$2\Delta x\rho_1^0 + 2\Delta x\rho_3^0 + 2\Delta x\rho_5^0 + \cdots \tag{5.14}$$

であるから、式 (5.13) で ρ_1^0 , ρ_3^0 に関する部分である $3\Delta x\bar{\rho}_2^1 + \Delta x\rho_3^0 + \Delta t q_3^0$ と式 (5.14) の $2\Delta x\rho_1^0 + 2\Delta x\rho_3^0$ は等しくなければいけないから、

$$3\Delta x\bar{\rho}_2^1 + \Delta x\rho_3^0 + \Delta t q_3^0 = 2\Delta x\rho_1^0 + 2\Delta x\rho_3^0 \tag{5.15}$$

となるので、$\bar{\rho}_2^1$ について解くと、

$$\bar{\rho}_2^1 = \frac{2\rho_1^0 + \rho_3^0}{3} - \frac{\Delta t}{3\Delta x} q_3^0 \tag{5.16}$$

を得る。なお、この式 (5.16) は、(式 (5.9)×2+式 (5.12))/3 の変形により、

$$\bar{\rho}_2^1 = \frac{2\rho_2^1 + \rho_0^1}{3} \tag{5.17}$$

であることがわかる。
次に、$t = 2\Delta t$ について考える。

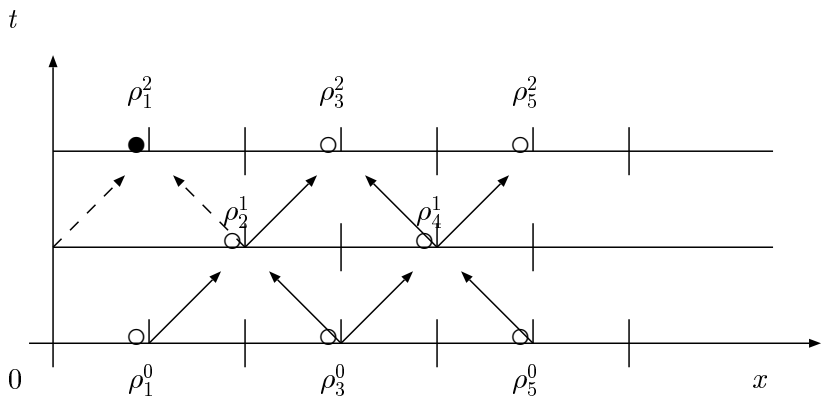


Fig. 5.8 $2\Delta t$ の説明図

この場合、ρ_1^2 を決めるのに問題があるため、これも保存性の観点から考えてみる。
$t = \Delta t$ では、車の総量は、

$$3\Delta x\bar{\rho}_2^1 + 2\Delta x\rho_4^1 + \cdots \tag{5.18}$$

$t = 2\Delta t$ では、

$$\begin{aligned} & 2\Delta x\bar{\rho}_1^2 + 2\Delta x\rho_3^2 + \cdots \\ & \quad = \quad 2\Delta x\bar{\rho}_1^2 + \{(\Delta x\bar{\rho}_2^1 + \Delta t\bar{q}_2^1) + (\Delta x\rho_4^1 - \Delta t q_4^1)\} + \cdots \end{aligned} \tag{5.19}$$

となる。ただし、$\bar{q}_2^1 = q(\bar{\rho}_2^1, \theta(2\Delta x))$ である。
これより、$3\Delta x\bar{\rho}_2^1$ と $2\Delta x\bar{\rho}_1^2 + (\Delta x\bar{\rho}_2^1 + \Delta t\bar{q}_2^1)$ は等しくなければいけないので、

$$3\Delta x\bar{\rho}_2^1 = 2\Delta x\bar{\rho}_1^2 + (\Delta x\bar{\rho}_2^1 + \Delta t\bar{q}_2^1) \tag{5.20}$$

となり、ρ_1^2 について解くと、

$$\rho_1^2 = \bar{\rho}_2^1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}q_2^1 \tag{5.21}$$

となる。つまり、信号の右側の計算は次のようにやればよい。

- $t = \Delta t$ では

  1. $\rho_4^1, \rho_6^1, \rho_8^1, \ldots$ では通常の Lax-Friedrichs 法で計算する

  2. ρ_2^1 は

     $$\rho_2^1 = \frac{2\rho_1^0 + \rho_3^0}{3} - \frac{\Delta t}{3\Delta x}q_3^0$$

     で計算する。

- $t = 2\Delta t$ では

  1. $\rho_3^2, \rho_5^2, \rho_7^2, \ldots$ では通常の Lax-Friedrichs 法で計算する

  2. ρ_1^2 は

     $$\rho_1^2 = \rho_2^1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}q_2^1$$

     で計算する。

以上のことを繰り返しすることにより、赤信号の右側で車の総量が保存されるように、時間方向に計算されていくことになる。

この方法では、信号の境界付近では特殊の差分近似を導入して、車の総量の保存を成り立たせることに重点を置いている。しかし、基礎方程式 (3.22) は車の総量保存を表し、その流れがそれに従うことを考えると、あながち自然な考え方ではないかと思われる。

信号の左側について同様に考察を行なう。

信号の右側の方法と同様にして、ρ_{-2}^1 , ρ_{-1}^2 を求めると、

$$\rho_{-2}^1 = \frac{2\rho_{-1}^0 + \rho_{-3}^0}{3} + \frac{\Delta t}{3\Delta x}q_{-3}^0 \tag{5.22}$$

$$\rho_{-1}^2 = \rho_{-2}^1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}q_{-2}^1 \tag{5.23}$$

となる。この ρ^1_{-2} , ρ^2_{-1} 以外の部分は通常の Lax-Friedrichs 法で計算を行なう。
以上の方法で信号を含めた数値計算を行なっていく。

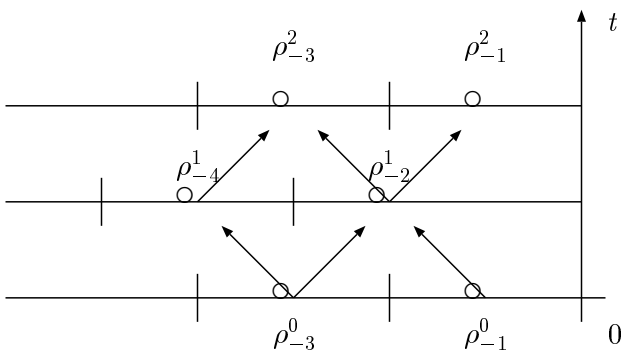


Fig. 5.9 信号の左側の計算

6 実験と考察

6.1 信号がない場合

西田 [1] より、初期密度が一定 (実験する道路の区間内で全ての車の車間距離が一定) で傾斜角のないときは時間が過ぎても渋滞は起こらず、車は順調に流れることがわかっている。また、初期密度が定数でないとき (実験する道路の区間内で車間距離が一定ではないとき) でも、時間が過ぎてもほぼ、車は順調に流れることがわかっている。

また、登り坂を設定し、同様に初期密度が一定と初期密度が定数でないときについて計算したら、いずれの場合も平坦な道と、登り坂との分岐点で、渋滞を解消し、さらに、下り坂を設定したときは、初期密度が一定と初期密度が定数でないときのいずれの場合も、平坦な道と、下り坂との分岐点で、渋滞を引き起こすことがわかっている。

このときの、道のモデルは図 6.1 で、傾斜角は、5 ° (8 % の勾配) であり、本実験でもこのモデルで実験を行なうこととする。

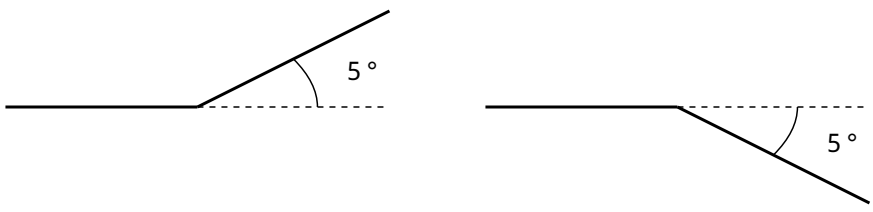


Fig. 6.1 道のモデル (左:登り, 右:下り)

6.2 実際の道路での信号の特徴

信号問題を考察する前に、実際の道路での信号の特徴を調べることにした。日頃はこのように、注意して信号を考察することはない分、さまざまな特徴を見つけることができた。ある交差点 3 箇所での青信号と赤信号それぞれの時間帯の長さについて、交通密度の多い午後 6:00 と、交通密度の少ない午後 10:00 のときについて、次のようにまとめた。なお、各値は 3 回調べた平均値を採用し、黄信号の時間帯はカウントしなかった。なお、図の線の太さは実際の道路の幅の大きさを示す。

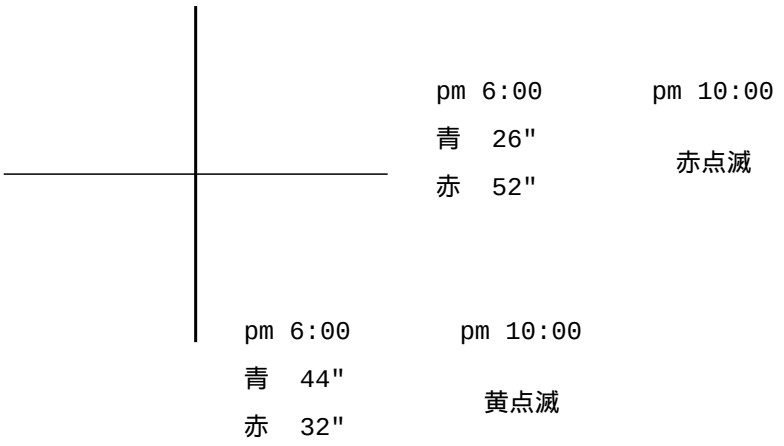


Fig. 6.2 柏崎市半田のある交差点

この地点は両方向ともに午後 6:00 でも、あまり交通量が多くない。午後 10:00 には、青信号の時間帯が長い道路では、黄点滅となり、赤信号の時間帯が長い道路では、赤点滅となった。また青信号、赤信号ともに時間帯が長くないため、1 サイクルが短いといえる。

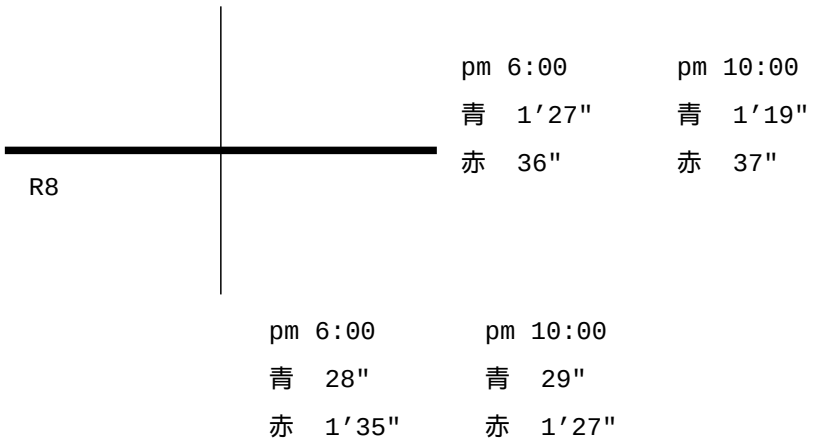


Fig. 6.3 柏崎市田中入口の交差点

この地点では、国道 8 号線では交通量が多いため、非常に青信号の時間帯が長い。午後 6:00 と午後 10:00 では青、赤信号の時間帯やサイクルともあまり変化がない。

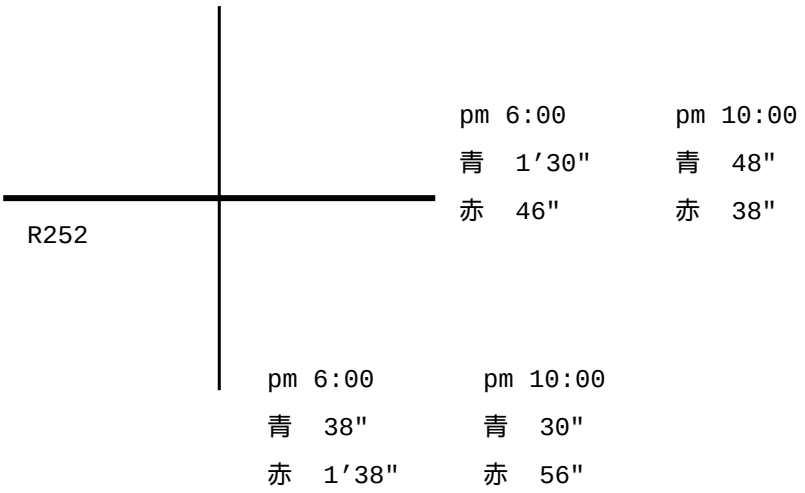


Fig. 6.4 柏崎市茨目の交差点

この地点では、国道 252 号線では午後 6:00 のとき、青信号の時間帯は赤信号の時間帯に比べてかなり長かったが、午後 10:00 では青信号の時間帯だけがかなり短くなった。また、赤信号の時間帯も少し短くなっているため、全体のサイクルはかなり短くなっている。

以上のことをまとめて、全体的に言えることは、

- 午後 6:00(渋滞時) から、午後 10:00(自由時) になると、青信号の時間帯が短くなる。それと同時に、全体のサイクルも短くなる。
- 交通量の多い道路では自由時になると、特に青信号の時間帯が短くなる。同時に、交通量の少ない道路では自由時になると、特に赤信号の時間帯が短くなる。

となる。つまり、交通量の多い道路では青信号は長く、赤信号は短い。交通量の少ない道路では青信号が短く、赤信号は長く、また、青、赤信号それぞれが短くて 1 サイクルが短い、といったところが大まかな特徴と言えるだろう。

6.3 平坦な道で信号を取り入れた場合

初期設定を x の最大値を 1000[m]、x 方向の分割数を 1000 $(\Delta x = 1)$ として、初期密度 $\rho(x, 0)$ を

$$\rho(x, 0) = 0.01 \sin\theta + 0.03[\text{台数}/m] \tag{6.1}$$

で与える。図 6.1 のモデルで信号の位置は $(\mathrm{a})x = 300$ (坂道の前) と $(\mathrm{b})x = 700$ (坂道の途中) とする。なお、信号は、黄信号を考えず、青、赤、青、赤、... といった繰り返しでいくものとし、赤信号のときに他の車線から、車が入ってこないと仮定する。信号の時間帯は青を 90 秒、赤を 40 秒とし、時間が 300 秒になるまで計算を繰り返す。

なお、プログラムでの信号の配置は各 Δx の境界である、x 軸の分割点に配置するようにした。

プログラムでの信号の色の変化は、計算しているそのときの時間が、信号の色を変えるように設定した時刻を越えたときに、信号の色が変わったと判断させているために、ほぼ $2\Delta t$ (最大で 0.1 秒) の誤差がでるが、その値は非常に小さいため無視して考える。

まず、平坦な道で、信号の位置 $x = 300$ と $x = 700$ のときの計算結果を図 6.5 に示す。この 3 次元グラフで上に伸びている軸は密度 ρ を示しており、0 から 1000 までの軸は位置 x[m] でその地点を示し、0 から 300 までの軸は時間 t[s] を示す。また、それぞれの左右のグラフは、視点を変えただけのものである。

これを見ると、まず (a)、(b) ともに青信号である 90 秒までは、密度に大きな変化はなく、車が順調に流れていることがわかる。しかし、赤信号になる 90 秒になると、(a) では x が 300 の地点で、(b) では x が 700 の地点で、密度が 10 倍近くまで上がっていることがわかる。これは、車間距離が $1/10$ 近くまで縮まったということでもある。

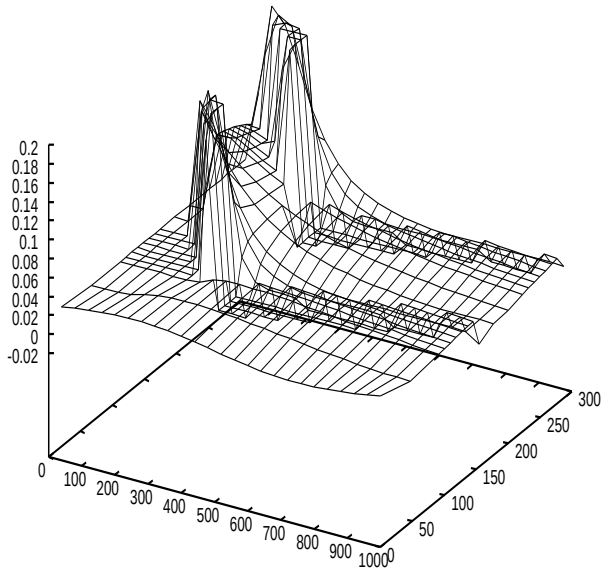
その後、130 秒から 220 秒までは青信号にるが、いずれも、130 秒から徐々に密度が下がるが、220 秒になっても密度は最高時の半分くらいまでしか下がらないことがわかる。

さらに、220 秒になり、2 回目の赤信号になると、2 回目の青信号で密度が最高時の半分くらいまでしか下がらない影響で、1 回目の赤信号よりも前の位置で密度が上がることがわかる。

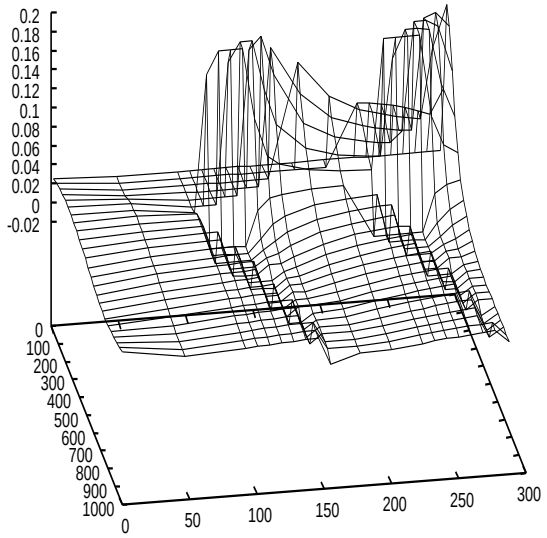
また、(a)、(b) の両者を比べると、信号により密度が上がる位置が違うだけで、それ以外はほとんど違いが見られない。それと、式 (6.1) のように定数ではない初期値を与えているが、その影響力は密度の信号による影響が大きすぎるために、ほとんどないと言える。

6.4　信号の時間間隔を変えた場合

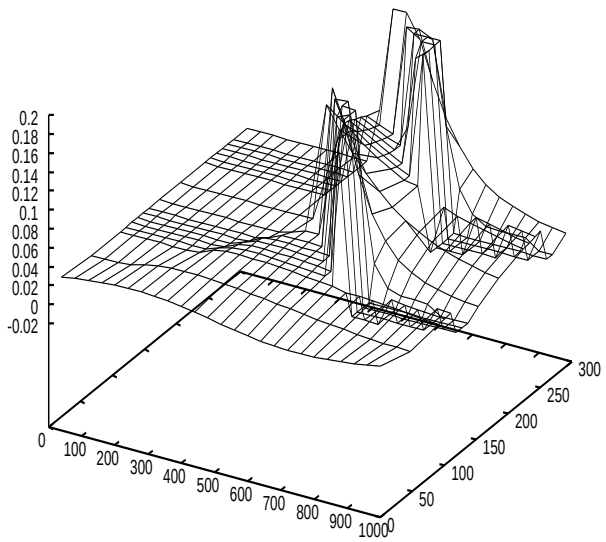
前節では信号の時間帯を青を 90 秒、赤を 40 秒としていたが、ここでは、信号の時間帯を逆に赤の時間帯を長くしたものとして、(a) 青を 30 秒、赤を 80 秒、1 サイクルを短くしたものとして、(b) 青を 40 秒、赤を 30 秒について実験を行なう。まず、信号の位置は $x = 300$ として、計算結果を図 6.6 に示す。



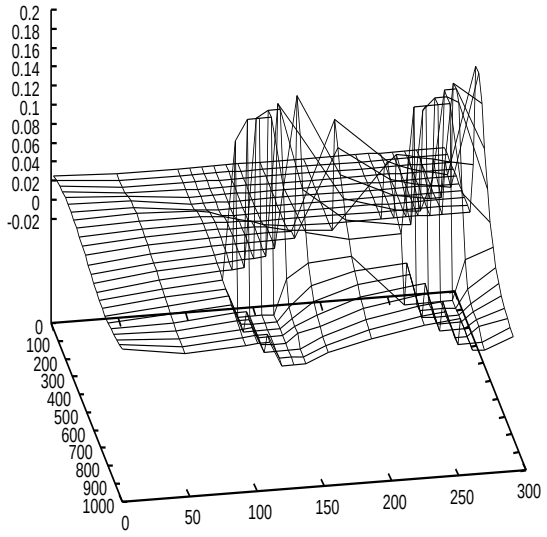
(a)$x = 300$ に信号がある場合



(a)$x = 300$ に信号がある場合

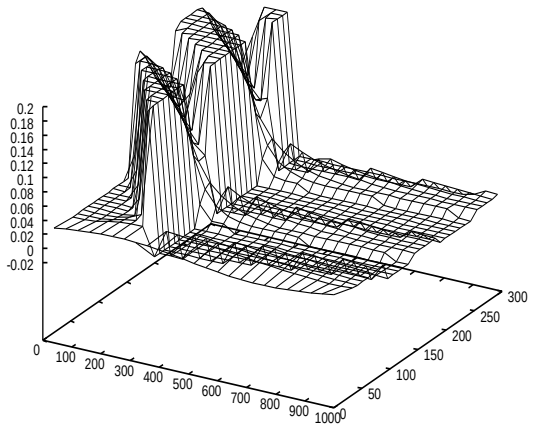


(b)$x = 700$ に信号がある場合

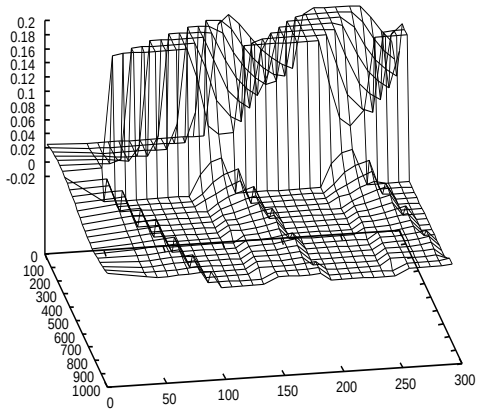


(b)$x = 700$ に信号がある場合

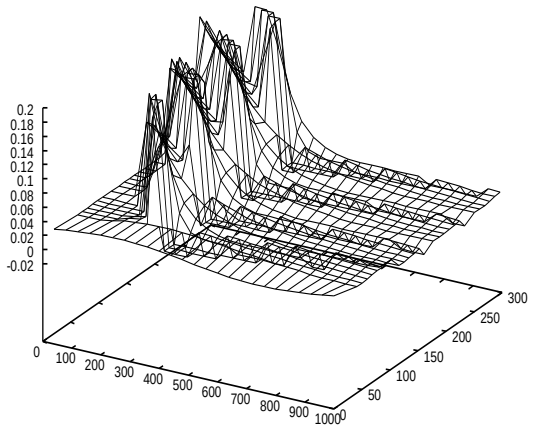
Fig. 6.5 平坦な道で青 90 秒赤 40 秒の場合



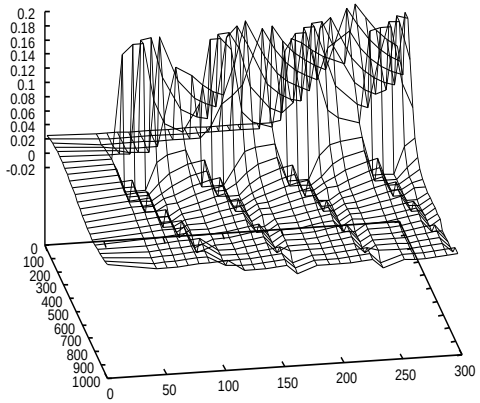
(a) 青 30 秒赤 80 秒の場合



(a) 青 30 秒赤 80 秒の場合



(b) 青 40 秒赤 30 秒の場合

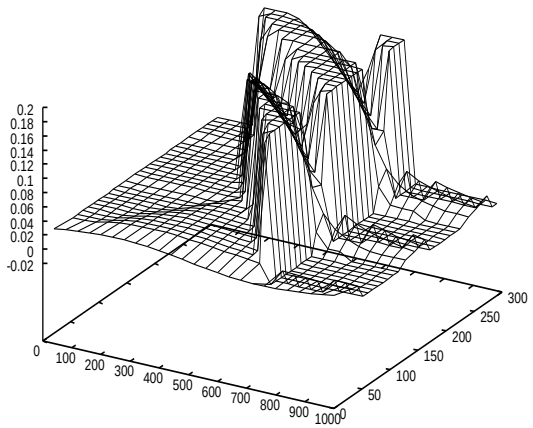


(b) 青 40 秒赤 30 秒の場合

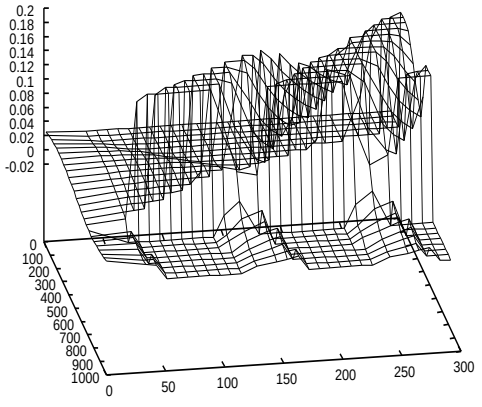
Fig. 6.6 平坦な道で信号の位置 $x = 300$ の場合

これを見て (a) と (b) を比べると、(a) は赤の時間帯が長いため、密度が上がっている位置が広範囲に渡っていることがわかる。両者に言えることだが、時間帯が青 90 秒、赤 40 秒のときに比べて青信号になると、急激に密度が下がるのがわかる。

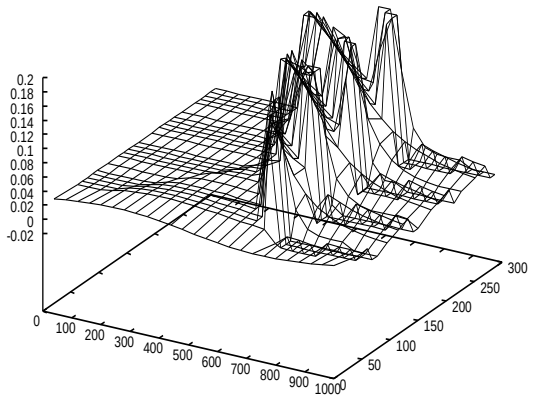
次に、信号の位置は $x = 700$ として、計算結果を図 6.7 に示す。



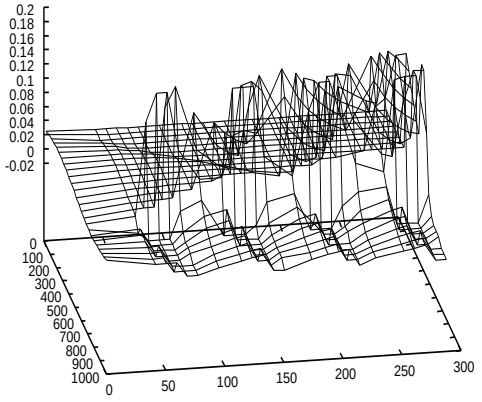
(a) 青 30 秒赤 80 秒の場合



(a) 青 30 秒赤 80 秒の場合



(b) 青 40 秒赤 30 秒の場合



(b) 青 40 秒赤 30 秒の場合

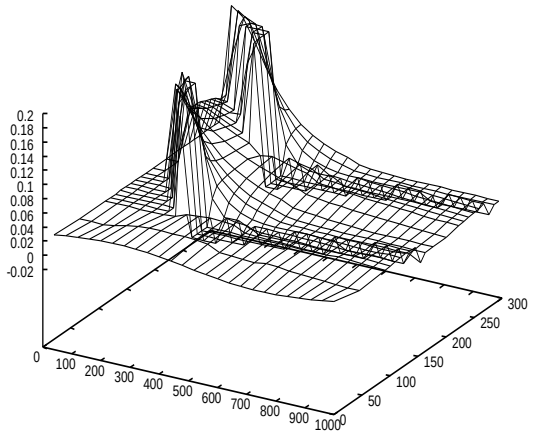
Fig. 6.7 平坦な道で信号の位置 $x = 700$ の場合

この場合、両者において、信号の位置が $x = 700$ にあるので、時間が経つにつれて信号以前の位置で渋滞が延びてきていることがよくわかる。(b) は (a) に比べて赤の時間帯が長くないため、(a) ほど渋滞が延びてはいない。そして、渋滞している領域が時間が経つにつれ、信号以前の方に移っていくことがわかる。

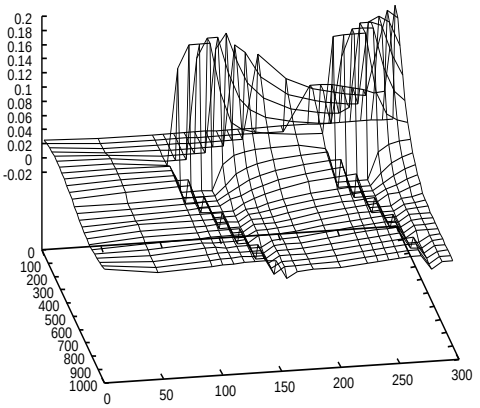
6.5　坂道で信号を取り入れた場合

ここでは、さらに坂道を設定し、実験を行なう。このとき、最も着目する点は、坂道になる分岐点は $x = 500$ の中間点であるから、$x = 300$ の位置では平坦な道に信号があり、$x = 700$ の位置では坂道に信号があるということである。傾斜角度は、登り坂の 5 ° と下り坂の -5 ° について、見てみる。

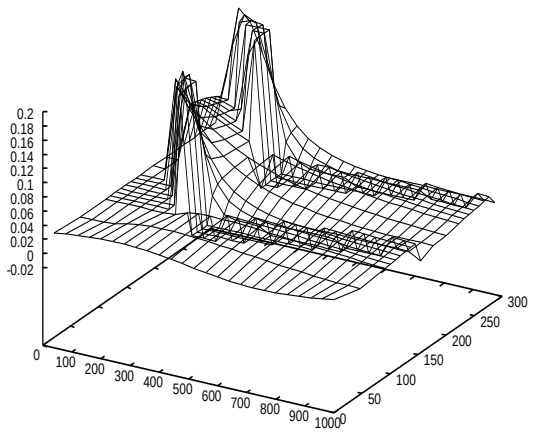
まずは、信号の位置を $x = 300$ 、信号の時間帯を青 90 秒、赤 40 秒として、登り坂と平坦な道を比較する。計算結果を図 (6.8) に示す。登り坂では、西田 [1)] によると、分岐点で渋滞が解消されることがわかっているが、さらに信号の影響は交通流にどのように現れるか。



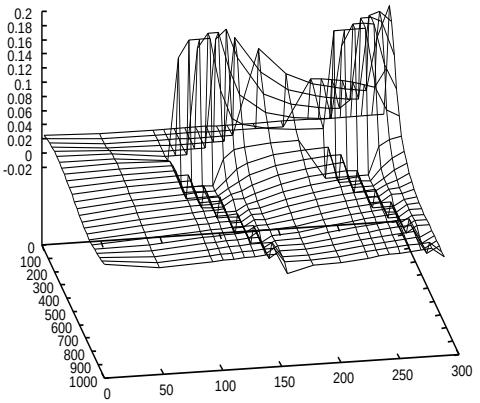
(a)5 ° の登り坂の場合



(a)5 ° の登り坂の場合



(b) 平坦な道の場合

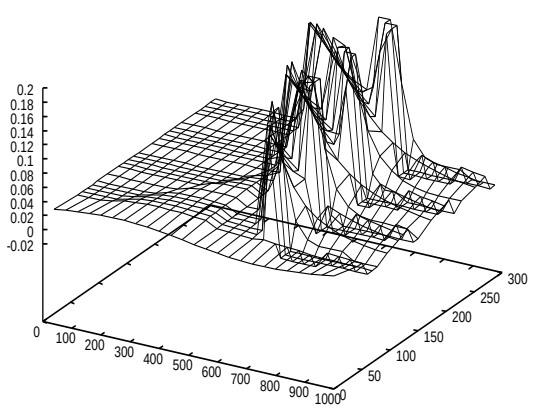


(b) 平坦な道の場合

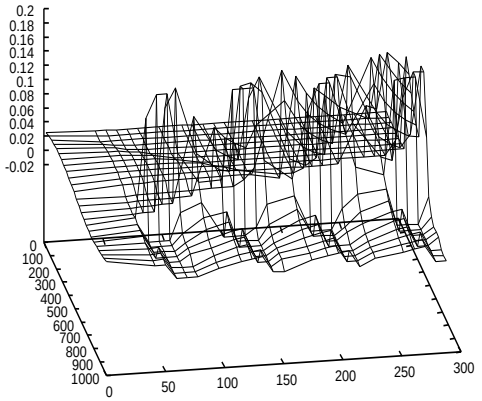
Fig. 6.8　位置 $x = 300$ で青 90 秒、赤 40 秒の場合

この場合、$x = 1000$ の位置で密度の下がっている時間が、若干早いことがわかるので、登り坂の影響が出ていることがわかる。しかし、全体的には平坦な道とほとんど違いが見られない。

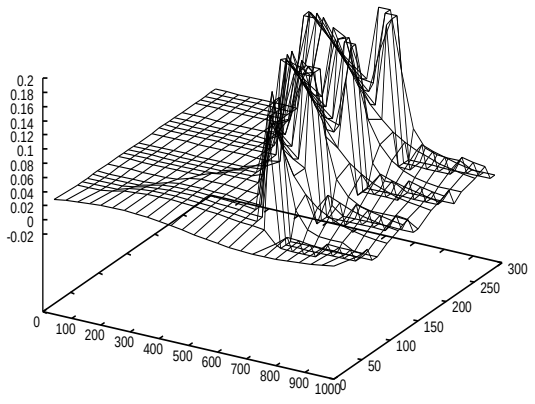
次に、信号の位置を $x = 700$ 、信号の時間帯を青 40 秒、赤 30 秒として、登り坂と平坦な道を比較する。計算結果を図 (6.9) に示す。



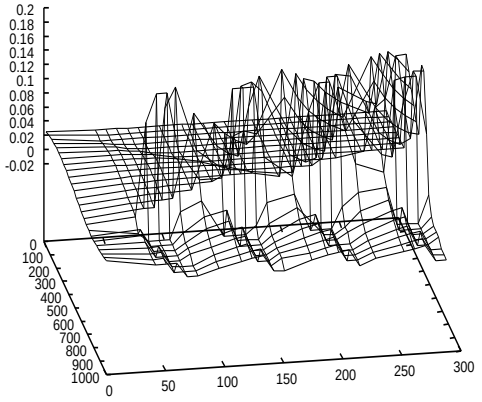
(a)5 ° の登り坂の場合



(a)5 ° の登り坂の場合



(b) 平坦な道の場合

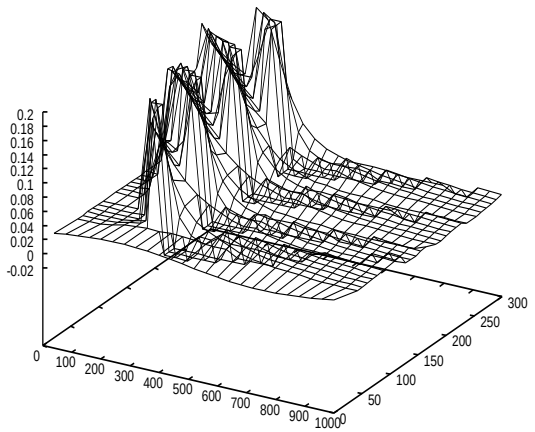


(b) 平坦な道の場合

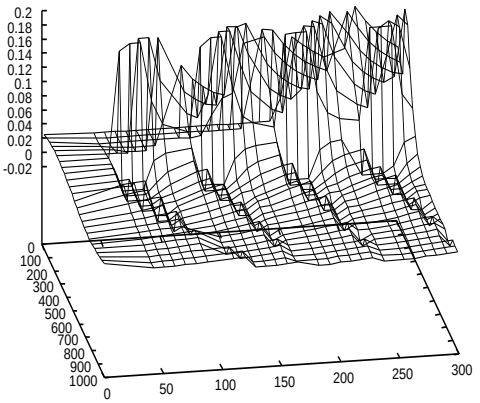
Fig. 6.9 位置 $x = 700$ で青 40 秒、赤 30 秒の場合

この場合でも、$x = 1000$ の位置で密度の下がっている時間が、若干早いことがわかるので、登り坂の影響が出ていることがわかる。しかし、やはり全体的には平坦な道とほとんど違いが見られない。信号のある位置が坂道でも、平坦なときと違いが出るわけではなかった。

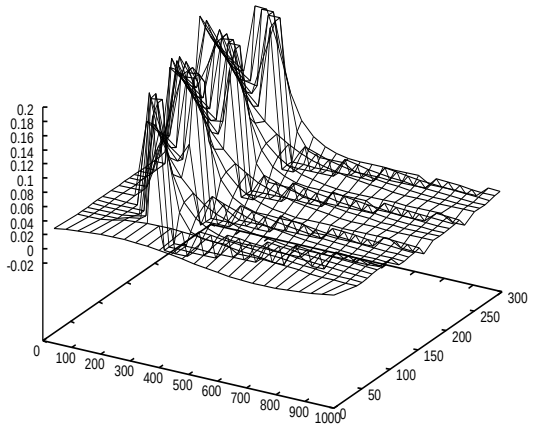
今度は下り坂について、登り坂と同様に実験を行う。信号の位置を $x = 300$ 、信号の時間帯を青 40 秒、赤 30 秒として、下り坂と平坦な道を比較する。計算結果を図 (6.10) に示す。下り坂では、西田 [1)] によると、分岐点で渋滞が引き起こされることがわかっているが、このときに信号の影響は交通流にどのように現れるか。



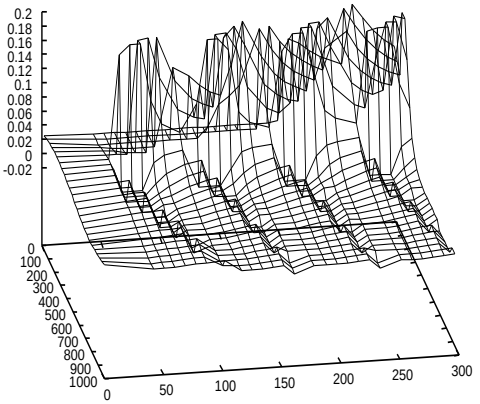
(a)$-5°$ の下り坂の場合



(a)$-5°$ の下り坂の場合



(b) 平坦な道の場合

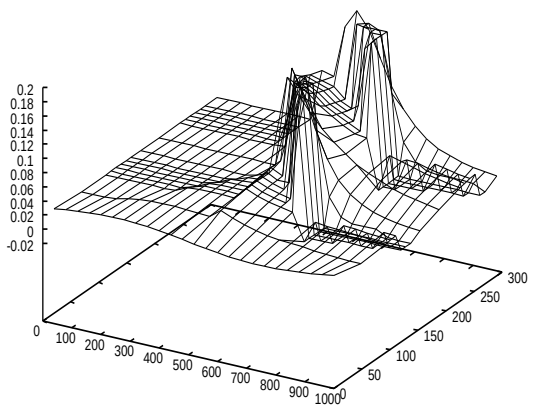


(b) 平坦な道の場合

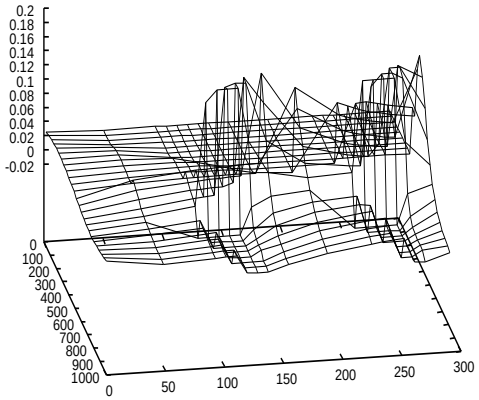
Fig. 6.10 位置 $x = 300$ で青 40 秒、赤 30 秒の場合

この場合では、$x = 1000$ の位置で密度の下がっている時間が、若干遅くなっていることがわかるので、登り坂と反対の影響が出ていることがわかる。しかし、ここでも、全体的には平坦な道とほとんど違いが見られない。

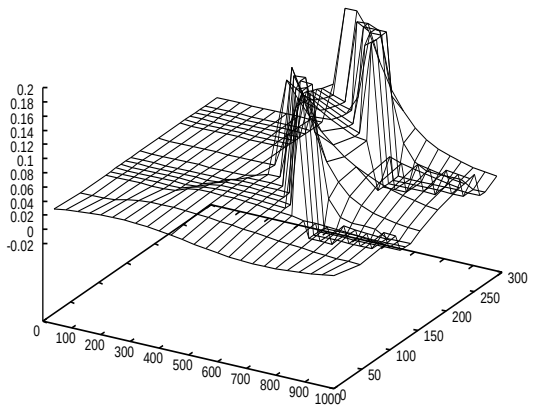
下り坂で信号の位置を $x = 700$ 、信号の時間帯を青 90 秒、赤 40 秒として、下り坂と平坦な道を比較する。計算結果を図 (6.11) に示す。



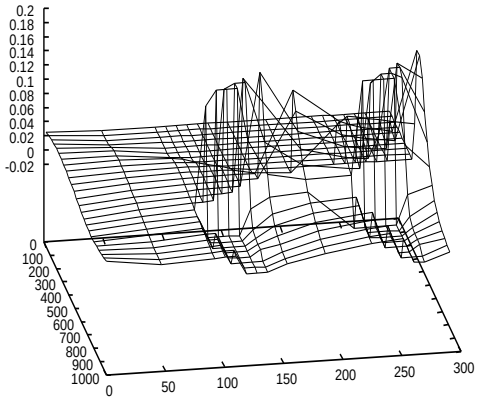
$(\mathrm{a})-5^\circ$ の下り坂の場合



$(\mathrm{a})-5^\circ$ の下り坂の場合



(b) 平坦な道の場合



(b) 平坦な道の場合

Fig. 6.11 位置 $x = 700$ で青 90 秒、赤 40 秒の場合

この場合では、信号の位置 $x = 700$ であり、下り坂の途中に信号があるため、下り坂の影響による渋滞と、赤信号の影響による渋滞が相乗されるため、平坦なときと比べて、少しは目に見えて密度が上がっている箇所があるのがわかる。

7　まとめ

本研究では交通流の流体モデルにおける信号の考察を行ない、その数値計算を行った。その際に西田 [1] の停止距離を車間距離と考えた、道路の場所を反映したモデルを採用した。

坂道の角度に条件が必要であること、信号を入れると交通量のない付近を考える必要があるため、最高速度を設定する必要があること、青信号では、信号がないものと見なし、赤信号では交通量がゼロとする、信号での条件を考察すること、Lax-Friedrichs 差分法に信号を導入するための考察を行い、特殊な計算方法により保存性を保つようにできること、といったことを考慮することができたため、そのモデルに、信号問題を取り入れることが実現できた。

そして、信号の位置、信号の色の時間間隔、さらに平坦な道と坂道、これらを組み合わし、さまざまな道路条件を設定し、どのような現象が起こるか、信号付近においては、Lax-Friedrichs 差分法の保存性を利用した特殊な計算方法で、その他の位置では、通常の Lax-Friedrichs 差分法を用いて、数値計算を行った。

赤信号になると信号直前の位置では、密度が初期設定したときの 10 倍にまで跳ね上がることがわかった。これは、車間距離が 1/10 になったことと同じ意味である。平坦な道で青信号の時間帯を長く設定した場合では、渋滞の時間は短く、領域も小さい。同様に、赤信号の時間帯を長く設定した場合では、渋滞の時間は長く、領域も大きい。さらに 2 回目の赤信号の時間帯では、1 回目の赤信号の時間帯の影響を受け、さらに大きな渋滞となることがわかった。

こういった状況に坂道を設定したところ、登り坂では、渋滞の解消が、下り坂では、渋滞の引き起こしが若干みられたが、坂道を設定しても平坦な道のときの状況とほとんど変わらない結果となった。このことより、坂道の影響よりも赤信号の影響力のほうが、はるかに大きいということがわかった。これらのことは現実的に考えても、同じことがいえるので、数値計算の結果は、実際の現象に対応しているといえる。

実験を終え、もう少し長い時間について、数値計算を行ない、渋滞の様子を考察すべきだったと思う。また、このほかに、たとえば図 7.1 のような、信号を 2 つ配置した設定での考察も検討したかったが、これは今後の課題であろう。

Fig. 7.1　考察してみたかったモデル

最後に、本研究を進めるにあたり、研究全般にわたり丁寧な御指導を頂きました本学情報電子工学科 竹野 茂治 助教授に、心から感謝し、御礼申し上げます。また、共に頑張り、励ましあった本学情報電子工学科竹野研究室、木原 修 氏、木原 涼子 氏、佐藤 健美 氏に、感謝の意を表します。

参考文献

[1] 西田匡佑：“停止距離から導かれる交通流の数学モデルとその数値解析”, 新潟工科大学工学部情報電子工学科卒業論文, 1999

[2] 全日本指定自動車教習所協会連合会 編：“安全運転の知識”, pp 14-15

[3] R. ハーバーマン：“交通流の数学モデル”, (中井暉久 訳 , 現代数学社 , 1981)

[4] 湯川諭：“計算物理学および統計力学的手法をもちいた一次元交通流の研究 – 交通渋滞の統計力学– ”, 大阪大学大学院理学研究科修士論文 , pp 15