種々の爆発判定条件による
半線形波動方程式の爆発面の数値解析

平成 11 年 2 月 10 日

情報電子工学科
井上 優

目 次

1 はじめに **1**

2 波動方程式の導出と性質 **1**
2.1 線形波動方程式の導出 1
2.2 波動方程式の一般解 3
2.3 波動方程式の解の性質 5

3 波動方程式の数値解法 **7**
3.1 差分法 7
3.2 線形波動方程式の差分解析 9
3.3 半線形波動方程式の数値解析 12

4 爆発面の解析 **14**
4.1 爆発面の解析法 14
4.2 爆発スピード 15
4.3 微分による爆発面の解析 18
4.4 積分による爆発面の解析 19
4.5 それぞれの条件の変化による爆発面の位置の変化 20

5 まとめ **21**

参考文献 **23**

概要

本稿では、波の運動方程式である波動方程式について考察する。まず、線形波動方程式、半線形波動方程式をそれぞれ差分法による数値解析を行って、実際にどのような値をとるか調べ, 半線形波動方程式において解がある時刻 t で無限大に発散する爆発という現象が起きることを紹介する。この解の爆発は x の値によって爆発の時刻が異なり、その点を $x-t$ 面に上でつなぐことによって曲線が生まれる。それが爆発面である。この爆発面は、初期値などの条件を変えてやることによりその位置や形を変化させる。この爆発面を観察するために計算機の上で数値計算することが目標である。計算機では無限大の値を扱うことができないので、その方法をいくつか紹介し、その長所、短所を提示し、どの条件ではどのような方法が適しているか考察する。

1　はじめに

波動方程式は時刻 t を独立変数として含む双曲型方程式である。これは一般に振動問題か、または速度、圧力および密度がそこで不連続になる衝撃波のような不連続性が持続する問題から発生する。最も簡単な波動方程式は 1 次元のもので、 $u_{tt} = k^2 u_{xx}$ で表される方程式である。これは線形 1 次元波動方程式と呼ばれる。この非線形の形として $u_{tt} - k^2 u_{xx} = u^p$ で表されるものがあり、これを半線形波動方程式と呼ぶ。この半線形波動方程式には '有限時間内に解が爆発する' という性質があることが知られている。これは、初期の値やその他の条件にもよるが u の値がある時刻に達すると解が無限に発散するというものである。また、x の値により解が爆発する時刻が異なり、この爆発時刻を $x - t$ 平面に上で結ぶと爆発面と呼ばれる曲線が現れる。この解の爆発という現象を、無限大という値を扱うことのできない計算機の上ではどうやって解析していくのか検討を行う。

まず、2 章では一直線上を一定の速度で伝播する波の様子から線形波動方程式を導出し、その一般解を求める。そしてこの一般解をもとに解の性質について説明する。 3 章で差分法について説明し、実際に線形、半線形の波動方程式について数値解析を行う。 4 章では、計算機上で爆発面を解析する方法として、 u の値自身と、その値を微分、積分させた値などを用いたものをとりあげ、それぞれをさまざまな条件の下で数値計算を行い、その時の適、不適を検討し、考察を行う。

2　波動方程式の導出と性質

2.1　線形波動方程式の導出

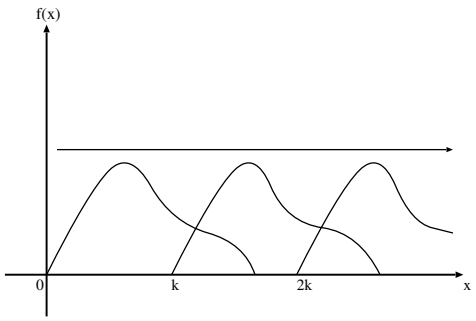


Fig. 2.1　波の伝播

まず、線形波動方程式を導出する。

Fig. 2.1 のように一直線上を伝わる波について考えてみる。波の伝わる方向に x 軸をとれば、 変化する物理量 u は x と t との関数である。任意の時刻 t_0 に

$$u(x, t_0) = f(x) \tag{2.1}$$

という関係があるとすると、そのとき $f(x)$ はその瞬間の空間的な波の形を表している。この波形 $f(x)$ が一定の形を保ったまま、一定の速さ k で $+x$ の向きに進む場合、時間 t_0 の Δt 秒後つまり時刻 $t_0 + \Delta t$ における波の空間的な形は、

$$u(x, t_0 + \Delta t) = f(x - k\Delta t) \tag{2.2}$$

と表せる。同様に時刻 $t_0 - \Delta t$ の波形は、

$$u(x, t_0 - \Delta t) = f(x + k\Delta t) \tag{2.3}$$

である。

ここで改めて $t_0 = 0$, $\Delta t = t$ とおくと、

$$u(x, t) = f(x - kt) \tag{2.4}$$

$$u(x, -t) = f(x + kt) \tag{2.5}$$

となる。これらの x, ならびに t についての 2 階導関数を求める。
まず x について求める。(2.4) 式より $\chi = x - kt$ とおくと、

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\chi}\frac{\partial \chi}{\partial x} = f'(\chi)\chi_x$$

$$\chi_x = \frac{\partial (x - kt)}{\partial x} = 1$$

となるので、1 階の偏微分は

$$u_x = \frac{du}{d\chi} = f'(\chi) \tag{2.6}$$

となり、 2 階の偏微分は

$$u_{xx} = \frac{d}{dx}(u_x) = \frac{d}{d\chi}f'(\chi) = f''(\chi)$$

となる。つまり

$$u_{xx} = f''(\chi) \tag{2.7}$$

という式が成り立つ。t についても同様に、

$$\chi_t = \frac{d(x - kt)}{dt} = -k$$

$$u_t = \frac{du}{d\chi}\frac{\partial \chi}{\partial t} = -kf'(\chi)$$

$$u_{tt} = \frac{d}{d\chi}(-kf'(\chi)) = k^2 f''(\chi) \tag{2.8}$$

と表せる。 従って、(2.7) ,(2.8) 式より

$$u_{tt} = k^2 u_{xx} \tag{2.9}$$

が成り立つ。この偏微分方程式が 波動方程式 **(wave equation)** である。また (2.5) 式からも同じ (2.9) 式が得られる。

2.2 波動方程式の一般解

次に、この波動方程式 (2.9) 式の一般解を求める。まず、

$$\begin{cases} x - kt &= \chi \\ x + kt &= \tau \end{cases} \tag{2.10}$$

とおいて、u_{tt}, u_{xx}を u のχ, τについての微分係数であらわしてみる。
これらの式を x, t についてそれぞれ解くと、

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{2}(\chi + \tau) \\ t &= \dfrac{1}{2k}(\tau - \chi) \end{cases} \tag{2.11}$$

となるので、$u = u(\chi(x,t), \tau(x,t))$ と考えて

$$\begin{cases} \chi_t &= -k, \quad \tau_t &= k \\ \chi_x &= 1, \quad \tau_x &= 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

より、

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi}(-k) + \frac{\partial u}{\partial \tau}(k)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \chi}\left\{-k\frac{\partial u}{\partial \chi} + k\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\}\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{-k\frac{\partial u}{\partial \chi} + k\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\}\frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial \chi}\left\{k^2\frac{\partial u}{\partial \chi} - k^2\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{k^2\frac{\partial u}{\partial \chi} - k^2\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\} \\ &= k^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right\} \\ &= k^2\{u_{\chi\chi} - 2u_{\chi\tau} + u_{\tau\tau}\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \chi}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right\}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right\}\frac{\partial \tau}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial \chi}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right\} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right\} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \chi \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \\
&= u_{\chi\chi} + 2u_{\chi\tau} + u_{\tau\tau}
\end{aligned}
$$

これらを (2.9) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
k^2\{u_{\chi\chi} - 2u_{\chi\tau} + u_{\tau\tau}\} &= k^2\{u_{\chi\chi} + 2u_{\chi\tau} + u\tau\tau\} \\
4u_{\chi\tau} &= 0 \\
u_{\chi\tau} &= 0
\end{aligned}
$$

となる。χ, τ について、この偏微分方程式を解くと

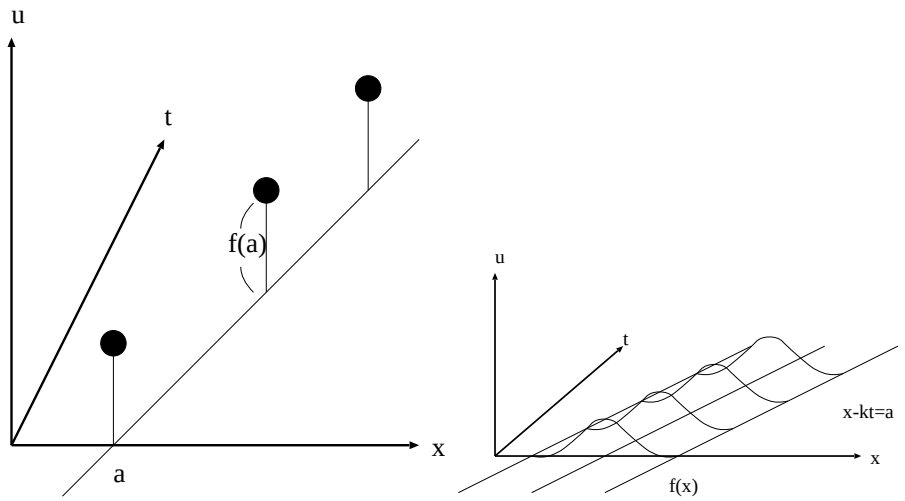
$$
u = f(\chi) + g(\tau) \tag{2.13}
$$

となるので、ここで (2.10) 式より t と x の式になおすと

$$
u = f(x - kt) + g(x + kt) \tag{2.14}
$$

となる (ただし、f, gは任意の関数)。これをダランベールの解 **(d'Alembert's solution)** という。

2.3 波動方程式の解の性質



(a) 特性曲線　　(b) 波の伝播

Fig. 2.2 波動方程式の解の性質

(2.14) 式の意味を考えるために、まず

$$u(x,t) = f(x-kt) \tag{2.15}$$

について考えてみる。これは a を定数として

$$x - kt = a \tag{2.16}$$

を満足する x, t の組に対して u が

$$u(x,t) = f(a)$$

という一定値をとることを意味している。式 (2.16) は、$x-t$ 面において直線を表すため、Fig.2.2(a) に示すように u の値はこの直線に沿って変化しない。このような曲線を特性曲線 **(characteristic curve)** と呼ぶ。 Fig.2.2(b)は (2.16) 式の a を種々に変化させたいろいろな特性曲線に沿って $u(x,t)$ の値を示した図であるが、時刻 $t=0$ での波形 $f(x)$ が形を変えずに特性曲線に沿って伝播していく様子が見てとれる。すなわち、(2.15) 式は波がそのままの形で伝播していく現象を式で表したものになっている。特に (2.15) 式で $t = 1, 2, \ldots$ を代入すると、$f(x-k), f(x-2k), \ldots$ となり、これらは $f(x)$ のグラフを右へ $k, 2k, \ldots$ ずつ平行移動したものとみなせる。したがって、波の伝播速度は k であることがわかる。

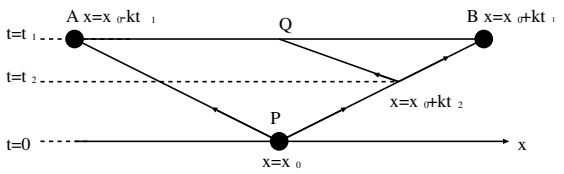


Fig. 2.3 影響領域

ダランベールの解 (2.14) 式は、 1 次元の波動方程式には 2 本の特性曲線

$$x - kt = a \ , x + kt = b$$

が存在していることを示している。そして u が時刻 $t = 0$ で (x 座標が x_0 の点 P において) ある値をもっていたとき、そのうち一部分は特性曲線 $x - kt = x_0$ に沿って時刻 t_1 で $x = x_0 + kt_1$ に達し、また別の一部分は $x + kt = x_0$ に沿って時刻 t_1 で $x = x_0 - kt_1$ に達する。さらにある部分は時刻 t_2 までは $x - kt = x_0$ に沿って $x = x_0 + kt_2$ に達し、その後 $x + kt = x_0 + 2kt_2$ に沿って、時刻 t_1 で、$x = x_0 + k(2t_2 - t_1)$ に達する。しかしいずれにしても、時刻 $t = 0$ での P の影響が時刻 t_1 までに及ぶ範囲は、Fig.2.3 では三角形 ABP の範囲に限られ、その外部には決して伝わらないことがわかる。 この領域を点 P の影響領域 **(domain of influence)** と呼ぶ。

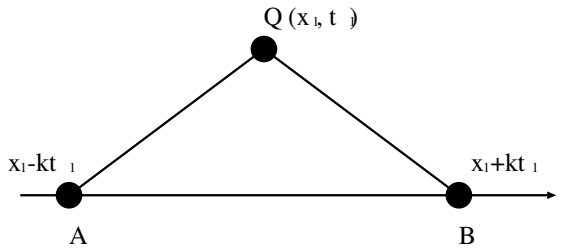


Fig. 2.4 依存領域

逆に $x - t$ 面で座標 (x_1, t_1) で表される点 Q での値は、時刻 0 でどの範囲から出発した値の影響を受けているかを調べると、Fig.2.4 の線分 AB、すなわち $(x_1 - kt_2, 0)$ と $(x_1 + kt_1)$ で挟まれた区間の点に限られることがわかる。この区間の外の点から影響領域を書いてみても、それは点 Q を含まない。このような領域を 依存領域 **(domain of dependence)** と呼ぶ。

このように、解に関する情報の伝播速度とその方向があらかじめ決まっていることが波動方程式のもつ重要な性質であり、この性質は波動方程式特有の性質である。

3　波動方程式の数値解法

3.1　差分法

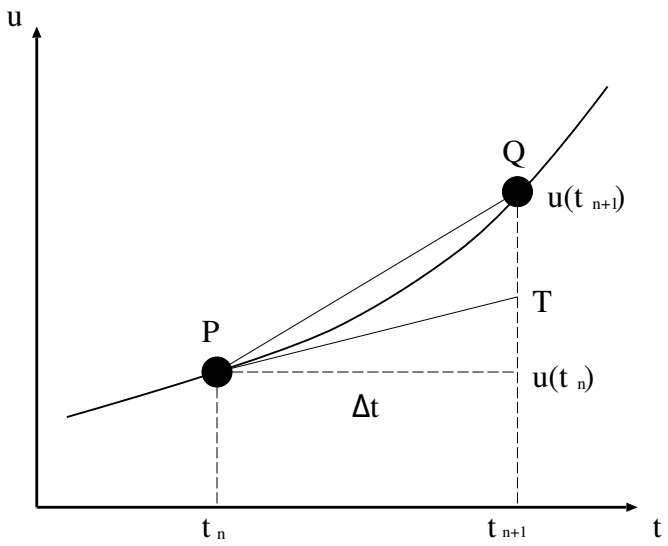


Fig. 3.1　接線 PT の傾きを弦 PQ の傾きで近似する。

独立変数 t の関数 $u = u(t)$ に対する常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \qquad (t > 0) \tag{3.1}$$

を、条件

$$u(0) = a \tag{3.2}$$

のもとで解くことを考える。

ここで、 $f(t,u)$ は与えられた t と u の関数で、適当になめらかであるとする。 a は与えられた定数である。独立変数 t を時間変数に見立てて、定数 a を関数 u の 初期値 **(initial value)** , 式 (3.2) で表される条件を初期条件 **(initial condition)** という。そしてこの型の問題を微分方程式 (3.1) 式の 初期値問題 **(initial value problem)** と呼ぶ。

この問題を解く前に、微分方程式が幾何学的にどういうことを表しているか知っておく必要がある。

横軸に t を、縦軸に u をとった 2 次元の $t-u$ 平面を考えると、(3.1) 式の解の関数 $u = u(t)$ はその平面内の 1 つの曲線を表す。(3.1) 一方、導関数 du/dt はその曲線上の各点での接線の傾きである。したがって、微分方程式 (3.1) は、点 (t,u) における解曲線の傾きが $f(t,u)$ という値をもっている、ということを表している。つまり、“ $t-u$ 平面上の各点で微分方程式 (3.1) 式の解を表す曲線の向きがあらかじめ与えられている” ということである。

一方、初期条件 (3.2) 式は、解曲線が点 $(0, a)$ を通ることを意味する。したがって、初期値問題 (3.1), (3.2) の解を求めるということは、幾何学的にいえば、点 $(0, a)$ における方向場の矢印からはじめて、それにつながる曲線を作っていくことである。

以上から、この初期値問題の解を近似的に求めるためには次のようにすればいいことがわかる。

小さい正の定数 Δt を選んで、Δt ずつ増えていく離散的な t の値 $t_1 = \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t, \ldots$、$t_n = t_{n-1} + \Delta t, \ldots$ における u の値 $u(t_1), u(t_2), u(t_3), \ldots$ を求めることを考える。“時間” 間隔 Δt を十分小さくとれば、導関数 du/dt の $t = t_n$ における値は、差分

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \tag{3.3}$$

によって近似的に表すことができる。実際、$u(t)$ の 2 次導関数が有界ならば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) &= u(t_n + \Delta t) \\ &= u(t_n) + \Delta t u'(t_n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u''(t_n + \theta_n \Delta t) \ (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

そこで (3.4) 式は、

$$\begin{aligned} \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} &= u'(t_n) + \frac{1}{2}\Delta t u''(t_n + \theta_n \Delta t) \\ &= u'(t_n) + O(\Delta t) \end{aligned}$$

と書ける。したがって、$\Delta t \to 0$ の極限で、これは $u'(t_n)$ に等しくなる。一方、微分方程式 (3.1) によって

$$u'(t_n) = f(t_n, u(t_n)) \tag{3.4}$$

であるから、

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} = u'(t_n) + O(\Delta t) = f(t_n, u(t_n)) + O(\Delta t) \tag{3.5}$$

が成り立つ。ここで $O(\Delta t)$ の値は具体的には分からないが、この値を 0 と等しいと見ると次のような方程式が成り立つ。

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = f(t_n, u_n) \tag{3.6}$$

これをもとに数列 $u_1, u_2, \ldots$ を計算することにする。一般に u_nは $u(t_n)$ と正確には等しくないが、Δt を小さくすることによって u_nは $u(t_n)$ の近似値がとれる。

さて、(3.6) 式の分母をはらって書き直し、初期条件 (3.2) 式に対応する式に伴わせると次の方程式が得られる。

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n, u_n) & (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ u_0 = a \end{cases} \tag{3.7}$$

この式は初期条件に u_0の値は与えられている。つまり (3.7) 式で $n = 0, 1, 2, \ldots,$ とかえて、$f(t_n, u_n)$ の値を計算していけば $u_1, u_2, \ldots,$ が順次に得られる。(3.6) 式は前進差分 **(forward difference)** と呼ばれ、この他にも

$$u'(t_n) \simeq \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

で表される後退差分 **(backward difference)**、

$$u'(t_n) \simeq \frac{u_{n+1} - u_{n+1}}{2\Delta t} \tag{3.9}$$

で表される中心差分 **(central difference)** とがある。

また、2 階常微分方程式においても u''が u'を微分したものと考えれば次のように表すことができる。

$$u''(t_n) = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}u'(t_n)$$

であるから

$$\begin{aligned} u''(t_n) &\simeq \frac{u'(t_{n+1}) - u'(t_n)}{\Delta t} = \frac{(u_{n+1} - u_n)/\Delta t - (u_n - u_{n-1})/\Delta t}{\Delta t} \\ &= \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

が成り立つ。

3.2 線形波動方程式の差分解析

波動方程式の初期値問題を解くための差分法について説明する。ここでは初期条件を一般化して、

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx} & (-\infty \leq x \leq \infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) & (-\infty \leq x \leq \infty) \end{cases} \tag{3.11}$$

とする。ただし、f, g は、任意の関数である。

Fig. 3.2 のように格子の番号を x 方向に $j = 0, 1, \ldots, N$,t 方向に $n = 0, 1, \ldots$ とし、格子点間隔を$\Delta t, \Delta x$ とするこの図を差分格子と呼び、差分解析をする上で便利な道具となる。さて本題に移る。

まず、 $N(x$ 軸方向の $0 \sim 1$ までの分割数),Δt を定め、$\Delta x = 1/N$ とする。また、$x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t$ とし、微分解 $u(x_j, t_n)$ に対応する差分の解を U_j^n とする。次に、(3.11) 式に (3.10) 式により差分する。

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} &= k^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \\ (j &= 1, 2, \ldots, N-1, n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{3.12}$$

この式を書き換えると、

$$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \alpha(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \tag{3.13}$$

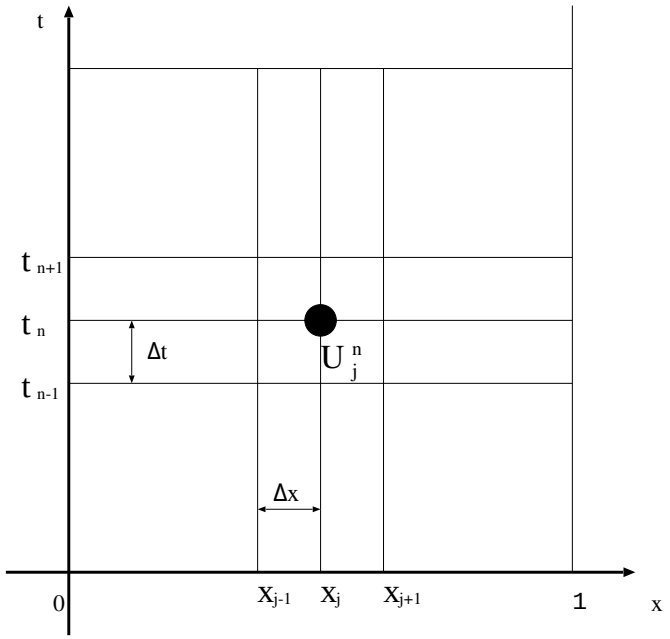


Fig. 3.2 差分格子

となる。ただし $\alpha = (k\Delta t/\Delta x)^2$ である。この式は、時刻 t_{n-1}, t_n での U から次の時刻 t_{n+1} での U が計算できるという形をしている。

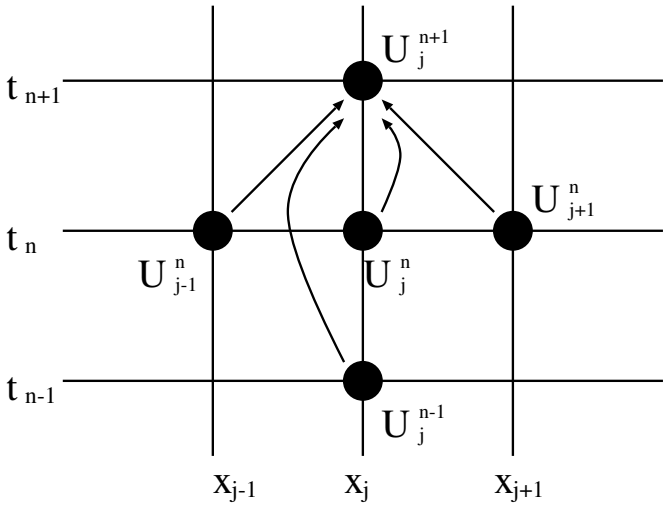


Fig. 3.3 波動方程式の差分

Fig. 3.2 のように式 (3.13) を差分格子で表すと, Fig.3.2 のようになる。この図を見ると U_j^{n+1} という値を求めるためには、$U_j^n, U_{j+1}^n, U_{j-1}^n, U_j^{n-1}$ という値を知らなくてはいけない。(3.11) 式より $n = 0$ の時は求められるが $n = 1$ の時, つまり、U_j^1をこの差分に従って求めるには U_j^{-1} の値が必要になり U_j^{-1} を仮想格子上の仮の値を用いてい求める方法もあるが、仮想格子を用いず直接 U_j^1を求めるには、(3.11) 式の初期条件

$$u_t(x,t) = g(x)$$

より前進差分を用いて,

$$\frac{U_j^1 - U_j^0}{\Delta t} = g(x)$$

ここから、

$$U_j^1 = g(x)\Delta t + U_j^0 \tag{3.14}$$

として解けばよい。また以下のような条件にすると、

$$\begin{cases} \Delta t &= k\Delta x \\ k &= 1.0 \end{cases} \tag{3.15}$$

$\alpha = 1$ となり、(3.13) 式は、

$$U_j^{n+1} = -U_j^{n-1} + U_{j+1}^n + U_{j-1}^n \tag{3.16}$$

となり、Fig.3.4 にみられるように U_j^n の値を使わない簡単な式が成り立つ。

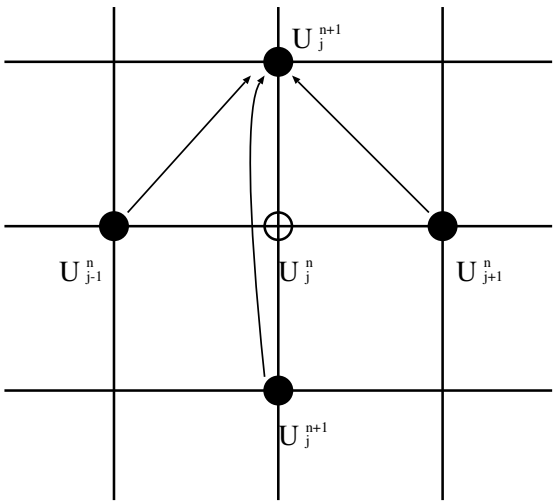


Fig. 3.4 差分格子

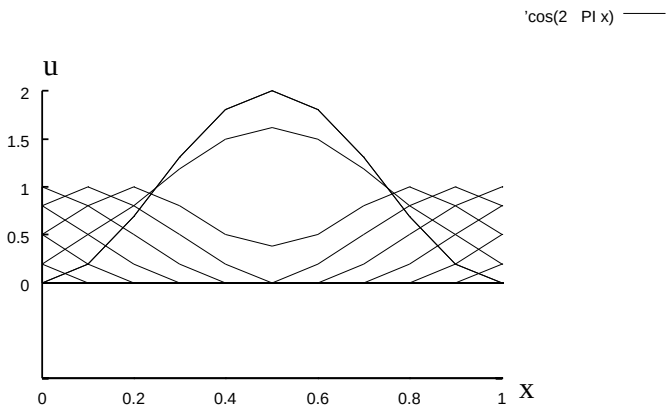


Fig. 3.5 計算結果 1

Fig.3.5 は、

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} \cos 2\pi x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

の条件のもとで数値計算を行った結果である。

3.3 半線形波動方程式の数値解析

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = u^p \ (p > 1) \tag{3.18}$$

のような波動方程式について説明する。

3.2節で行った計算は

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = 0 \tag{3.19}$$

で表される線形波動方程式であったが、(3.18) 式のような方程式は線形でなく、非線形 **(nonliner)** の方程式となり、特に半線形 **(semiliner)** と呼ばれる。

微分方程式の性質を大きく左右するのものは、方程式の 1 番高い微分の項 (主要部 **(principal part)**) であり、この (3.18) 式のような場合、

$$u_{tt} - k^2 u_{xx}$$

である。これは、(3.19) 式においての主要部と同じであり、非線形部分はこの主要部以外の部分に現れている。このように、方程式の主要部が線形の形をしている非線形方程式を半線形方程式 **(semiliner equation)** と呼ばれている。また、(3.18) 式は、半線形の形をした波動方程式ということで半線形波動方程式 **(semiliner wave equation)** と呼ぶこと

にする。この半線形波動方程式は、 3.2 節で行った線形波動方程式の差分解析と同様の方法で計算できる。ここでは以下のような条件の下で差分法を行ってみる。

$$\begin{cases} u_{tt} - k^2 u_{xx} = u^p \\ u(x,0) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases} \\ u_t(x.0) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

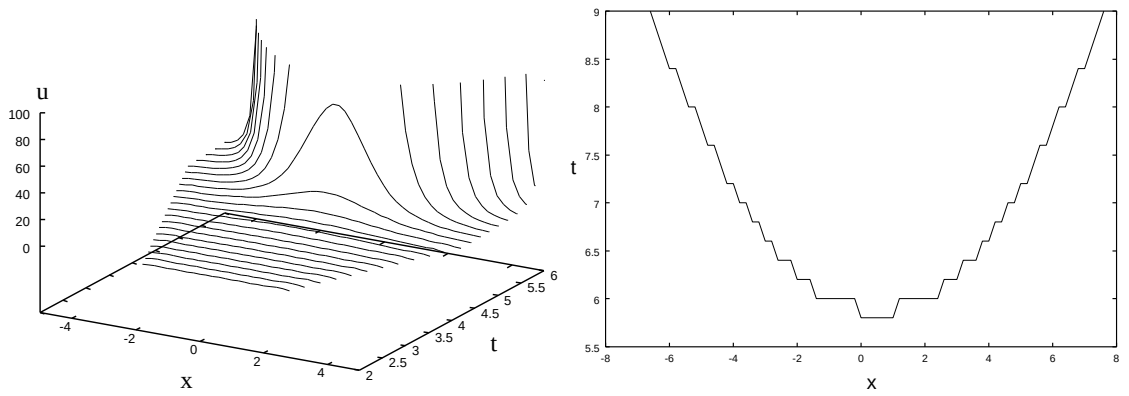
線形の時と同様に次の方程式によって差分する。

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - k^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = (U_j^{n-1})^p \tag{3.21}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N-1, n = 1, 2, \ldots)$$

ここで気をつけなければならないのが右辺の扱い方である。本来なら右辺は求めようとしている値である U_j^{n+1} とするべきであるが、このまま扱うと計算の過程が複雑なものになってしまう。U_j^n の値は 3.2 節の (3.15) 式の条件により簡単な式にしたのでここでは用いず、この時点で既に求まっている U_j^{n-1} を用いて計算を行う。つまり

$$U_j^{n+1} = -U_j^{n-1} + u_{j+1}^n + U_{j-1}^n + \Delta t U_j^{n-1} \tag{3.22}$$



(a) 半線形波動方程式の解析　　(b) 爆発面

Fig. 3.6 条件 (3.23) の結果

Fig.3.6(a) は (3.20) 式において以下の条件で数値解析を行った結果である。

$$\begin{cases} p = 2 \\ \Delta t = k\Delta x = \dfrac{1}{10} \\ f(x) = 1 - \cos 2\pi x \end{cases} \tag{3.23}$$

この図を見ると $t = 5.5$ の辺りで解が無限に発散しているのが分かる。この現象は解の爆発 **(blowup)** と呼ばれ、この爆発の様子を x ごとに見ていくと, それぞれ異なる時刻で爆発していることが分かる。これらを $x - t$ 面上で結んでいくと 1 本の曲線になる。(Fig.3.6(b)) この曲線を 爆発面 **(blowup surface)** と呼ぶ。

4 爆発面の解析

4.1 爆発面の解析法

半線形波動方程式は有限時間内に解が爆発することが知られており、その解析を行う上で、計算機上では無限大という値は持たず、計算できる範囲が限られ、有限の範囲でいかに無限の値があるところに近づけるかという問題がでてくる。そこで、爆発面の解析の方法として次のようなものが挙げられる。

1. u のある一定値以上の値を無限とみる方法。
2. u の微分をとり、そのときの接線の傾きが一定値以上のとき無限とみる方法。
3. u の積分をとり、その値がある一定値以上のときを無限とみる方法。

これらは無限に発散する時間までの近づき方に差が生まれてくる。

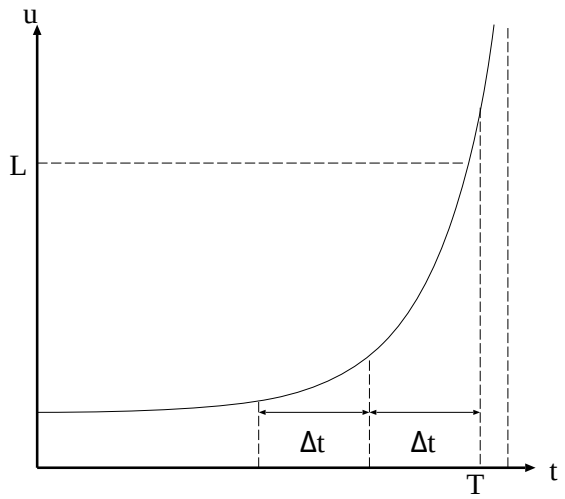


Fig. 4.1 爆発条件による解析

1 の方法ではある値 L を設定することで、 u の値が L 以上になった時点でその u の値を計算機上においての無限大とし、その時刻を爆発時間と見る方法である。このような L を爆発条件 **(blowup condition)** の閾値と呼ぶことにする。この方法を図に示したのものが Fig.4.1 である。

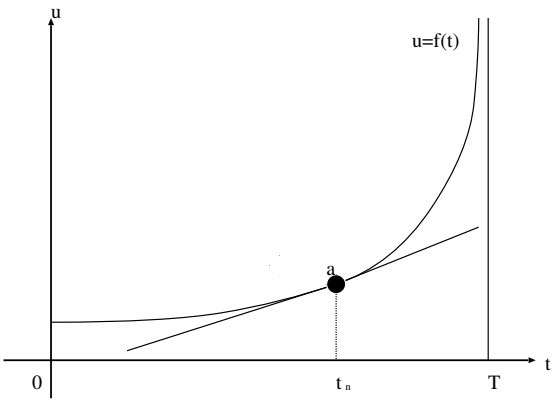


Fig. 4.2 曲線の接線

Fig. 4.2 は、ある点 (ここでは a) においての接線の傾きを示したものである。接線の傾きは T に近づく程大きくなる。この傾きが閾値 L 以上となった時点を爆発時間とする。後に示すことになるが、この方法は実際には 1 の方法よりも早い時刻に閾値に到達してしまう。そこで 3 の方法では、微分とまったく逆の計算を行う積分の値をすることで、閾値に遅い時刻に到達するのではないかと考えた。

4.2 爆発スピード

4.1 節に示した方法がどのような様子で無限に発散する時間に近づくのかを説明したい。

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = u^p \qquad (p > 1, u > 0) \tag{4.1}$$

式 (4.1) に関して t の変化による u の爆発するスピードは、次の常微分方程式の解に表される爆発のスピードに等しいことが知られている。

$$v''(t) = v^p \tag{4.2}$$

ここでは $v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1$ とする。このとき (4.2) 式の両辺に $2v'$ を掛けると

$$2v'v'' = 2v^p v'$$

$$2v'\frac{dv'}{dt} = 2v^p \frac{dv}{dt}$$

両辺の dt を消去し、それぞれ dv', dv について積分をする

$$\int 2v'dv' = \int 2v^p dv$$

$$(v')^2 = \frac{2}{p+1}v^{p+1} + c$$

これより

$$v' = \sqrt{\frac{2}{p+1}v^{p+1} + c}$$

となるので、よって v' については

$$v' = \sqrt{\frac{2}{p+1}}v^{(p+1)/2} \tag{4.3}$$

という式が成り立つ。ここでは $v >> c$ と見て $c = 0$ とした。 ここで $v' = f(v)$ とおくと、$dv/f(v) = dt$ が成り立つ。よって T を爆発時刻とすると、

$$\lim_{t \to T-0} v(t) = \infty$$

より

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt = t \tag{4.4}$$

$$\int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^T dt = T \tag{4.5}$$

(4.4) 式から (4.5) を引くと 、

$$\int_{v_t}^{\infty} \frac{dv}{f(v)} = T - t \tag{4.6}$$

が求まる。(4.3) 式より

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_v^\infty \frac{dv}{f(v)} = \int^\infty \frac{1}{\sqrt{2/2+1}} v^{-p-1/2} dv \\ &= \textstyle\sqrt{\frac{p+1}{2}} \frac{-2}{p-1} v^{p-1/2}\end{aligned}$$

であるので、

$$v(t) = \alpha_1 (T-t)^{-2/(p-1)} \tag{4.7}$$

が成り立つ。これが u が爆発するスピードである。式 (4.7) を変形させることによって、波動方程式の解の微分・積分による爆発スピードがわかることになる。

微分は式 (4.3) に 、式 (4.7) を代入することで、

$$v' = \begin{cases} \alpha_2 (T-t)^{-(p+1)/(p-1)} & (p \neq 3 \text{ の時}) \\ -\alpha_3 \log |T-t| & (p = 3 \text{ の時}) \end{cases} \tag{4.8}$$

	$v(t)$	$v'(t)$	$\int v(t)dt$
$p=2$	$\alpha_1(T-t)^{-2}$	$\alpha_2(T-t)^{-3}$	$\alpha_3(T-t)^{-1}$
$p=3$	$\alpha_1(T-t)^{-1}$	$\alpha_2(T-t)^{-2}$	$-\alpha_1\log\lvert T-t\rvert$
$p=4$	$\alpha_1(T-t)^{-2/3}$	$\alpha_2(T-t)^{-5/3}$	$\alpha_3(T-t)^{1/3}$

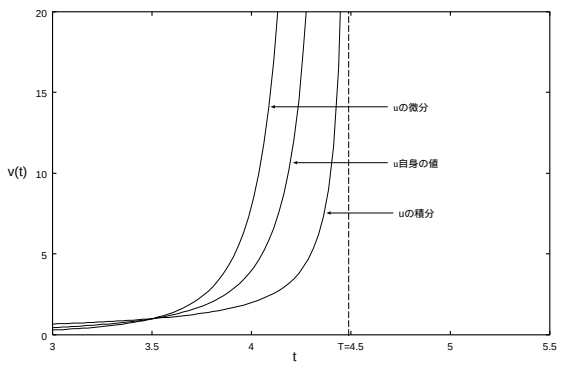
Table 4.1 p の変化による式の変化

が求まる。

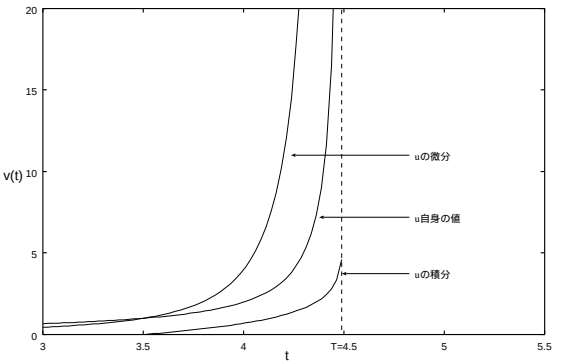
積分は、式 (4.7) を積分して、

$$\int v(t)dt = -\alpha_3(T-t)^{-(3-p)/(p-1)} + c_0 \tag{4.9}$$

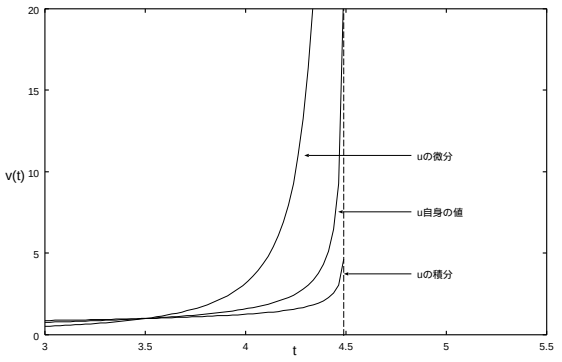
となる。(ただし $p \neq 3$)



(a) $p=2$ の場合



(b) $p=3$ の場合



(c) $p=4$ の場合

Fig. 4.3 p の変化による爆発の様子

図 4.3(a) , 図 4.3(b), 図 4.3(c)はそれぞれ $p = 2, p = 3, P = 4$ の時の $v(t)$ の爆発の様子である。この図は $T = 4.5$ とし、実際には異なるが $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ として表 4.1 から計算したものである。

この図 4.3(a) を見るとやはり積分値が $v(t)$ の値が小さいうちに T , つまり爆発時間に最も近づいているのがわかる。しかし, Fig. 4.3(b) や Fig.4.3(c)を見ると積分値は T の辺りでグラフが止まってしまっている。半線形波動方程式に至ってもこれに近いグラフを描くと思われるのでこれでは解析を行うのは困難である。

4.3 微分による爆発面の解析

u の微分を計算する方法について述べる。

まず、差分法によって Δt ごとの u の値は既に求まっている。そこでこれらの値を使うことによって、次の式で u の微分値は求まる。ここでは u の微分値を u_t とする。

$$u_t(x_j, t_n) = \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} \tag{4.10}$$

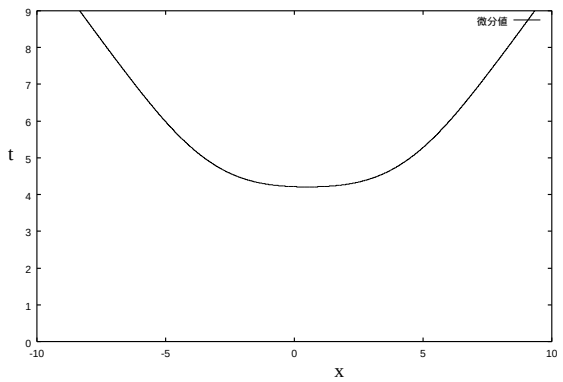


Fig. 4.4 微分による爆発面の解析結果

Fig.4.4 は、この方法を用いてでた結果である。条件は以下のとおりである。

$$\begin{cases} p = 2 \\ \Delta t = k\Delta x = \dfrac{1}{1000} \\ f(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2\pi x & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases} \\ L = 10000 \end{cases}$$

4.4 積分による爆発面の解析

定積分

$$I(u) = \int_a^b u(t)dt \tag{4.11}$$

を求めるためには、次のように考える。

線分 $[a, b]$ 上に n この分点 $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ をとり、その小区間の長さを Δt とする。各分点での 関数 $u(t)$ の値を $U_0, U_1, \ldots, U_n$ とすれば、次の公式が成り立つ

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t)dt &\simeq \Delta t \left(\frac{U_0 + U_1}{2} + \frac{U_1 + U_2}{2} + \ldots + \frac{U_{n-1} + U_n}{2} \right) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^{n} (U_{n-1} + U_n) \end{aligned} \tag{4.12}$$

これを台形公式と呼ぶ。

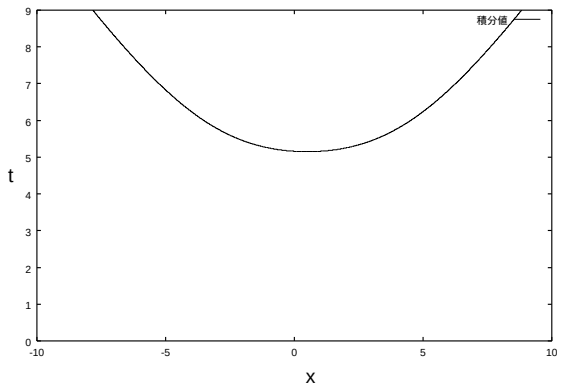


Fig. 4.5 積分による爆発面の解析結果

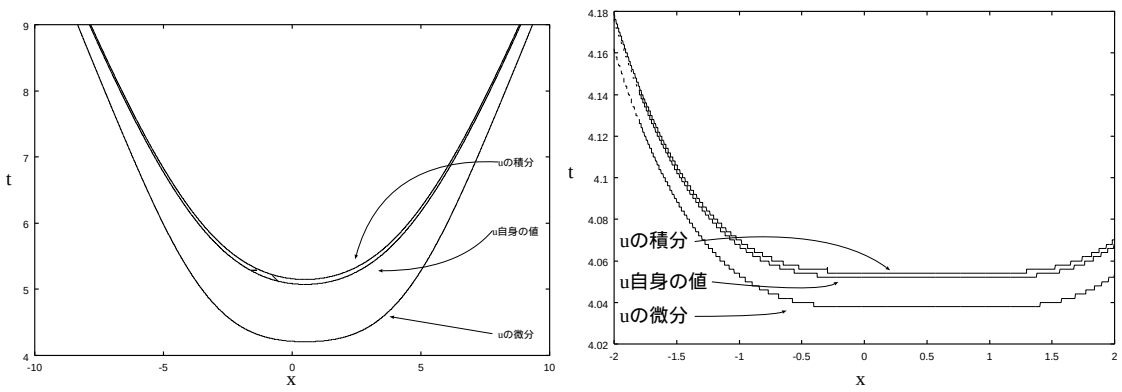
Fig.4.5 は、この方法を用いてでた結果である。用いた初期条件、爆発条件は以下のとおりである。

$$\begin{cases} p = 2 \\ \Delta t = k\Delta x = \dfrac{1}{1000} \\ f(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2\pi x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases} \\ L = 10000 \end{cases}$$

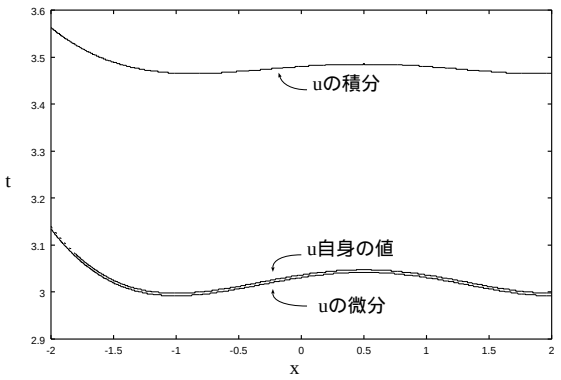
4.5 それぞれの条件の変化による爆発面の位置の変化

それでは, これらを比較するとどのようになるか。$p = 2$ の場合にそれぞれの計算を同じ以下の図のとおりの初期条件と閾値を用いて行ってみた。

$$
\begin{cases}
p = 2 \\
\Delta t = k\Delta x = \dfrac{1}{1000} \\
f(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2\pi x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, x > 1) \end{cases} \\
L = 10000
\end{cases}
$$



(a) $p = 2$ の結果　　(b) $p = 3$ の結果



(c) $p = 4$ の結果

Fig. 4.6　同じ条件下での p の値の変化による結果

Fig.4.6(a) を見るとやはり同じ条件の下では、微分の値が早い時間のうちに閾値に達している。先と同じ条件で $p = 3$ の場合はどうであるか。これらは、位置はずれてはいるが、$p = 2$ の時と同じようにすべて閾値に達している。閾値の値が小さいのであろうか。また $p = 4$ において波形はその形を変え、u 自身の値は、微分した値に近づいた。

5　まとめ

今回、爆発面の観察を行うために同じ条件での数値計算を行い、それ自身の値とその値を微分、積分した値の爆発面の判別の様子を比べた。実験より確かに積分した値が最も遅く、真の爆発面に最も近づく。また、微分した値では最も早い時刻に発散したと判定され、このことからどの方法にも一長一短があること分かった。積分は爆発時刻までが早いものや、閾値が小さい場合、特に $p \leq 3$ の場合には、より真の爆発面に近づいているので、その点で有効であるが、普通に解析を行って、なかなか計算機上で爆発を起こさないような条件の場合には、爆発の様子を観察することはできないのであまり有効ではない。逆に微分の値は積分の値と違い、その爆発までのスピードの早さから、爆発を起こしにくい条件の場合にその爆発面の形を観察できるという利点がある。これらに共通することは、差分のしたままの値に比べると爆発面の形が変わらないという点が挙げられる。

今回の実験の結果では $p = 3$ や $p = 4$ においても積分値で閾値を越えた。特に $p = 3$ において閾値の値を大きくすることによりもとの u 自身の値による爆発面と重なっていたものもあった。

また反省すべき点として、これらの方法の精度などの評価を行わなかったことがある。また数値計算と理論とのずれがあったりと多くの課題が残ってしまった。

参考文献

[1] 高見 穎郎、河村 哲也：偏微分方程式の差分解法 (東京大学出版会)

[2] 村山 正孝：基礎物理学選書 8 振動-波動 (裳華房)

[3] 伊藤 正夫、藤野 和建：数値計算の常識 (共立出版)

[4] 河村 哲也：応用偏微分方程式 (共立出版 1998)

[5] 登坂 宣好、大西 和榮：偏微分方程式の数値シミュレーション (東京大学出版会 1991)

[6] 竹野 茂治 ：非線形偏微分方程式入門、pp8–10(1998)

[7] 太田 雅人 :" 非線形波動方程式の爆発解について"、第 19 回 発展方程式若手セミナー報告集,pp78–79(1998)

[8] 小松 勇作 ：数学英和・和英辞典 (共立出版、1979)

[9] 矢野 健太郎、石原 繁 ：基礎解析コース 微分方程式 (裳華房,1994)

[10] Caffarelli L.A. and Friedman A : "Differentiability of the blow-up curve for one-dimensional wave equations ", Arch.Rational Mech.Anal. **91** pp83–98 (1985)