一次補間法による半線形波動方程式の近似爆発面の精密化

平成11年 2月 8日

情報電子工学科
大橋 洋

目 次

1 はじめに **1**

2 波動方程式 **1**
2.1 一次元波動方程式 1
2.2 差分近似 3
2.3 初期値・境界値問題 6
2.4 一次元波動方程式の解 8
2.5 特性曲線 10

3 移流方程式 **11**
3.1 一次元移流方程式の解 11
3.2 半線形移流方程式 13
3.3 半線形移流方程式の解の爆発 13

4 特性曲線法 **14**
4.1 特性曲線法による移流方程式の差分 14
4.2 特性曲線法による波動方程式の差分 16

5 爆発面の数値計算 **17**
5.1 爆発条件 17
5.2 半線形移流方程式の爆発面 19
5.3 半線形波動方程式の爆発面 20

6 近似爆発面の精密化 **23**
6.1 一次補間による精密化 23
6.2 ニュートン法 24
6.3 非線形項の格子の操作 26
6.4 補間･補外法の制限 27

7 まとめ **29**

参考文献 **31**

概要

半線形波動方程式は、解を具体的な式であらわすことはできないが、確かに滑らかな爆発面があることが証明されている。またそれと関係のある半線形移流方程式については、解、そして爆発面を表す式がすでに存在する。本論文では、どのような形状かまだ知られていない、半線形波動方程式の爆発面を数値計算することからはじまる。この半線形波動方程式と半線形移流方程式の爆発面を比較し、半線形波動方程式の爆発面を評価することと、その爆発面の精度を高めることが目的である。

1　はじめに

今回のテーマでメインとなるものは、波動方程式である。必要なのは、半線形波動方程式ではあるが、より理解できるように、 2 章では弦の振動現象を表す一次元波動方程式から説明する。一方、半線形波動方程式の解は時間の経過とともに無限大に発散することが知られており、爆発面について説明することになる。この爆発面とは、個々の位置 x に対して、解が無限大に発散する時刻 t を $x-t$ 平面上でつないでいったときに現れる、滑らかな曲線のことであり、半線形波動方程式の場合、具体的な式にあらわすことができない。そこで 3 章では関係の深い移流方程式の説明を行う。半線形移流方程式の場合にも、解が無限大に発散することが知られているが、爆発面を具体的な式であらわすことができる。このことを利用し、半線形波動方程式の爆発面を評価することが目的である。 4 章ではより精度を高めるため誤差が最も少ない特性曲線法について説明し、 5 章では半線形波動方程式と半線形移流方程式の爆発面を数値計算し評価したところ、この 2 つ異なる性質をもっていたため、 6 章では半線形波動方程式の近似爆発面の精密化を目標とし、どのような制限がともなうか考察する。

2　波動方程式

2.1　一次元波動方程式

一次元波動方程式とは、弦の振動を支配する方程式である。まず、この一次元波動方程式を導く。必要な条件として

- 微小振動
- 弦は一様な密度
- 弦は一定な断面積
- 張力はいたるところで一定
- 重力は張力に比べて無視できるものとする

の 5 つである。

もとになるのはニュートンの第 2 法則である。Fig.2.1に示すように、水平方向を x、鉛直方向を yとし張力 T は接線方向に働くため微小部分に働く力の垂直成分 fは

$$f = T\sin(\theta+\Delta\theta) - T\sin\theta \tag{2.1}$$

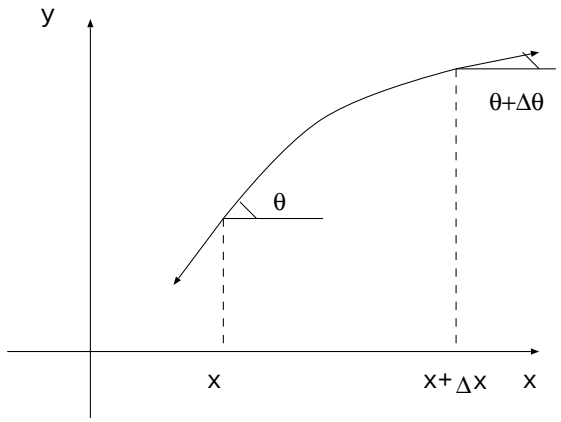

Fig. 2.1 振動によって作用する力

となる。微小振動を仮定したため、$\theta \ll 1$ とみなすことができるので、テイラー展開をもちいて

$$\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.2}$$

$$\sin(\theta + \Delta\theta \simeq \tan(\theta + \Delta\theta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) x + \Delta x \tag{2.3}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2.4}$$

を得る。これを (1) 式に代入し $O(\Delta x^2)$ を無視すれば

$$f = T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - T\frac{\partial u}{\partial x} = T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となる。
また、弦の微小部分の質量は、単位長さ当たりの質量 (線密度) をρ としたとき$\rho\Delta x$ であり、 t を時刻とすると、弦の加速度は$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$で表せる。したがってニュートンの運動方程式から

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

故に

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

ただし、$k = \sqrt{T/\rho}$ とした。
(2.5) 式が弦の振動を支配する方程式である。

2.2 差分近似

差分法とは簡単にいえば、微分方程式の微分 (商) を差分 (商) におき換えて得られる、差分方程式を解く方法である。
まず微分を差分で近似する方法として

- 微分の定義から導く
- テイラー展開から導く

と 2 つの方法が存在する。

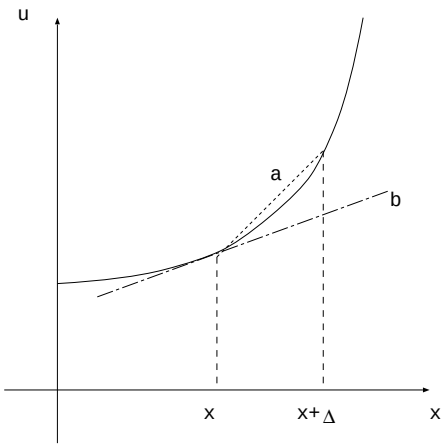

Fig. 2.2 前進差分

もっとも直観的に、求められる微分の定義から示すと

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{u(x+\Delta) - u(x)}{\Delta} \simeq \frac{u(x+\Delta) - u(x)}{\Delta} \qquad (0 < \Delta \ll 1) \tag{2.6}$$

x 方向に対して正の方向に進んだ点をとるため、(2.6) を前進差分 (近似) と呼ぶ。これを Fig.2.2に示す。a は隣接の 2 点を通る傾きで近似 (差分) したもので (2.6) の右辺を表し、b は接線の傾き (微分) で (2.6) の左辺を表したものである。

また、テイラー展開を用い、機械的に差分近似式を構成することができる。

$$u(x+\Delta) = u(x) + \Delta u'(x) + \frac{\Delta^2}{2!}u''(x) + \cdots$$

であるから

$$\frac{u(x+\Delta)-u(x)}{\Delta} = u'(x) + O(\Delta)$$

となる。
この場合

$$O(\Delta) = \frac{u''}{2!}\Delta + \frac{u'''}{3!}\Delta^2 + \cdots$$

である。
$\Delta \ll 1$ であるとき、もっとも絶対値の大きな項はΔを含む項であるということである。$O(\Delta)$ は、おおよそΔのオーダーの大きさになるということを示す記法である。この $O(\Delta)$ が差分近似したときの誤差を表す。

さらに後退差分、中心差分をそれぞれ求めると

$$u(x-\Delta) = u(x) - \Delta u'(x) + \frac{\Delta^2}{2}u''(x) - \cdots$$

となるから, 後退差分は

$$\frac{u(x)-u(x-\Delta)}{\Delta} = u'(x) + O(\Delta) \tag{2.7}$$

となる。これを Fig.2.3 に示す。a は (2.7) を表す。

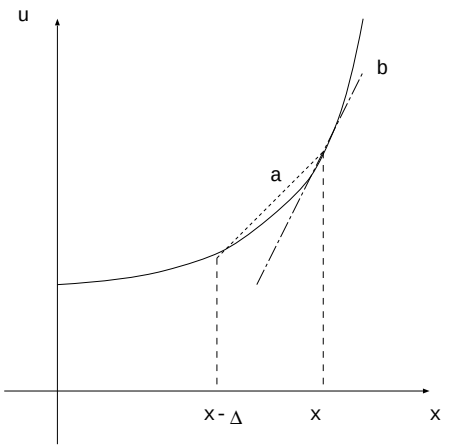

Fig. 2.3 後退差分

中心差分については展開した式から

$$u(x+\Delta) - u(x-\Delta) = 2\Delta u'(x) + \frac{\Delta^3}{6}u'''(x) + \cdots$$

$$\frac{u(x+\Delta)-u(x-\Delta)}{2\Delta} = u'(x) + O(\Delta^2) \tag{2.8}$$

となる。これを Fig.2.4に示す。a は (2.8) を表す。

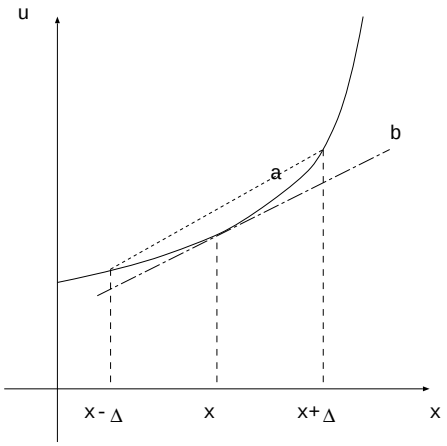

Fig. 2.4 中心差分

Δが十分に小さいとして、Δのオーダーだけから判断すれば、このように中心差分が、前進、後退差分に比べて誤差が少ないことがわかる。

次に 2 階微分の近似をつくるため、テイラー展開した式の和、$u(x+\Delta)+u(x-\Delta)$ を計算すれば、

$$u(x+\Delta)+u(x-\Delta) = 2u(x) + \Delta^2 u''(x) + \frac{2}{4!}\Delta^4 u^{(4)}(x) + \cdots$$

となり、

$$\frac{u(x-\Delta)-2u(x)+u(x+\Delta)}{\Delta^2} = u''(x) + O(\Delta^2) \tag{2.9}$$

が得られる。
(2.9) は 2 階微分の近似として、しばしば用いられる関係式である。

一次元波動方程式を差分法で考える場合、u が x と t の 2 変数関数であるため、Fig.2.5 のように格子に区切られた点 (格子点) $P(x_j, t_n)$ での値は $u(x_j, t_n)$ となる。しかし、これからは簡略化し、見やすくするため

$$u_j^n = u(x_j, t_n)$$

と表す (一般に時間に関する添字は上添字で表す。詳しくは文献 [1])。一次元波動方程式は (2.9) より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_j^{n-1} - 2u_j^n + u_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} - k^2 \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.10}$$

と近似される。

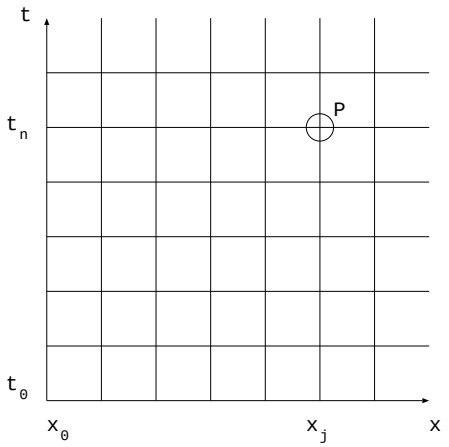

Fig. 2.5

2.3 初期値 · 境界値問題

初期条件とは、t が 0 のとき u が x について、どのように定められているかという条件である。一方、境界条件はある領域の内部で問題が与えられたとき、その境界上で間数値ないしはその導関数、あるいはそれら両方の値が指定されるものである。
初期値·境界値問題は、これら 2 つの条件から時間とともに関数 u を求める問題である。

一次元波動方程式の初期値 · 境界値問題

$$\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = 0 & (t > 0) \quad \text{(境界条件)} \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) & (0 < x < 1) \quad \text{(初期条件)} \end{cases}$$

を考えるために、(2.10) より、

$$\frac{u_j^{n-1} - 2u_j^n + u_j^{n+1}}{(\Delta t)^2} = k^2 \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_j^{n-1} - u_j^n + u_j^{n+1} = k^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

$$u_j^{n+1} = \mu^2 u_{j-1}^n + 2(1-\mu^2)u_j^n + \mu^2 u_{j+1}^n - u_j^{n-1} \tag{2.11}$$

となり、 (2.11) を使う。ただし、$\mu = k\Delta t/\Delta x$
とした。スキームの安定性を考慮すれば、$\mu \leq 1$ が要求される。

ここで、(2.11) より u_j^1 を求めるには、u_j^0,u_j^{-1}が必要になってくる。u_j^0 は、初期値から求められるが、u_j^{-1}は存在しないため (2.11) では求められない。そこで初期条件からu_j^1を求める。

初期条件 $u_t(x,0) = g(x)$ から前進差分すれば

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = g(x_j)$$
$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t g(x_j) \tag{2.12}$$

と導かれ、(2.12) より u_j^1 を求めることができる。

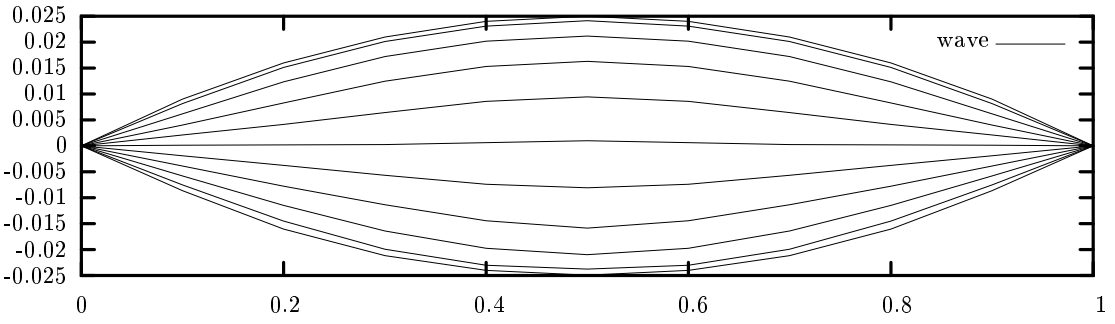

Fig. 2.6 弦の振動

例として示す。

弦の振動現象を数値計算するにあたって、次のような初期条件、境界条件を設定した。
初期条件

$$f(x) = \frac{1}{10}x(1-x)$$
$$g(x) = 0$$

境界条件

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$k = 1$ とする。

グラフに表すと Fig.2.6になる。
弦が振動しているようすがわかる。

2.4 一次元波動方程式の解

一次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を解くために変数変換

$$\xi = x - kt \quad , \quad \eta = x + kt$$

を行い、独立変数をξ, ηに換える。このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -k\frac{\partial u}{\partial \xi} + k\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\
&= -k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-k\frac{\partial u}{\partial \xi} + k\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + k\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-k\frac{\partial u}{\partial \xi} + k\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= k^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
&= k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

である。同様に

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

これらを一次元波動方程式に代入して

$$k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)-k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=0$$

$$\begin{aligned}-4k^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} &= 0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} &= 0 \qquad (2.13)\end{aligned}$$

が得られる。(2.13) 式をξに関して積分すれば$\widetilde{g}$を任意関数として

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\widetilde{g}(\eta)$$

となりさらにηについて積分すれば

$$u=f(\xi)+\int\widetilde{g}(\eta)d\eta=f(\xi)+g(\eta)$$

が得られる。ここで f,g は任意関数である。
もとの変数にもどせば解

$$u(x,t)=f(x-kt)+g(x+kt) \qquad (2.14)$$

を得る。この解をダランベールの解と呼ぶ。なお一次元波動方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

または

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

と書き換えられる。すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (2.16)$$

の解は一次元波動方程式の解である。この場合、ダランベールの解の右辺の第 1 項がはじめの方程式、第 2 項が 2 番目の方程式の解になっていることは、代入して次のように確かめることができる。$x-kt=a\ ,\ x+kt=b$ とおくと、合成関数の微分法より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x-kt)}{\partial t}+k\frac{\partial f(x-kt)}{\partial x} &= \frac{\partial(x-kt)}{\partial t}f'(a)+k\frac{\partial(x-kt)}{\partial x}f'(a)\\ &= -kf'(a)+kf'(a)=0 \qquad (2.17)\\ \frac{\partial g(x+kt)}{\partial t}-k\frac{\partial g(x+kt)}{\partial x} &= \frac{\partial(x+kt)}{\partial t}g'(b)-k\frac{\partial(x+kt)}{\partial x}g'(b)\\ &= kg'(b)-kg'(b)=0 \qquad (2.18)\end{aligned}$$

となり、(2.15),(2.16) が成立する。このように 2 階偏微分方程式は任意関数を 2 つ含む解をもつ。
また

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.19}$$

は移流方程式と呼ばれている。

2.5 特性曲線

はじめに移流方程式の解

$$u(x,t) = f(x-kt)$$

の性質について考える。この式は x_0を定数として

$$x - kt = x_0$$

を満足する x, t の組に対して u が

$$u(x,t) = f(x_0)$$

という一定値をとることを意味している。波が $x-t$ 平面の $x-kt=x_0$にそって平行移動する様子が $\mathrm{Fig.2.7}$ からわかる。その曲線を特性曲線 **(characteristics)** という。

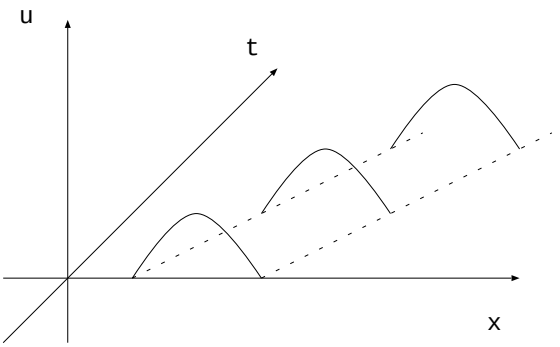

Fig. 2.7 特性曲線

また波をそのままの形で $t = 1, 2, 3\cdots$となるにつれ $k, 2k, 3k\cdots$と波を右に平行移動させる。したがって、波の伝播速度は kであることがわかる。
ダランベールの解は波動方程式に 2 方向の特性曲線 $x-kt=a$ 、 $x+kt=b$ があることを示している。波の推移を $\mathrm{Fig.2.8}$に表す。

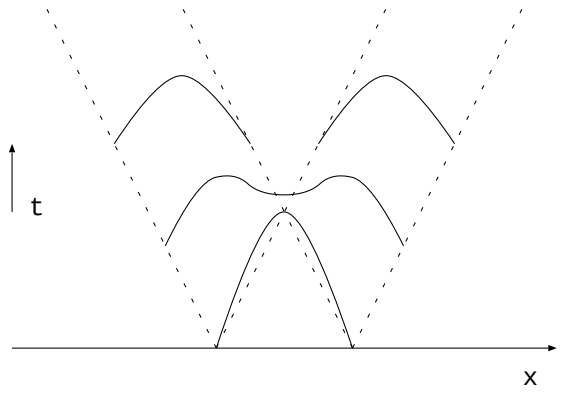

Fig. 2.8 波動方程式の波の推移

Fig.2.8より、数方向の特性曲線を持つ場合、関数値は特性曲線上で一定であるとは限らないことがわかる。

3 移流方程式

3.1 一次元移流方程式の解

移流方程式の解が

$$u(x,t) = f(x-kt) \tag{3.1}$$

であることを (2.17) 述べたが、これを特性曲線を使って求めてみる。
方程式 (2.19) に対する初期条件を

$$u(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

とするとき、$u(x,t) = f(x-kt)$ が得られることを示す。
ここで特性曲線から $x = kt + x_0$とおけば

$$\frac{dx}{dt} = k$$

となる。

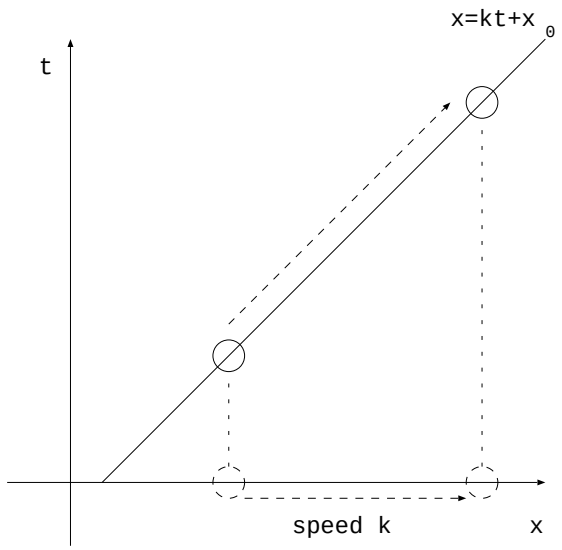

Fig. 3.1 x 軸上を速度 k で移動する点

Fig.(3.1) に示すように x 軸上で点が kの速さで移動しているとみなせばこの直線上の点での u の値を $v(t)$ とおくと

$$v(t) = u(kt + x_0, t)$$

このとき合成関数の微分法により

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{d}{dt}u(kt + x_0, t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, kt + x_0)\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}(kt + x_0, t)\frac{d(kt + x_0)}{dt} \qquad (3.2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(kt + x_0, t) + k\frac{\partial u}{\partial x}(kt + x_0, t) \qquad (3.3) \end{aligned}$$

となる。

この最後の式は移流方程式の左辺に $x = kt + x_0$を代入した式に等しいので

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

となり、$v(t)$ は定数であることがわかる。よって

$$v(t) = v(0)$$

となり、これを u に戻せば、初期条件から

$$u(kt + x_0, t) = u(x_0, 0) = f(x_0)$$

となる。$x = kt + x_0$を $x_0 = x - kt$ として代入すれば

$$u(x, t) = f(x - kt)$$

となり移流方程式 (2.19) の解が (3.1) であることが証明された。

3.2 半線形移流方程式

半線形移流方程式を考える。

$$u_t + ku_x = u^2$$

このように、微分方程式の主要部 $u_t + ku_x$ が線形であり、主要部以外の項が非線形である方程式を半線形 と呼ぶ。
この解を特性曲線を使って求めてみる。
初期条件を $u(x,0) = f(x)$ とする。この方程式の特性曲線は $x = kt + x_0$ なので $v(t) = u(kt + x_0, t)$ とすると

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(kt + x_0, t) + k\frac{\partial u}{\partial x}(kt + x_0, t) = u(kt + x_0, t)^2 = v(t)^2$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= v^2 \\ \frac{1}{v^2}dv &= dt \end{aligned}$$

変数分離形なので、ここで $0 \sim t$ の範囲で両辺積分すれば

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{v^2}dv &= \int_0^t dt \\ -\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v(0)} &= t \\ v(t) &= \frac{1}{\frac{1}{v(0)} - t} = \frac{v(0)}{1 - v(0)t} \end{aligned}$$

となり、これを u に戻して、$x_0 = x - kt$ を代入すると

$$\begin{aligned} u(kt + x_0, t) &= \frac{u(x_0, 0)}{1 - u(x_0, 0)t} \\ u(x, t) &= \frac{f(x - kt)}{1 - f(x - kt)t} \end{aligned}$$

と解が得られる。

3.3 半線形移流方程式の解の爆発

半線形移流方程式 (2.19) の解

$$u(x,t) = \frac{f(x - kt)}{1 - f(x - kt)t}$$

について考えてみる。この解からわかることは

$$tf(x - kt) = 1 \quad (t > 0)$$

であるときに解は無限大に発散することがわかる。これを解の爆発 (**blowup**) と呼ぶ。
ここで特性曲線 $x_0 = x - kt$ にそって考えると、

$$t = \frac{1}{f(x-kt)} = \frac{1}{f(x_0)} \tag{3.4}$$

だから、各特性曲線によって爆発時刻が異なることがわかる。
(3.4) によってできる曲線を爆発境界 (**blowup-boundary**) 、または 爆発曲線 (**blowup-curve**) と呼ぶ。

4 特性曲線法

4.1 特性曲線法による移流方程式の差分

前進、後退、中心による差分

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to \frac{\Delta u}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \to \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

のような縦方向と横方向の差分とは異なり、特性曲線法とは特性曲線に沿った差分によって近似する方法である。格子の違いを Fig.4.1, Fig.4.2 に示す。文献 [7] によれば、この特性曲線法が最も誤差が少ないとされている。

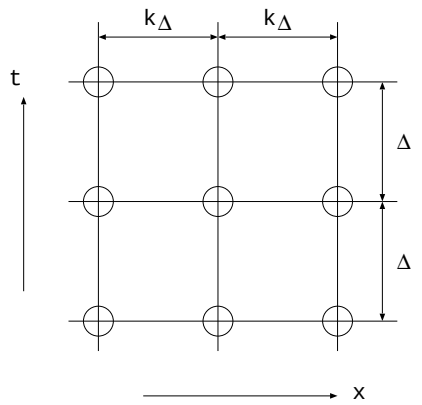

Fig. 4.1 垂直水平方向の格子

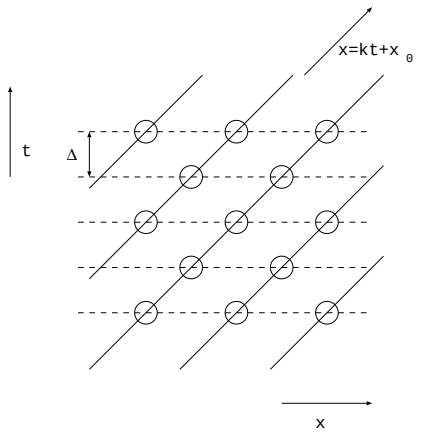

Fig. 4.2 特性方向の格子

移流方程式

$$u_t + ku_x = 0$$

から斜め方向、つまり特性曲線に沿った方向に差分を求めてみる。

$$\frac{d}{dt}u(kt + x_0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = u_t + ku_x \tag{4.1}$$

ここから特性曲線法の基本的な式が求まる。
h を$\Delta(\Delta << 1)$ とおき差分化したものは

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u(kt + x_0, t) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(k(t+h) + x_0, t+h) - u(kt + x_0, t)}{h} \\
&\simeq \frac{u(kt + k\Delta + x_0, t + \Delta) - u(kt + x_0, t)}{\Delta} \\
&= \frac{u(x + k\Delta, t + \Delta) - u(x, t)}{\Delta} \qquad (x = x_0 + kt)
\end{aligned}$$

よって、(4.1) より

$$\frac{u(x + k\Delta, t + \Delta) - u(x, t)}{\Delta} \simeq u_t + ku_x \tag{4.2}$$

となり特性曲線法の基本的な差分が求められる。

4.2 特性曲線法による波動方程式の差分

波動方程式

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = f(x,t)$$

について差分化したものを求める。因数分解すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x,t)$$

ここで vという関数を

$$v = u_t - ku_x$$

とおけば、次のような連立方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} u_t - ku_x = v \\ v_t + kv_x = f(x,t) \end{cases} \tag{4.3}$$

特性曲線法の基本式 (4.2) より (4.3) を差分化すると、

$$\frac{u(x-k\Delta, t+\Delta) - u(x,t)}{\Delta} = v(x,t) \tag{4.4}$$

$$\frac{v(x+k\Delta, t+\Delta) - v(x,t)}{\Delta} = f(x,t) \tag{4.5}$$

となる。(4.4) において x を $x+k\Delta$, t を $t+\Delta$とすると

$$\begin{aligned} &\frac{u((x+k\Delta)-k\Delta, (t+\Delta)+\Delta) - u(x+k\Delta, t+\Delta)}{\Delta} \\ &= \frac{u(x, t+2\Delta) - u(x+k\Delta, t+\Delta)}{\Delta} = v(x+k\Delta, t+\Delta) \end{aligned} \tag{4.6}$$

簡潔に示すため、各点の座標を

$$\begin{aligned} P_1 &= (x,t) \\ P_2 &= (x-k\Delta, t+\Delta) \\ P_3 &= (x+k\Delta, t+\Delta) \\ P_4 &= (x, 2\Delta) \end{aligned}$$

とおき、(4.4)、(4.5)、(4.6) 式を表すならば

$$\frac{u(P_2) - u(P_1)}{\Delta} = v(P_1) \tag{4.7}$$

$$\frac{v(P_3) - v(P_1)}{\Delta} = f(P_1) \tag{4.8}$$

$$\frac{u(P_4) - u(P_3)}{\Delta} = v(P_3) \tag{4.9}$$

となり、(4.7)、(4.9) 式を (4.8) 式に代入し

$$\frac{\frac{u(P_4)-u(P_3)}{\Delta}-\frac{u(P_2)-u(P_1)}{\Delta}}{\Delta}=\frac{u(P_4)-u(P_3)-u(P_2)+u(P_1)}{\Delta^2} \quad = \quad f(P_1)$$

よって、

$$u(P_4)=f(P_1)\Delta^2-u(P_1)+u(P_2)+u(P_3)$$

となり、この式から $u(P_4)$ は $u(P_1),u(P_2),u(P_3)$ から求められる (Fig.4.3)。

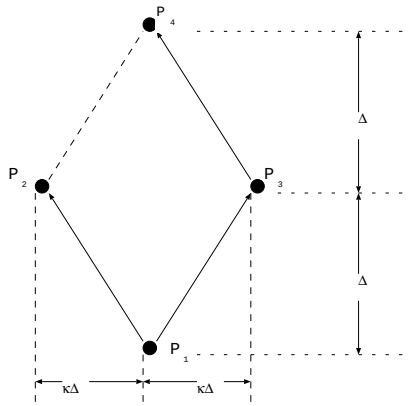

Fig. 4.3 格子

$P_1 \sim P_4$を x,t 座標の形に戻せば

$$u(x,t+2\Delta)=f(x,t)\Delta^2-u(x,t)+u(x-k\Delta,t+\Delta)+u(x+k\Delta,t+\Delta) \quad (4.10)$$

となる。この (4.10) 式が、特性曲線法によって求められた差分近似式である。

5 爆発面の数値計算

5.1 爆発条件

爆発面 (爆発曲線、爆発境界) を数値計算するにあたって、大きな問題は、どのようにして無限大に発散する時刻、すなわち爆発時刻を求めるかにある。コンピュータでは、無限大に発散する時刻は得られないので、コンピュータの有限の世界で爆発を判別する条件が必要になってくる。この条件を 爆発条件 と言う。
簡単のため、半線形移流方程式の爆発時刻を求める式

$$t = \frac{1}{f(x_0)} \tag{5.1}$$

について考えてみる。ここで t は爆発時刻、$f(x_0)$ は初期値である。この式からわかることは、初期値が大きいほど爆発時刻が早いということである。そして初期値が 0 以下である場合は爆発しないこともわかる。
様々な爆発条件が考えられるが、最も簡単な方法と思える、ある閾値 L を越えたら爆発とする方法を使うことにする。これを Fig.5.1に示す。

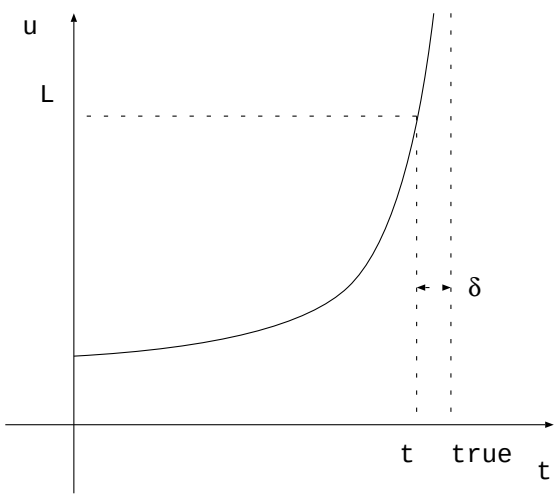

Fig. 5.1 爆発条件による誤差

$true$ は真の爆発時刻であり t は爆発条件によって求められた爆発時刻である。するとこの爆発条件ではδのような誤差が生じる。では実際どれほどの誤差になるのか、半線形移流方程式 (2.19) の場合について考えてみる。
半線形移流方程式 (2.19) の解

$$u(x,t) = \frac{f(x_0)}{1 - f(x_0)t}$$

で $u(x,t) = L$ とおくと

$$\begin{aligned} L &= \frac{f(x_0)}{1 - f(x_0)t} \\ 1 - f(x_0)t &= \frac{f(x_0)}{L} \\ t &= \frac{1}{f(x_0)} - \frac{1}{L} \end{aligned} \tag{5.2}$$

となり、(5.1) と (5.2) を比較すると、誤差として $1/L$ が生じる。$p = 2$ の半線形移流方程式 (2.19) については、 L を十分大きくとれば、爆発条件による誤差は、非常に小さなものとなる。

5.2 半線形移流方程式の爆発面

より一般の半線形移流方程式

$$u_t + ku_x = u^p$$

の場合を考えてみる。この特性曲線は

$$x = kt + x_0$$

である。ここで $u = u(kt + x_0, t)$ とおき t について微分すれば

$$\frac{d}{dt}u(kt + x_0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = u_t + ku_x$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u &= u^p \\ \frac{1}{u^p}du &= dt \end{aligned}$$

変数分離形なので両辺を積分すれば

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^p}du &= \int dt \\ -\frac{1}{p-1}\frac{1}{u^{p-1}} &= t + c \end{aligned}$$

$t = 0$ の場合

$$c = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{f(x_0)^{p-1}}$$

となるので

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p-1}\frac{1}{u^{p-1}} &= t - \frac{1}{p-1}\frac{1}{f(x_0)^{p-1}} \\ \frac{1}{u^{p-1}} &= -(p-1)t + \frac{1}{f(x_0)^{p-1}} \qquad (5.3) \\ u &= \frac{f(x_0)}{\sqrt[p-1]{1-(p-1)tf(x_0)^{p-1}}} \qquad (5.4) \end{aligned}$$

となる。この場合、爆発時刻は

$$t = \frac{1}{(p-1)f(x_0)^{p-1}} \tag{5.5}$$

となる。(5.3) 式で u を L とおいてみると

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^{p-1}} &= -(p-1)t + \frac{1}{f(x_0)^{p-1}} \\ t &= \frac{1}{(p-1)f(x_0)^{p-1}} - \frac{1}{(p-1)L^{p-1}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

となり、(3) 式と (4) 式を比較すると $1/(p-1)L^{p-1}$が違いとしてみられる。つまり u を L とおくと $1/(p-1)L^{p-1}$ だけ時間 t に関して誤差が生じるのである。しかも L も p も定数であるため、x_0 を動かしても誤差が一定であることがわかる。つまり閾値 L とした場合に爆発面は特性方向に平行移動するだけなのである (Fig.5.2)。

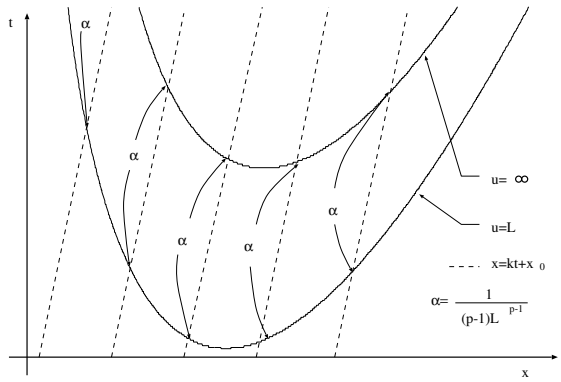

Fig. 5.2 半線形移流方程式の爆発面の誤差

5.3 半線形波動方程式の爆発面

半線形波動方程式に関しては L,Δ,p について調べてみる。
半線形波動方程式

$$u_{tt} - k^2 u_{xx} = u^p$$

について、条件を以下のように設定し、$L = 80,\ 100,\ 120,\ 200,\ 1000$ について、数値計算し Fig.5.4に表してみた。

$$\begin{cases} k = 1 \\ p = 2 \\ \Delta = 0.001 \\ f(x) = 20 - 3\cos 2\pi x - 10\cos 8\pi x - 7\cos 16\pi x \end{cases}$$

初期値のグラフを Fig.5.3に示す。

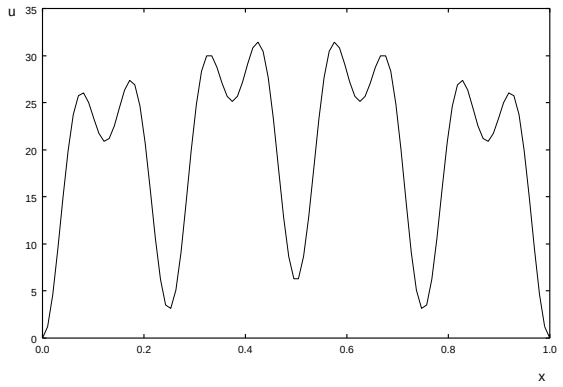

Fig. 5.3 初期値

小さい波が 8 つ、大きい波が 4 つあるのが特徴である。

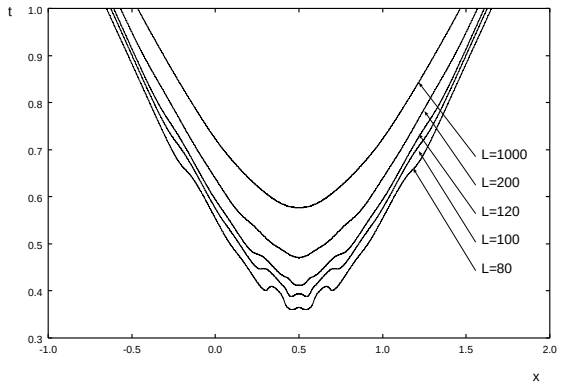

Fig. 5.4 爆発条件による爆発面の変化

爆発条件 L が小さいと初期値の形状が残っている。しかし、真の爆発面に近付けようと、爆発条件 L を大きくすると初期値の形状の影響はほとんどない。L を十分に大きくとれば、真の爆発面との形状の差はほとんどないが、十分にとられていない場合は L によって爆発面の形状は大きく異なる。

条件を $p = 3$、$L = 1000$ とし、$\Delta = 0.001,\ 0.0005,\ 0.0001$ について調べてみると Fig.5.5のようになった。

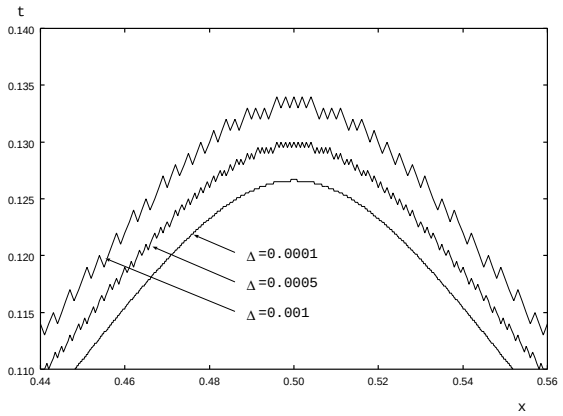

Fig. 5.5 Δによる爆発面の変化

分割数が十分にとれていない場合、爆発面が振動したようになる。これは分割数が小さい方が格子が大きくなり、爆発面に格子の形が現れるためである。なるべくこの振動を小さくするには、分割数を大きくとること、つまりΔを十分に小さくすることである。

条件を $L = 10000$、$\Delta = 0.001$ と変更し、$p = 2,\ 2.2,\ 2.5,\ 3$ について調べてみた。それが Fig.5.6である。

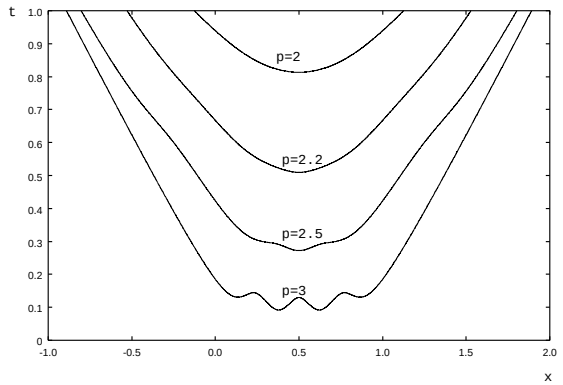

Fig. 5.6 p による爆発面の変化

p の値を大きくとり、右辺の非線形項の影響を大きくし、爆発をはやくすると、初期値の形状の影響が現れると思われる。

6　近似爆発面の精密化

移流方程式と波動方程式は深い関係がある。しかし、半線形の方程式の爆発面では大きな違いがみられた。半線形移流方程式では爆発条件 L によって、形状は変化しない。それに対して半線形波動方程式では形状が変化する。これら 2 つを比較し半線形波動方程式の爆発面を評価することは、非常に難しい。そこで近似爆発面の精密化を試みた。
それにあたって、考えなければならないことは、数値計算で爆発面を得ることによって、様々な誤差が生じること、そして爆発条件によっても誤差がでることである。しかし差分による誤差よりは比較的に小さいため、差分法を少し変えて誤差を小さくすることにする。理想は、それとともに爆発条件による誤差も小さくなることである。

6.1　一次補間による精密化

爆発面が Fig.5.5のような振動した形状になるため、一次補間を使いこれを除去することにする。

Fig.6.1の格子より P_1, P_4を補間し $u = L$ のときの時刻 t は、

$$t = t_0 + r(t_{n-2} - t_n) \qquad \left(r = \frac{L - u_j^{n-2}}{2\Delta_t} \right) \tag{6.1}$$

となる。

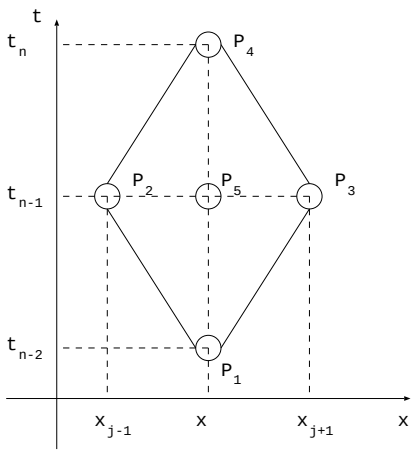

Fig. 6.1　格子の位置

(6.1) を Fig.6.2に示す。そして、Fig.6.3の a は補間前のデータで、 b が (6.1) で補間したデータである。この (6.1) の補間では完全には振動を除去できていないようである。

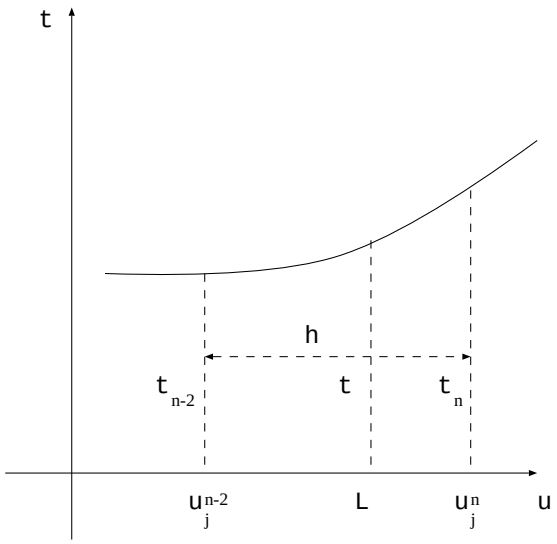

Fig. 6.2 補間

そこで、P_2, P_3から真中の点の u の値を求め L より大きいか小さいかで区間を半分にして一次補間を行った。その結果が Fig.6.3である。

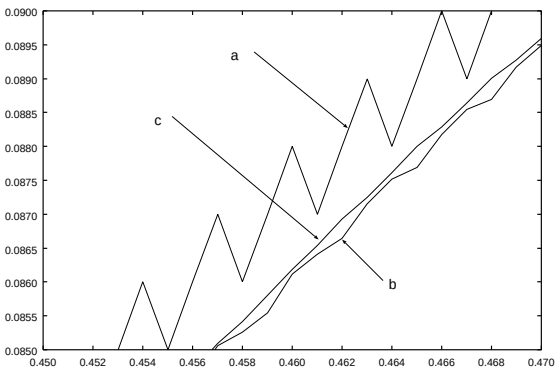

Fig. 6.3 補間による振動除去

この方法によりほぼ振動を取り除くことができた。

6.2 ニュートン法

これまでの差分式では、

$$u(P_4) = u(P_1)^p \Delta^2 - u(P_1) + u(P_2) + u(P_3)$$

と u^p の格子は P_1 であった。この非線形項の格子の位置を P_4 として求める場合、$u(P_4)$ に関する方程式

$$u(P_4)^p\Delta^2 - u(P_4) - u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) = 0$$

を解かねばならない。$p = 1\ ,\ 2$ の場合は容易に解けるが、それ以外は解くことは難しいため、解決策としてニュートン法を用いることにした。

半線形波動方程式の近似式は

$$u(P_4) = u(P_4)^p\Delta^2 - u(P_1) + u(P_2) + u(P_3)$$

であるから、$u(P_4) = U$ とおき、

$$f(U) \quad = \quad U^p\Delta^2 - U - u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) \tag{6.2}$$

とすると

$$f'(U) \quad = \quad pU^{p-1}\Delta^2 - 1 \tag{6.3}$$

となる。ニュートン法によって U_n から U_{n+1} を求める式は

$$U_{n+1} = U_n - \frac{f(U_n)}{f'(U_n)} \tag{6.4}$$

となる。終了条件として

$$|U_{n+1} - U_n| < 10^{-12}$$

とし、以上の条件を満たさない場合は計算回数 10 回で終了とした。これによる爆発面を Fig.6.4に表した。

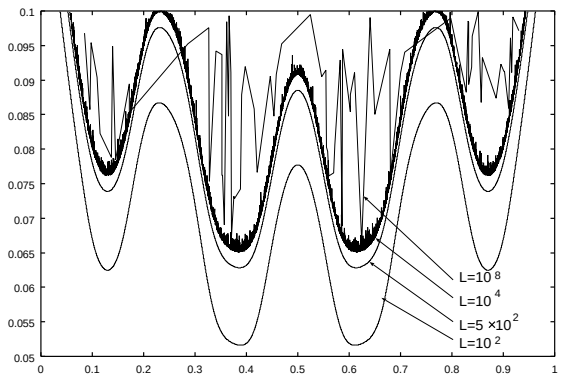

Fig. 6.4 ニュートン法による爆発面

Fig.6.4 のように、爆発面付近では不安定なものとなった。原因はニュートン法にあるのか、プログラムの方にあるのか調べきることができなかった。このようなことから、ニュートン法は断念することになった。

6.3 非線形項の格子の操作

非線形項の格子の位置を変える方法として、ニュートン法に代り一次補間及び補外を使った。格子を Fig.6.5示す。

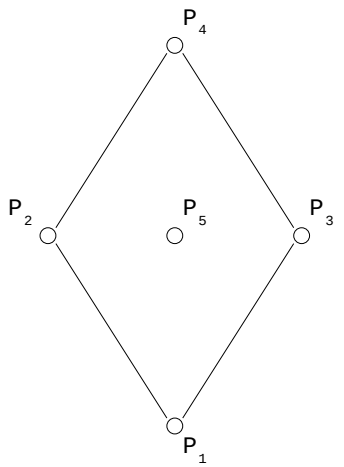

Fig. 6.5 格子の位置

まず、$u(P_2), u(P_3)$ を使って一次補間し $u(P_5)$ を求める。

$$u(P_5) = \frac{u(P_2) + u(P_3)}{2}$$

ここから、仮の $u(P_4)$ の値$\overline{u}(P_4)$ を $u(P_1), u(P_5)$ を使って補外する。

$$\overline{u}(P_4) = u(P_1) + 2(u(P_5) - u(P_1)) = 2u(P_5) - u(P_1) \tag{6.5}$$

求める差分近似式は

$$u(P_4) = \overline{u}(P_4)^p \Delta^2 - u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) \tag{6.6}$$

とする。また、この方法では非線形項の格子の位置を P_1, P_4, P_5だけでなく、その間のどこの位置にも変えることができる。
ここで実際に格子の位置を変えることによって、どの様に変化するのか調べてみた。それが Fig.6.6である。

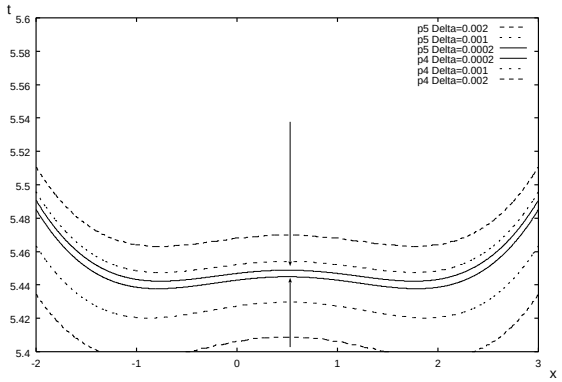

Fig. 6.6 格子の位置による爆発面の変化

非線形項の格子の位置を P_5 とした場合が上の 3 本の曲線であり、上から順に$\Delta = 0.002,\ 0.001,\ 0.0002$ としたものである。分割数を大きくとると、上から下に移動する。一方、非線形項の格子の位置を P_4 とした場合は、下から順に$\Delta = 0.002,\ 0.001,\ 0.0002$ としたもので下から上へと逆方向に移動する。もし、分割数を次第に大きくしていった場合、真の爆発面に必ず近付くのであれば、これら P_4, P_5の曲線の間に真の爆発面があると予想できる。ただし、爆発条件による誤差を考えないことが前提であり、正確にいえば、その間に真の解の、 $u = L$ の等高線が存在することになる。

6.4 補間·補外法の制限

非線形項の格子の位置をどこにすればよいか調べた結果、非常に重要なことがわかった。補間や格子の位置は、いままで調べることのなかった、爆発条件 L によって大きく影響されるのである。
以下の条件で調べてみる。

$$\begin{cases} f(x) = 20 - 3\cos 2\pi x - 10\cos 8\pi x - 7\cos 16\pi x & (\text{初期値}) \\ L = 10^3 & (\text{爆発条件}) \end{cases}$$

非線形項の u は

$$u = u(P_1) + \alpha(u(P_5) + u(P_1)) \tag{6.7}$$

より求める。αは Fig.??より、非線形項の格子の位置を表している。

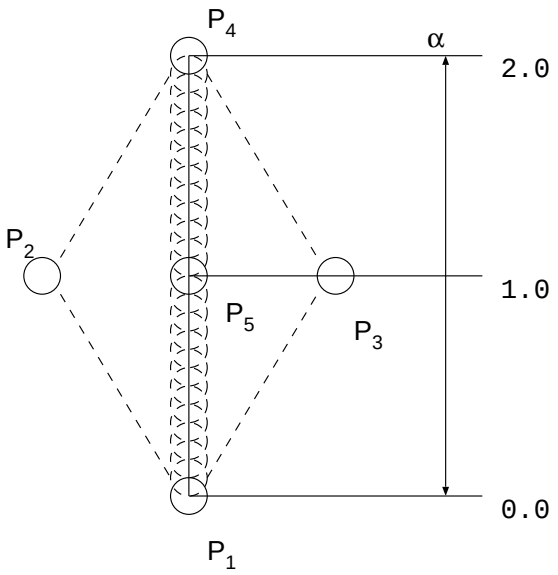

Fig. 6.7 αによる格子の位置

(6.7) でαをそれぞれ $1.0 \sim 1.5$ と変化させて、$x = 0.378$ での爆発時刻を比較してみた図を Fig.6.8に示す。

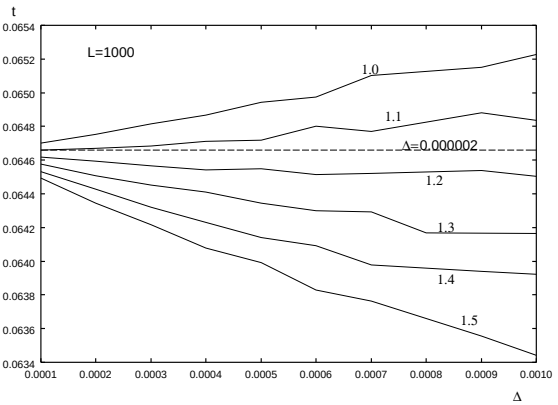

Fig. 6.8 格子の位置による爆発面の変化

点線は格子の位置を P_1とし、$\Delta = 5 \times 10^{-7}$とした場合で、非常に真の爆発面に近付けたものである。Fig.6.8では、格子の位置が 1.1 である場合では、分割数によって誤差は大きく異なることなく、しかも爆発面に近付けた直線と近いため、とても精度の高いものとなっている。
爆発条件を $L = 10^7$とした場合のグラフを Fig.6.9に示す。

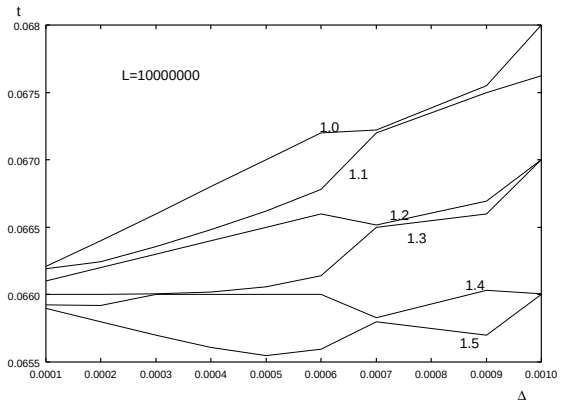

Fig. 6.9 格子の位置による爆発面の変化

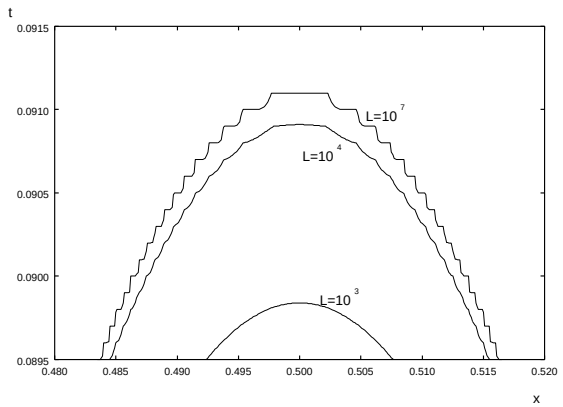

Fig. 6.10 L による補間効果

この図は Fig.6.8と比較すると明らかに異なる。分割数によって数値に大きな乱れがあり、不安定なものとなっている。この原因の一つは L が大きくなつにつれ、一次補間の効果がなくなり爆発面が粗くなるためである (Fig.6.10)。非線形のものを一次補間するので、最初から誤差も大きいものだと予想はしていたが、爆発条件 L を変えることで、その誤差が変わることまでは予想できなかった。

7 まとめ

近似爆発面の精密化をおこなったが、比較的に誤差の小さい爆発条件の誤差については調べず、差分による誤差、特に非線形項の格子の位置について調べた。しかし、この精密化に用いたニュートン法、一次補間法の効果は、爆発条件によって制限がともなうこと

がわかった。ニュートン法については終了条件として相対誤差ではなく、絶対誤差を使ったため、有効数字を越えたことが原因の一つと考えられる。一次補間については、もともと非線形のものを補間するため、ある程度の誤差は、予想していた。しかし閾値 L によって誤差が異なる原因は、調べ切れなかった。

今後の課題は、より爆発条件の精度を高め、大きな数値を扱う際に、他にどのような影響を与えるのか、そしてその原因を追求することにある。

参考文献

[1] 河村哲也 : 工系数学講座 10 応用偏微分方程式 (共立出版 , 1998)

[2] 大西和栄 · 登坂宣好 : 偏微分方程式の数値シミュレーション (東京大学出版会 , 1991)

[3] W.H.Press,B.P.Flannery,S.A.Teukolsky,W.T.Vetterling [日本語版] ニューメリカルレシピ·イン·シー, C 言語による数値計算のレシピ (技術評論社 , 1994)

[4] 及川正行:偏微分方程式 (岩波書店 , 1997)

[5] 石原繁·浅野重初:微分積分, (裳華房 , 1994)

[6] 犬井:偏微分方程式とその応用 (コロナ社 , 1957)

[7] G.D. スミス:コンピュータによる偏微分方程式の解法 [新訂版] (サイエンス社,1971)

[8] 井川満:偏微分方程式論入門, (裳華房 , 1996)

[9] 竹野茂治:“非線形偏微分方程式入門” – 1 次元移流方程式を使って –