周期的外力を持つ非粘性バーガース方程式の倍周期解の自動判別法

平成 11 年 2 月 5 日

情報電子工学科 竹野研究室
大川戸 太郎

目 次

1 はじめに **1**

2 非粘性バーガース方程式 **1**

3 ラックス – フリードリクス法 **2**
3.1 境界以外の計算法 2
3.2 境界部分の計算法 3
3.3 安定条件 4

4 実験と考察 **6**
4.1 数値計算の結果 6
4.2 指標 8
4.3 指標のアルゴリズム 13
4.3.1 関数列を正数列にする 13
4.3.2 正規化と閾値による判別 14
4.4 Fig.4.2 に関する考察 15
4.4.1 L^2 ノルムでの計算結果 15
4.4.2 L^∞ ノルムでの計算結果 16
4.5 Fig.4.3 に関する考察 18
4.6 判別法に対する考察 22

5 まとめ **24**

参考文献 **25**

概要

周期的外力を持つ非粘性バーガース方程式の倍周期解の自動判別法について考察する。ラックス–フリードリクス法で数値解析を行い、得られた倍周期解、すなわち 2 つや 3 つの周期解が交互に現れる $2T$、$3T$ のような周期解が得られた時、その倍周期解が、何倍かを視覚的に判断するだけではなく、得られたデータを用いて計算を行い、倍周期解の周期数を自動的に判別する方法を検討する。様々な自動判別法があるわけだが、その中のいくつかを行い、その判別法の長所、短所を考察する。

1　はじめに

非粘性バーガース方程式を差分法によって数値解析することで、倍周期解、すなわち 2 つや 3 つの周期解が交互に現れる $2T$、$3T$ 周期解などのような周期解が得られることがある。ただ、参考文献[1] のまとめにもあるように、倍周期解かどうかのグラフを視覚的に判別するだけでなく、データを用いて得られた解が倍周期解かどうかを数値的に判断する方がよいと考えられる。そこで、得られたデータを用いて倍周期解の周期数を導き出す計算法を考える必要がある。

数値的に判断する自動判別法を行うことによってその周期解が倍周期解であるか、それとも違うかがわかるはずである。したがって、どのような自動判別法を用いるかが重要である。様々な自動判別法を行い、判別法の長所短所を考察する。これが本実験の目的である。

本稿では、第 2 章で非粘性バーガース方程式について記述し、3.1 節でラックス–フリードリクスの差分法の導出、3.2 節で境界部分の計算法、3.3 節 安定条件について述べる。4.1 節で数値計算とその結果、4.2、4.3 節で自動判別の方法、4.4、4.5 節で自動判別した結果、4.6 節で結果からの考察を述べる。

2　非粘性バーガース方程式

非粘性バーガース方程式

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \tag{2.1}$$

を考える。初期値、境界値は以下とする。

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & (0 < x < 1) \quad \text{(初期条件)} \\ u(0,t) = u(1,t) & (t > 0) \qquad\quad \text{(境界条件)} \end{cases} \tag{2.2}$$

式 (2.1) は非線形だから、初期値 $u(x,0)$ が連続でも、$t > 0$ で常に連続な解 u を持つとは限らない。 u が (x,t) 空間のある線上でのみ不連続で、その他の領域で連続のとき、偏微分方程式の u が必ずしも一意解になるとは限らないので、この u は式 (2.1) の弱解 **(weak solution)** であるという。

弱解は、ある与えられた初期値 $u(x,0)$ に対し、必ずしも一意解になるとは限らない。すなわち、実際の流れには存在を許し得ない、エントロピーの減少する衝撃波も、弱解となるので得られる可能性がある。したがって、差分法では、物理的に合理的な、エントロピーの増加する衝撃波を含む解を得る工夫が必要となる。本稿では差分法の 1 つであるラックス–フリードリクス法を用いて計算機による数値計算を行う。また、本稿では周期的外力を持つ非粘性バーガース方程式で数値解析を行うので、式 (2.1) は

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = g(x,t) \tag{2.3}$$

となる。

3　ラックス – フリードリクス法

3.1　境界以外の計算法

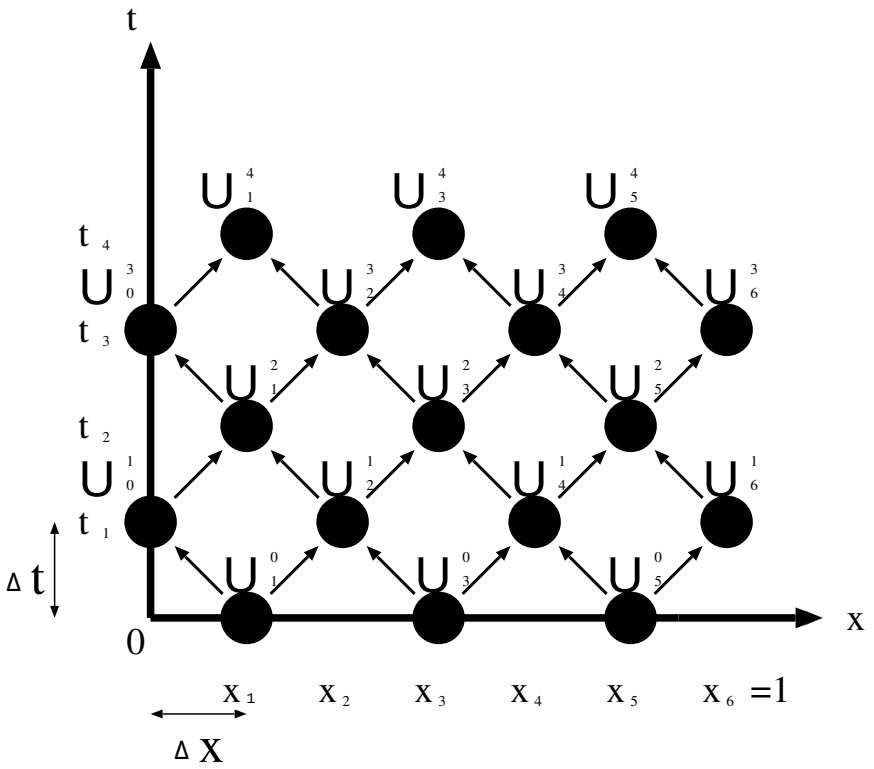


Fig. 3.1　ラックス–フリードリクス法

ラックス–フリードリクス法は、 1 次精度の差分法である。u_t を前進差分によって差分化する変わりに

$$\frac{u_j^{n+1}-\overline{u}_j^n}{\Delta t} \quad \left(\overline{u}_j^n=\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n}{2}\right) \tag{3.1}$$

と置き換える。u_x を中心差分によって差分化して式 (2.1) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1}-(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)/2}{\Delta t}+\frac{(u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2}{4\Delta x} &= g_j^n \\ u_j^{n+1}-\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n}{2}+\frac{\Delta t}{4\Delta x}((u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2) &= g_j^n\Delta t \end{aligned} \tag{3.2}$$

u_j^{n+1} について解くと、

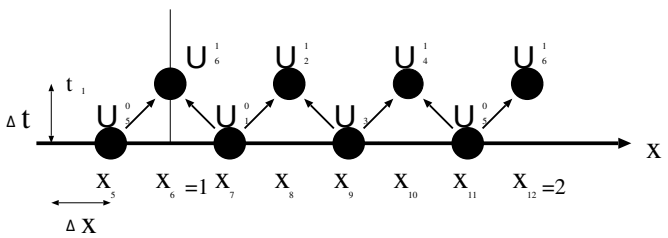
$$\begin{aligned}&u_j^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)-\frac{\Delta t}{4\Delta x}((u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2)+g_j^n\Delta t \\ &(n=0,1,2,\cdots,\quad j=0,1,2,\cdots,J,\quad u_j^n=u(j\Delta x,n\Delta t))\end{aligned} \tag{3.3}$$

これが、ラックス–フリードリクス法である。この差分法を Fig. 3.1 を例に説明する。

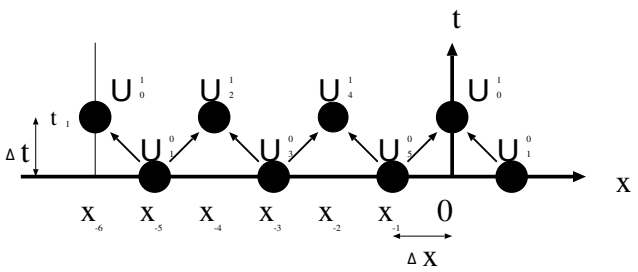
$t = 0$ から Δt 時間進めると、u_1^0 と u_3^0 から u_2^1 が求まり、u_3^0 と u_5^0 から u_4^1 を求めるように、2 点間から点を求めていく。しかし、u_0^1 は u_1^0 の 1 点しかないのでこのままでは u_0^1 を求めることができない。これについては 3.2 節で述べるとする。次にまた Δt 時間進める $(t = 2\Delta t)$ と u_0^1 と u_2^1 から u_1^2 、 u_2^1 と u_4^1 から u_3^2 を求めていく。これを繰り返して u_j^n の値を求める。

なお、Fig.3.1 では J の値を 6 とした。

3.2 境界部分の計算法



(a) u_6^1 の求め方



(b) u_0^1 の求め方

Fig. 3.2 境界部分の求め方

境界部分の求め方は、式 (2.2) より求めることができる。x が 0 と 1 の時は、t が正ならば、t がどの値でも u の値は同じである。Fig. 3.1 では J が 6 の時に x が 1 とな

るので、

$$u_0^1 = u_6^1 \tag{3.4}$$

が成り立つ。Fig. 3.1 より u_0^1 では u_1^0、u_6^1 では u_5^0 が使われている。ここで、式 (3.4) より u_6^1 を求める場合は、Fig. 3.1 を 1 右に移動させることを考える。つまり、$(1 \leq x \leq 2)$ の所に Fig. 3.1 を持ってくる。そして、x_7 を u_1^0 として求める (Fig. 3.2(a)) 。u_0^1 を求める場合は、 Fig. 3.1 を $(-1 \leq x \leq 0)$ の方に持ってきて、 x_{-1} を u_5^0 として求める (Fig. 3.2(b)) 。つまり、 u_0^1 と u_6^1 を求めるには、 u_1^0 と u_5^0 で求める。

3.3 安定条件

数値解析を行う際には近似解の安定性を考慮する必要がある。ラックス–フリードリクス法の安定条件はノイマンの安定性判定法によって求めることができる。この方法では、解 u はフーリエ級数に展開され、級数が時間とともに増幅する時は不安定、減衰する時は安定となる。ノイマンの安定条件は

$$|\gamma| = 1 + K\Delta t \tag{3.5}$$

となる正の定数 K が存在するということである。波数 k の波の成分は

$$u_j^n = \gamma^n \exp ikj\Delta x \qquad i = \sqrt{-1} \tag{3.6}$$

で表される。解は式 (3.6) から、 $|\gamma| < 1$ ならば安定、$|\gamma| = 1$ ならば中立安定、 $|\gamma| > 1$ ならば不安定になる。ここで、式 (3.6) を 式 (3.3) に代入する。ただし、$g = 0$ とする。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \gamma^{n+1} \exp ikj\Delta x - \frac{\gamma^n \exp ik(j+1)\Delta x + \gamma^n \exp ik(j-1)\Delta x}{2} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{4\Delta x}(\gamma^n \exp ik(j+1)\Delta x + \gamma^n \exp ik(j-1)\Delta x) \\
&\quad (\gamma^n \exp ik(j+1)\Delta x - \gamma^n \exp ik(j-1)\Delta x) \\
&= \gamma^{n+1} \exp ikj\Delta x - \gamma^n \exp ikj\Delta x \left(\frac{\exp ik\Delta x + \exp(-ik\Delta x)}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{4\Delta x}(\gamma^n \exp ikj\Delta x)^2 (\exp ik\Delta x + \exp(-ik\Delta x))(\exp ik\Delta x - \exp(-ik\Delta x)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

両辺を $\exp ikj\Delta x$ で割って整理すると、

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{2}(\exp ik\Delta x + \exp(-ik\Delta x)) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} u_j^n \\
&\quad (\exp ik\Delta x + \exp(-ik\Delta x))(\exp ik\Delta x - \exp(-ik\Delta x))
\end{aligned} \tag{3.8}$$

オイラーの公式

$$\begin{aligned}
\exp ik\Delta x &= \cos k\Delta x + i \sin k\Delta x \\
\exp(-ik\Delta x) &= \cos k\Delta x - i \sin k\Delta x
\end{aligned}$$

より、式 (3.8) は

$$\gamma = \cos k\Delta x \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_j^n i \sin k\Delta x\right) \tag{3.9}$$

式 (3.9) から

$$|r|^2 = \cos^2 k\Delta x \left\{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u_j^n\right)^2 \sin^2 k\Delta x\right\} \tag{3.10}$$

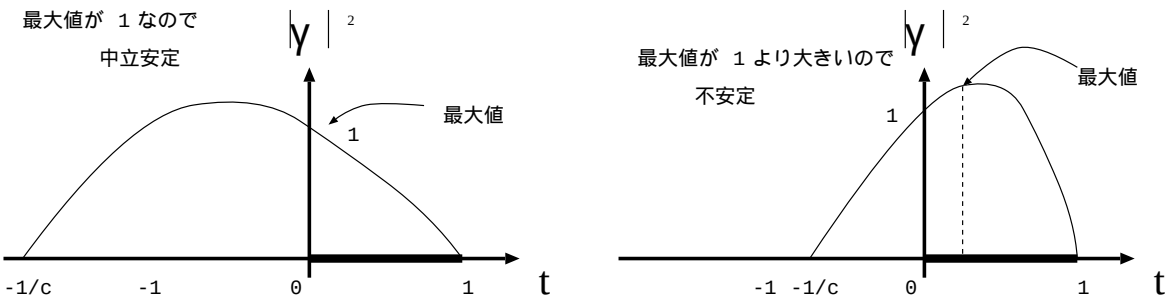
ここで、$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u_j^n\right)^2 = c$、$\sin^2 k\Delta x = t$ とおくと、

$$|\gamma|^2 = (1-t)(1+ct) \qquad (0 \le t \le 1) \tag{3.11}$$

式 (3.11) より、

- $t = 1$、$\left(-\frac{1}{c}\right)$
- $|\gamma|^2 = 0$ ならば $t = 1$、$|\gamma|^2 = 1$ ならば $t = 0$

となる。



(a) $0 \le c \le 1$　　(b) $c > 1$

Fig. 3.3 安定条件

ここで、ノイマンの安定条件は $|\gamma|$ が 1 より大きくならないことであるから、安定となるのは Fig. 3.3(a) の $0 \le c \le 1$ の時である。したがって、式 (3.10) より

$$\left|\frac{\Delta t}{\Delta x} u_j^n\right| \le 1 \tag{3.12}$$

このような不等式で表される条件のことをクーラント–フリードリクス–レヴィ **(CFL)** 条件という。

ここで、式 (2.2)、(2.3) を使い、初期値 $|u_0| \le M$, 外力 $|g(x,t)| \le N$, 周期を T とすると、

$$|u(x,t)| \leq M + NT \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{3.13}$$

となるので、CFL 条件は、

$$(M + NT)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{3.14}$$

となる。そして、M、N、T、Δx は実験時の初期設定で決まるので、

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{M + NT} \tag{3.15}$$

となるように、この条件を満たす Δt を考える必要がある。ただ、ここで気をつけなければいけない点がある。式 (3.13) の解 $|u(x,t)|$ の値が右辺をオーバーしてしまう可能性があるので、より安全性を高めるということで、式 (3.15) を

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{M + 2NT} \tag{3.16}$$

とする。また、計算機のプログラムで、$2n$ ステップ行ったとき、T と一致する $2n\Delta t = T$ という条件も立てる。

4 実験と考察

4.1 数値計算の結果

実験では、$t = mT$ (m は整数) となる時の値をグラフに表示し、倍周期解になっているかどうかを判断する。実験をするにあたって、初期設定を以下のようにする。

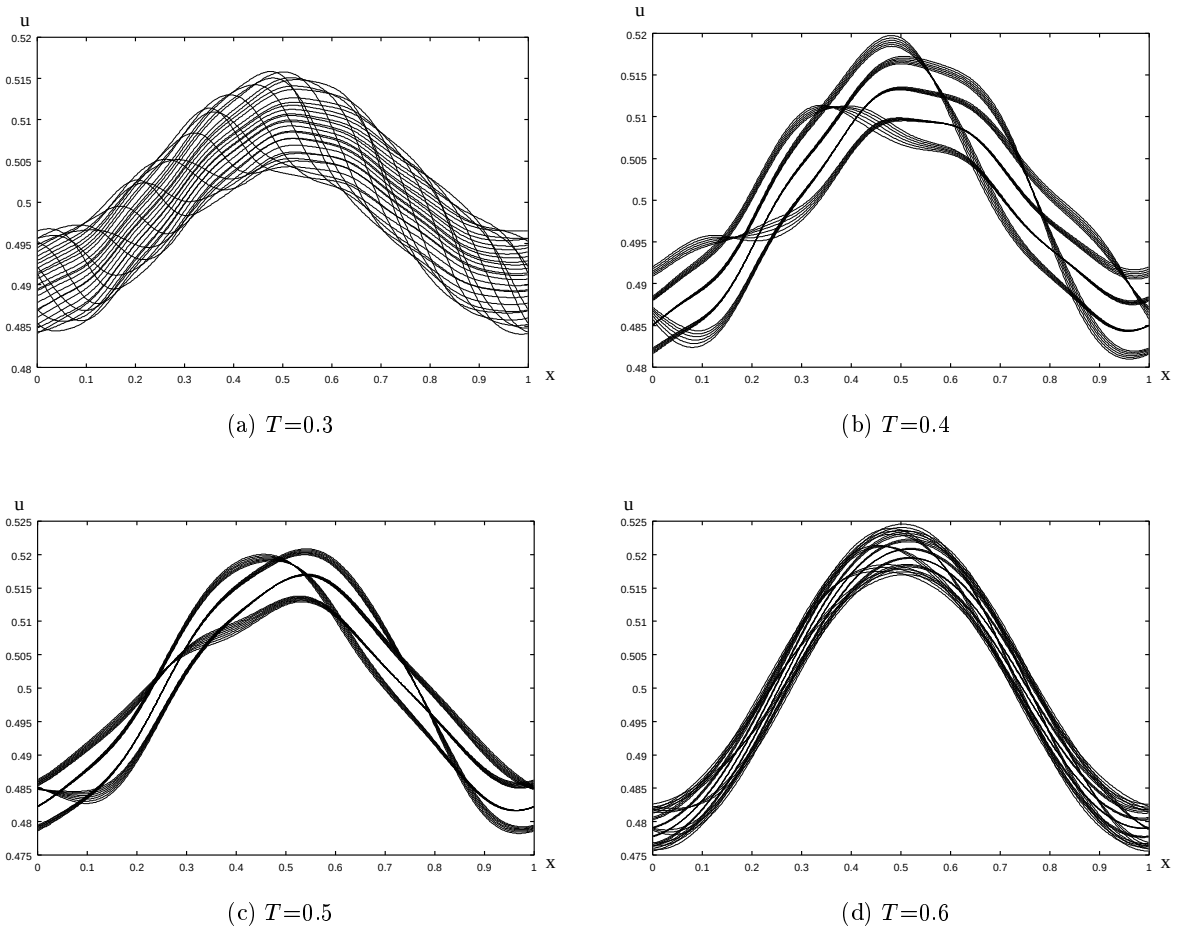
- 初期値 $u_0 = 0.5$
- 外力 $g(x,t) = 0.6 \cos 2\pi x \sin \dfrac{2\pi t}{T}$
- 周期 T を 0.3 ~ 0.6 とし、 0.1 きざみで変化
- x の分割数を 1000 つまり、 $\Delta x = 0.001$

以上のことより、 式 (3.16) は $M = 0.5$, $N = 0.6$ が与えられる。

T を 0.3 ~ 0.6 とした時に出力した近似解を Fig. 4.1 に示す。なお、グラフが出力しているのは (m=201 ~ 230) である。

Fig. 4.1 を見ると T の変化によって様々な近似解になることがわかる。あまりまとまっていないグラフもあれば、何本かにまとまっているグラフもある。今回はこの中から T=0.4 の近似解について解析していこうと思う。

数値計算によって得られた近似解を Fig. 4.2 に示す。Fig. 4.2(a) は (m=101 ~ 130) の値、 Fig. 4.2(b) は (m=101 ~ 110) を 3 次元で示した値である。 Fig. 4.2(b) の m は周期数を表す。 Fig. 4.2(a) を見ると 5 つのまとまったグラフが現われている。Fig. 4.2(b) を見る限り、5 本のグラフが交互に出力しているので、 130 周期まで交互に出力



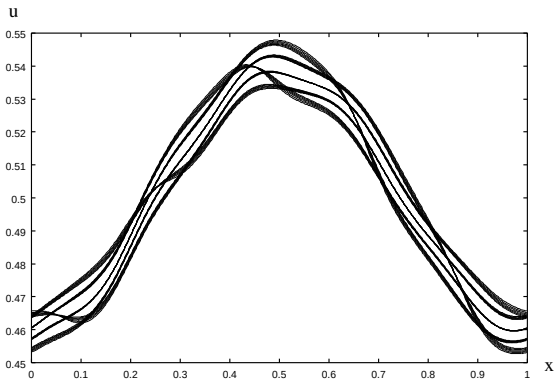
(a) T=0.3　(b) T=0.4

(c) T=0.5　(d) T=0.6

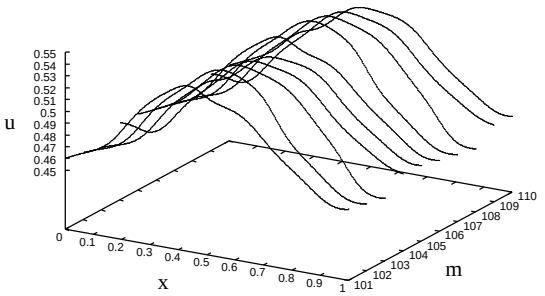
Fig. 4.1 数値解析の結果

している と予測できる。したがって、この近似解は $5T$ 周期解に近いと考えられる。ここで、肉眼では $5\ T$ 周期解ではないかと考えられるが、視覚的に頼らずに計算機を使って自動判別を行うこととする。そこで、得られたデータを用いて Fig. 4.2 の近似解が本当に $5\ T$ 周期解であるかどうかを調べる必要がある。様々な自動判別法があると考えられるが、いくつかを計算し、その判別法の長所短所を考察する。これが本実験の目標である。さらに周期を重ね、(m=501 ~ 530) まで進ませた解の値を Fig. 4.3 に示す。このあたりの周期になると、 おおよそ 1 つのグラフにまとまっている。このことについては、Δx の大きさが関係していると考えられる[1)]。

Fig. 4.3 についても自動判別を行うが、Fig. 4.3 に関しては T 周期解と考え、判別を行うこととする。

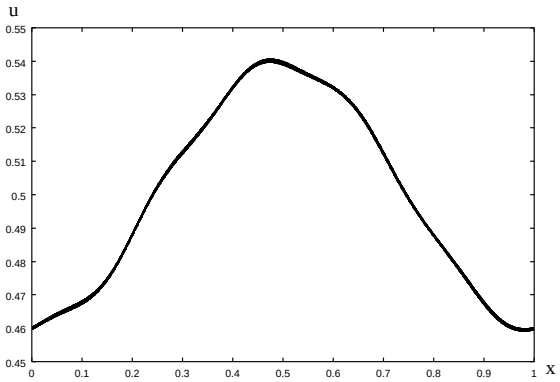


(a) 101 ~ 130 周期

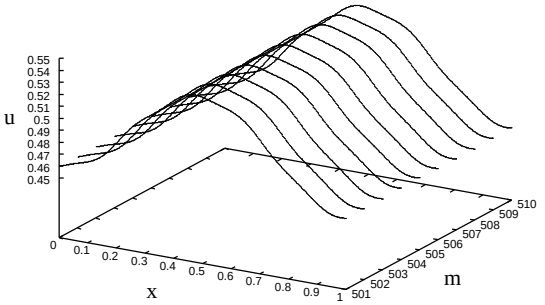


(b) 101 ~ 110 周期 (3 次元)

Fig. 4.2 $T = 0.4$ での波形



(a) 501 ~ 530 周期



(b) 501 ~ 530 周期 (3 次元)

Fig. 4.3 $T = 0.4$ での波形 (2)

4.2 指標

4.1 節にも述べたが、得られたデータを用いて倍周期解の数を導き出す計算法を考える必要がある。これは、

$(N-1)$ 個おきに、ほぼ同じものが現われる $(0,1)$ 上の関数列

$$u(x,0), u(x,T), u(x,2T), \cdots$$

が与えられた時、この列から N を求めることである。これをもう少しはっきりさせると、

$$\left.\begin{array}{llll} u(x,0) & \simeq u(x,NT) & \simeq u(x,2NT) & \simeq \cdots \\ u(x,T) & \simeq u(x,(N+1)T) & \simeq u(x,(2N+1)T) & \simeq \cdots \\ u(x,2T) & \simeq u(x,(N+2)T) & \simeq u(x,(2N+2)T) & \simeq \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ u(x,(N-1)T) & \simeq u(x,(2N-1)T) & \simeq u(x,(3N-1)T) & \simeq \cdots \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

($\simeq$ は、左辺と右辺はほぼ等しいと意味する)

このような場合、この関数列 $u(x,nT) \quad (n=0,1,2,\ldots)$ を長さ N の疑似周期列と呼ぶことにする。つまり、「疑似周期列からその長さを求める」ということになる。ただし、関数列の最初の $(N+1)$ 個

$$u(x,0), u(x,T), u(x,2T), \cdots, u(x,(N-1)T), u(x,NT)$$

が N より短い長さ N' (N' は N の約数で、$N' < N$) を持つ疑似周期列である場合、元の列も長さが N' となってしまうので、

$$u(x,0), u(x,T), u(x,2T), \cdots, u(x,NT) \text{ は } N\text{より短い長さを持たない} \tag{4.2}$$

という仮定は必要である。しかし、この問題の場合、 (4.2) よりさらに強い仮定を置くことができる。例えば、

$$0, \sin x, 0, -\sin x, 0, \sin x, 0, -\sin x, \cdots$$

という列がある場合、長さは 4 とみるべきであるが、最初の $(4+1)$ 個

$$0, \sin x, 0, -\sin x, 0$$

には、両端以外にも同じものが現われる。しかし、自分が実験した問題の場合、このようなことは起こらないと考えてよい。なぜなら、 $u(x,0)$ から $u(x,T)$、$u(x,T)$ から $u(x,2T)$ 、 $u(x,2T)$ から $u(x,3T), \cdots$ を求める計算手順がすべて同じであるため、

$$0, \sin x, 0$$

となれば、次は $\sin x$ となるはずだからである。よって、

$$u(x,0), u(x,T), u(x,2T), \cdots, u(x,(N-1)T) \text{ はどの } 2 \text{ つもほぼ等しくはない} \tag{4.3}$$

と仮定してよい。

この問題を解くには

(A) 2 つの関数がほぼ等しいかそうでないかを判別すること

(B) その判断基準を元に長さを求めるアルゴリズムを作ること

の 2 つが必要になる。

(A) の方は、ある x での関数の値を比較するわけにはいかないので、関数の近さをはかる距離 $d(f,g)$ のようなものを考えてやることにする (Fig. 4.4)。

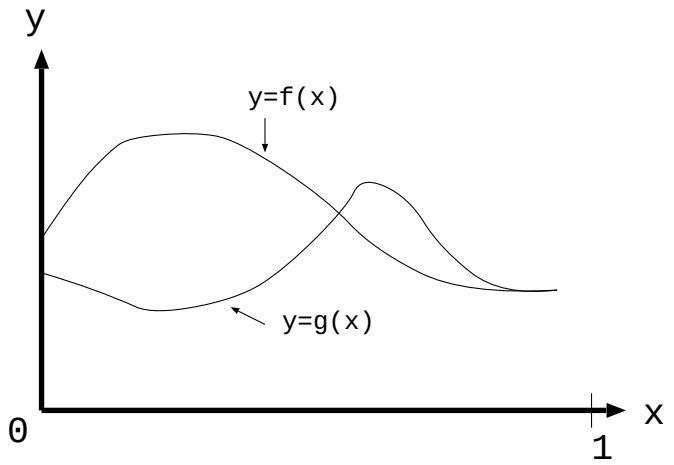


Fig. 4.4 (A) について

この距離には、例えば、次のようなものがある。

i) $d_\infty(f,g) = \max_{0\le x\le 1} |f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x)|$ の、$0 \le x \le 1$ での最大値

これは、 $y = f(x)$ と $g(x)$ のグラフが一番離れている所の長さを意味する (Fig. 4.5(a))。

ii) $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$

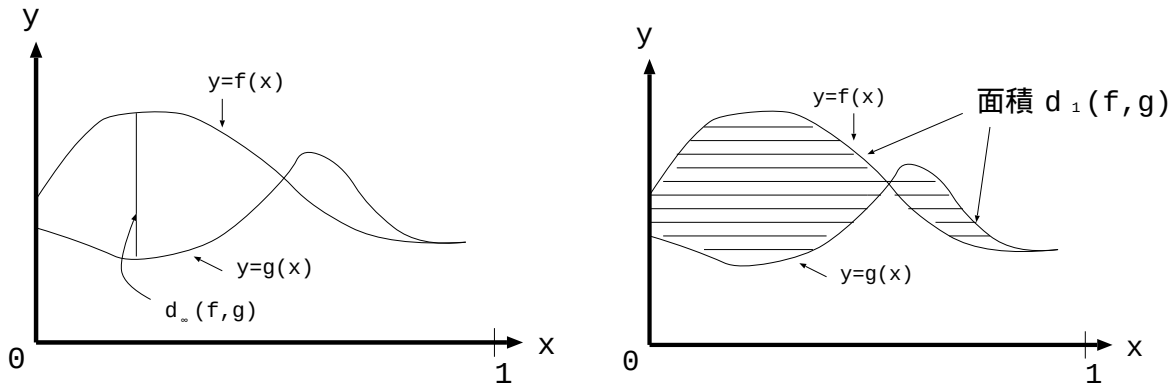
これは、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが囲む部分の面積を意味する (Fig. 4.5(b))。

iii) $d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx}$

これは図では説明しにくいが、平均自乗誤差と呼ばれるもので、よく用いられる (最小二乗法など) 指標の 1 つである。

iv) $d_p(f,g) = \left\{ \int_0^1 |f(x)-g(x)|^p dx \right\}^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty)$

これは、 d_1, d_2 を一般化したもので、 $p = 1$ の場合が ii) ,$p = 2$ の場合が iii) になっている。



(a) $d_\infty(f,g)$　　(b) $d_1(f,g)$

Fig. 4.5 指標方法

上にあげた 4 つの距離は、いずれも次の距離の公理をみたす。

- $d(f,g) \geq 0$
- $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ (すべての x に対して)
- $d(f,g) = d(g,f)$
- $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$

特に 2 番目の性質により、 f と g がほぼ等しいことを、これらの指標で判別できることがわかる。なお、上の 4 つの距離は、いずれも $f(x) - g(x)$ という関数の「大きさ」をはかる、という形をしている。この関数の大きさをはかる尺度をノルムと呼ぶ。前の 4 つの距離は、次の 4 つのノルムによって作られたものである。(ノルムは $\|f\|$ のような記号で表されることが多い)

i) $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \Rightarrow d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$

ii) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \Rightarrow d_1(f,g) = \|f-g\|_1$

iii) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx} \Rightarrow d_2(f,g) = \|f-g\|_2$

iv) $\|f\|_p = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \Rightarrow d_p(f,g) = \|f-g\|_p$

$\|f\|_\infty$ は sup ノルム、 $\|f\|_1$ は L^1 ノルム、$\|f\|_2$ は L^2 ノルム、$\|f\|_p$ は L^p ノルムと呼ばれる。ノルムは次の性質を持つ。

- $\|f\| \geq 0$
- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$　　(すべての x に対して)
- $\|cf\| = |c|\|f\|$　　(c は定数)
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

以上の話は、関数空間、関数解析などの本に詳しく述べられている[6]。

ここで、計算を行う際に、注意しなければならないことがある。今回の実験では計算機で数値計算を行ったことで、データが配列化されているので、離散化を考えなければいけない。よって、計算は次のように行えばよい。[0,1] 区間が M 個に分割されている階段関数 (Fig. 4.6) と考えれば、以下のような式になることがわかる。

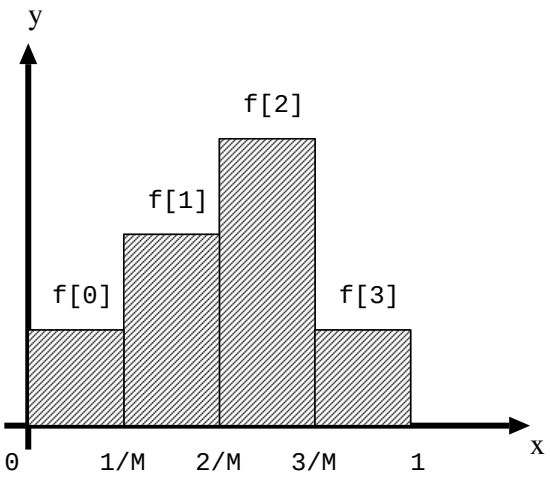


Fig. 4.6 階段関数

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq (1/M) & \text{での値を} \quad f[0] \\ (1/M) \leq x \leq (2/M) & \text{での値を} \quad f[1] \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (M-1)/M \leq x \leq 1 & \text{での値を} \quad f[M-1] \end{cases}$$

のようにもっているとする。$f[0]$ は $x = 1/(2M)$ での値、$f[1]$ は $x = 3/(2M)$ での値と考えてもよい。

同じように $g(x)$ が $g[0], g[1], \cdots, g[M-1]$ という配列であり、しかも M 個の値に離散化されているとする。この時、

- $d_\infty(f, g) = \max\limits_{0 \leq j \leq M-1} |f[j] - g[j]|$

  $\left(\text{すなわち、} \|f\|_\infty = \max\limits_{0 \leq j \leq M-1} |f[j]|\right)$

- $d_1(f,g) = \sum_{j=0}^{M-1} |f[j] - g[j]| \frac{1}{M}$
- $d_2(f,g) = \sqrt{\sum_{j=0}^{M-1} |f[j] - g[j]|^2 \frac{1}{M}}$
- $d_p(f,g) = \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} |f[j] - g[j]|^p \frac{1}{M} \right\}^{1/p}$

  $\left(\text{すなわち、} \|f\|_p = \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} |f[j]|^p \frac{1}{M} \right\}^{1/p} \right)$

4.3 指標のアルゴリズム

4.3.1 関数列を正数列にする

例えば、関数列が

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{L-1}(x), f_L(x)$$

のように与えられていたとする。この時、関数同士の差のすべてを計算して、

$$\begin{array}{ccccc} d(f_0,f_1) & d(f_0,f_2) & \cdots & d(f_0,f_L) \\ & d(f_1,f_2) & \cdots & d(f_1,f_L) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d(f_{L-1},f_L) \end{array}$$

と計算するのは効率が悪いので、基準とする周期をとり、その周期の差を計算する。f_0 を基準とすると、

$$d(f_0,f_0) = a_0, d(f_0,f_1) = a_1, d(f_0,f_2) = a_2, \cdots, d(f_0,f_L) = a_L \tag{4.4}$$

となり、 $L+1$ 個の正数列ができる。

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_L \qquad (a_0 = 0)$$

Fig. 4.2 の関数列では $N = 5$ なので、 式 (4.2) より

$$a_0 = 0, a_5 \simeq 0, a_{10} \simeq 0, a_{15} \simeq 0, \cdots \tag{4.5}$$

となり、そして (4.3) より

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \text{は } 0 \text{ には近くない} \tag{4.6}$$

ことがわかる。さらに、 a_1 と a_6 は

$$
\begin{aligned}
a_1 &= d(f_0, f_1) \\
a_6 &= d(f_0, f_6) \simeq d(f_0, f_1) = a_1
\end{aligned}
$$

であるから、 $a_1 \simeq a_6$ となる。同様にして式 (4.2) を考慮すれば、

$$
\begin{cases}
a_1 \simeq a_6 \simeq a_{11} \simeq \cdots \simeq \cdots \\
a_2 \simeq a_7 \simeq a_{12} \simeq \cdots \simeq \cdots \\
a_3 \simeq a_8 \simeq a_{13} \simeq \cdots \simeq \cdots \\
a_4 \simeq a_9 \simeq a_{14} \simeq \cdots \simeq \cdots
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

のようなことが成り立つことがわかる。(4.5),(4.6),(4.7) をまとめると、

> $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ は長さ 5 の疑似周期列で、 $a_0 = 0$ であり、 a_1, a_2, a_3, a_4 はいずれも 0 に近くはない

ということがいえることになる。つまり、(4.4) により関数の疑似周期列の問題を、数列の疑似周期列の問題に直すことができるわけである。

さて、この数列の疑似周期列 (長さ N)

- $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_L$
- $a_0 = 0$
- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{N-1}$ はいずれも 0 には近くはない

から長さ N を求めるアルゴリズムを考える。今の場合、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{N-1}$ のいずれかは等しくても構わない。

4.3.2 正規化と閾値による判別

$N > 1$ の場合には、次のようにして正規化と閾値によって長さ N を求めることができる。まず、

$$
A = \max_{0 \leq k \leq L} a_k \qquad (= a_0, a_1, \cdots, a_L \text{の最大値})
$$

とする。 $A = 0$ ならば、すべての a_k が 0 であることになり、明らかに $N = 1$ であるが、誤差を考えるとこれはほとんど起こらないと思われる。

$A > 0$ の場合、 $\overline{a_k} = \dfrac{a_k}{A} \qquad (k = 0, 1, \cdots, L)$

と正規化すると、 $0 \leq \overline{a_k} \leq 1$ で、$\overline{a_k} = 1$ なるものがひとつ存在することになる。

今、 δ を $0 < \delta < 1$ で小さい数ととり、$\overline{a_k} < \delta$ となるような $\overline{a_k}$ を 0 に近いとみなすことにする。この δ を閾値と呼ぶ。0 に近いものを見出せば、それによって長さを割り出すことが可能になる。つまり、

$$
\overline{a_k} < \delta \qquad (k \geq 1) \tag{4.8}
$$

となる最初の k がその長さの候補となる。

なお、このような $\overline{a_k}$ がひとつもない場合は、

- $N = 1$
- $N > L$
- δ が大きすぎる

などが考えられ、何らかの対処が必要となる。

しかしまだ式 (4.8) では、候補である k が長さを表しているとは限らない。それは、

- δ の設定が大きいために、" 0 に近いもの " 以外のものも入ってしまった
- $N = 1$
- $N > L$

などが考えられるからである。これを判別するために、

> $\overline{a_k} < \delta$ を満たす k が周期的に並んでいるか調べる

という方法が考えられる。これを満たせば長さの可能性は大きくなり、満たさなければ、上に述べたことなどの状況が考えられ、何らかの対処が必要となる。さらに上で述べたことを満たすだけでは納得いかないと判断した場合、

> $\overline{a_k} < \delta$ を満たさないもの、すなわち 0 に近くないものが周期的に並んでいるかを調べる

ということなどを行えばよい。

今回は、4.2 節で述べたノルムの内、 L^2 ノルムと L^∞ ノルムを使って計算した。

4.4 Fig.4.2 に関する考察

4.4.1 L^2 ノルムでの計算結果

4.1 節より、分割数が 1000 なので、 $M = 1000$ である。

$$d_2(f,g) = \sqrt{\sum_{j=0}^{M-1} |f[j] - g[j]|^2 \frac{1}{M}} \tag{4.9}$$

式 (4.9) の正規化を行った値を $\mathrm{Table}\ 4.1$ に示す。

周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$
101	0.0000000	111	0.0579779	121	0.1071698
102	0.7417584	112	0.7057378	122	0.6770826
103	1.0000000	113	0.9538445	123	0.9150959
104	0.9942060	114	0.9483454	124	0.9098059
105	0.7278715	115	0.6911379	125	0.6617670
106	0.0302260	116	0.0835441	126	0.1290647
107	0.7226961	117	0.6906103	127	0.6649585
108	0.9758734	118	0.9336575	128	0.8979748
109	0.9702396	119	0.9282720	129	0.8927652
110	0.7084619	120	0.6756453	130	0.6493163

Table 4.1 L^2 での計算結果

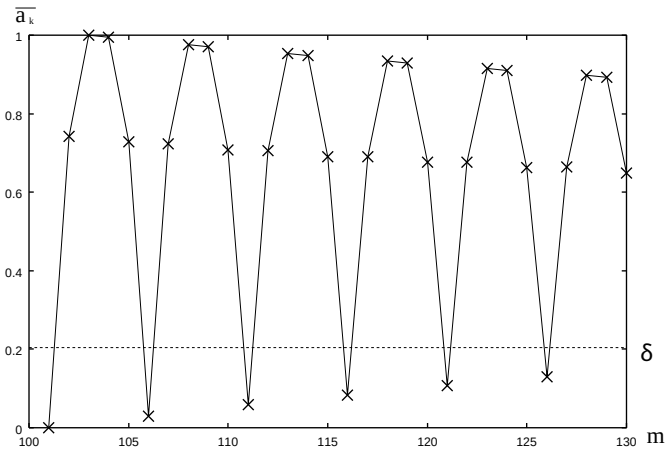


Fig. 4.7 L^2 での計算結果

Table 4.1 を見ると、5 周期ごとに $\overline{a_k}$ が 0 に近いことがわかる。ここで、閾値 $\delta = 0.2$ ととると、106 周期目で $\overline{a_k} < \delta$ となるので、Fig. 4.2 は長さ 5 の疑似周期列であるといえる。Table 4.7 を見ると、5 周期ごとに $\overline{a_k}$ が 0 に近くなっていることがわかる。ここで、閾値 $\delta = 0.05$ とすると、Fig. 4.2 は $5T$ 周期解であるといえる (Fig. 4.9(a))。

4.4.2 L^∞ ノルムでの計算結果

同じ長さ 5 の疑似周期列で、 L^∞ ノルムでの指標も行った。

$$h = \max_{0 \le j \le M-1} |f[j] - g[j]| \tag{4.10}$$

L^2 ノルムと同じように、式 (4.10) の正規化を行った値を Table 4.2 に示す。L^2 と同じく閾値 $\delta = 0.2$ ととると、 5 周期ごとに$\overline{a_k}$ が 0 に近くなっていることがわかる (Fig. 4.8)。ここで、式 (4.7) と Fig. 4.8 から、

$$a_3 \simeq a_8 \simeq a_{13} \simeq \cdots \simeq \cdots$$

の所が他の $\overline{a_k}$ よりも減少が少ないことがわかる。これは、誤差による影響だと考えられる。

周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$
101	0.0000000	111	0.0600098	121	0.1110034
102	1.0000000	112	0.9455987	122	0.8982784
103	0.9046305	113	0.8618088	123	0.8249725
104	0.9061498	114	0.8777506	124	0.8533093
105	0.9788466	115	0.9262233	125	0.8818501
106	0.0312686	116	0.0865082	126	0.1337008
107	0.9718335	117	0.9210694	127	0.8768922
108	0.8823611	118	0.8427376	128	0.8083757
109	0.8913507	119	0.8650497	129	0.8422459
110	0.9514304	120	0.9031539	130	0.8621506

Table 4.2 L^∞ での計算結果

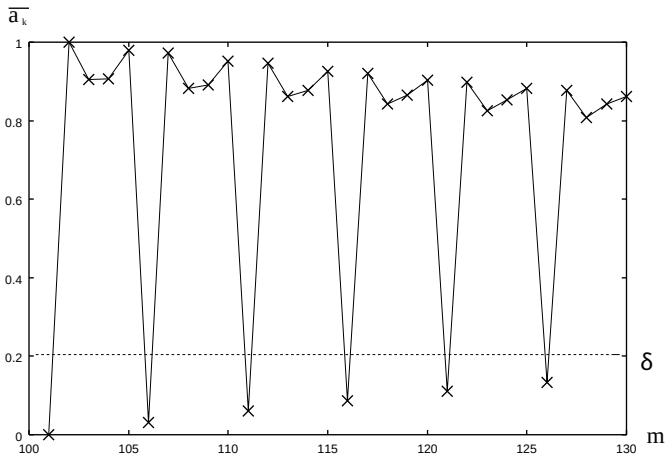


Fig. 4.8 L^∞ での計算結果

4.5 Fig.4.3 に関する考察

長さ 5 の疑似周期列と同じ指標で長さ 1 の疑似周期列でも判別を行った。L^2 での判別結果を Table 4.3、 L^∞ での判別結果を Table 4.4 に示す。

周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$
501	0.0000000	511	0.0295139	521	0.0573613
502	0.6234278	512	0.6077891	522	0.5938364
503	1.0000000	513	0.9726425	523	0.9469174
504	0.9969833	514	0.9692189	524	0.9430994
505	0.6175181	515	0.5999756	525	0.5843550
506	0.0149716	516	0.0436397	526	0.0706907
507	0.6153803	517	0.6006027	527	0.5874401
508	0.9861127	518	0.9595921	528	0.9346377
509	0.9828896	519	0.9559563	529	0.9306331
510	0.6085024	520	0.5919312	530	0.5772260

Table 4.3 $d_2(f, g)$

周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$	周期	$\overline{a_k}$
501	0.0000000	511	0.0294203	521	0.0571671
502	0.6089190	512	0.5829683	522	0.5588286
503	1.0000000	513	0.9726140	523	0.9468662
504	0.9975622	514	0.9686288	524	0.9413410
505	0.6043147	515	0.5942130	525	0.5849797
506	0.0149256	516	0.0434967	526	0.0704433
507	0.5957139	517	0.5707080	527	0.5473787
508	0.9860953	518	0.9595422	528	0.9345733
509	0.9828837	519	0.9547853	529	0.9282843
510	0.5991711	520	0.5894519	530	0.5806673

Table 4.4 $d_\infty(f, g)$

Table 4.3、4.4 を見る限り、長さ 5 の疑似周期列とみなしたようである 。確かに長さが 1 ではすべての正数列が 0 に近いので、正規化してしまうと意味がなくなってしまう。そのため、T 周期解としてみなすには、別の判別法で計算する必要がある。そこで、

以下の方法で計算することとする。

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx}}{\sqrt{\int_0^1 (f(x)-\overline{f})^2 dx}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^{M-1} |f[j]-g[j]|^2 \frac{1}{M}}}{\sqrt{\sum_{j=0}^{M-1} |f[j]-\overline{f}|^2 \frac{1}{M}}} < \delta \tag{4.11}$$

$$\overline{f} = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} f[j]$$

$$\frac{\max\limits_{0\le x\le 1} |f_0(x)-f_1(x)|}{\max\limits_{0\le x\le 1} f_0(x) - \min\limits_{0\le x\le 1} f_0(x)} < \delta \tag{4.12}$$

式 (4.11) の分母は L^2 ノルムを、$f(x)$ と $f(x)$ の平均である$\overline{f}$ の差の L^2 ノルムである。これを割り、その値が閾値 δ より小さければ 0 に近いという方法である。すなわちこの 2 式は相対誤差による判別法である。式 (4.12) は L^∞ ノルムを、基準とする周期の最大値と最小値の差で割り、その値が閾値 δ より小さければ 0 に近いという方法である。

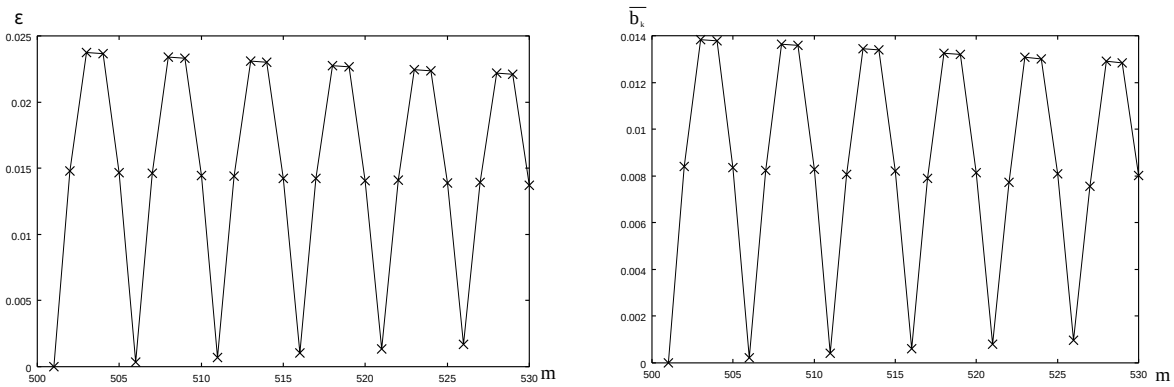
周期	ϵ	周期	ϵ	周期	ϵ
501	0.0000000	511	0.0007003	521	0.0013610
502	0.0147924	512	0.0144214	522	0.0140903
503	0.0237276	513	0.0230784	523	0.0224680
504	0.0236560	514	0.0229972	524	0.0223775
505	0.0146522	515	0.0142360	525	0.0138653
506	0.0003552	516	0.0010355	526	0.0016773
507	0.0146015	517	0.0142508	527	0.0139385
508	0.0233981	518	0.0227688	528	0.0221767
509	0.0233216	519	0.0226825	529	0.0220817
510	0.0144383	520	0.0140451	530	0.0136962

Table 4.5 式 (4.11) での計算結果

周期	$\overline{b_k}$	周期	$\overline{b_k}$	周期	$\overline{b_k}$
501	0.0000000	511	0.0004066	521	0.0007900
502	0.0084151	512	0.0080565	522	0.0077229
503	0.0138197	513	0.0134413	523	0.0130854
504	0.0137860	514	0.0133862	524	0.0130091
505	0.0083515	515	0.0082119	525	0.0080843
506	0.0002063	516	0.0006011	526	0.0009735
507	0.0082326	517	0.0078870	527	0.0075646
508	0.0136276	518	0.0132606	528	0.0129156
509	0.0135832	519	0.0131949	529	0.0128286
510	0.0082804	520	0.0081461	530	0.0080247

Table 4.6 式 (4.12) での計算結果

Table 4.5 は式 (4.11) の判別法で、Table 4.6 は式 (4.12) の判別法で計算した結果である。ここで、基準とした周期の u の値を 501 周期とし、式 (4.12) の計算した値を$\overline{b_k}$ と置いた。Table 4.5 の場合、閾値 $\delta = 0.025$ ととり、Table 4.6 の場合、閾値 $\delta = 0.02$ ととると、すべての周期が閾値より小さい値となり、 Fig. 4.3 は T 周期解ということになる (Fig. 4.4.9(b))。



(a) 式 (4.11) での計算結果　　(b) 式 (4.12) での計算結果

Fig. 4.9 相対誤差での判別法

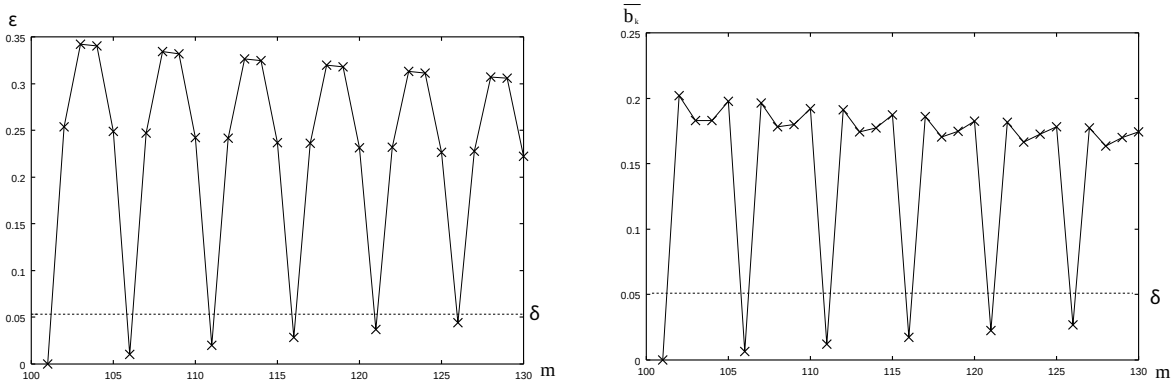
では、 Fig. 4.2 を式 (4.11)、(4.12) の判別法で行ったらどのような結果になるだろうか。基準とした周期の u の値を 101 周期とし、計算した値をそれぞれ ϵ、 $\overline{b_k}$ と置いた値の表をそれぞれ Table 4.7、4.8 に示す。

周期	ϵ	周期	ϵ	周期	ϵ
101	0.0000000	111	0.0198408	121	0.0366749
102	0.2538398	112	0.2415130	122	0.2317068
103	0.3422136	113	0.3264185	123	0.3131582
104	0.3402308	114	0.3245367	124	0.3113479
105	0.2490875	115	0.2365168	125	0.2264656
106	0.0103437	116	0.0285899	126	0.0441677
107	0.2473164	117	0.2363362	127	0.2275578
108	0.3339571	118	0.3195103	128	0.3072991
109	0.3320291	119	0.3176673	129	0.3055163
110	0.2424453	120	0.2312150	130	0.2222049

Table 4.7 Fig.4.2 を式 (4.11) で判別

周期	$\overline{b_k}$	周期	$\overline{b_k}$	周期	$\overline{b_k}$
101	0.0000000	111	0.0121257	121	0.0224296
102	0.2020627	112	0.1910702	122	0.1815085
103	0.1827921	113	0.1741394	123	0.1666962
104	0.1830990	114	0.1773606	124	0.1724220
105	0.1977884	115	0.1871552	125	0.1781890
106	0.0063182	116	0.0174801	126	0.0270159
107	0.1963713	117	0.1861137	127	0.1771872
108	0.1782922	118	0.1702858	128	0.1633426
109	0.1801087	119	0.1747943	129	0.1701865
110	0.1922486	120	0.1824937	130	0.1742085

Table 4.8 Fig.4.2 を式 (4.12) で判別



(a) Fig.4.2 を式 (4.11) で判別　　(b) Fig.4.2 を式 (4.12) で判別

Fig. 4.10　長さ 5 の疑似周期列の判別

Fig. 4.10 より、閾値を $\delta = 0.05$ とすると、5 周期ごとに 0 に近くなるので、長さ 5 の疑似周期列といえる。

4.6　判別法に対する考察

Fig. 4.2、4.3 のどちらも式 (4.9) ~ (4.12) での自動判別法を行った。Fig. 4.2 の場合は、どの自動判別法も 4.3.2 節に述べた条件

1. $\overline{a_k} < \delta$ を満たす k が周期的に並んでいるか
2. $\overline{a_k} < \delta$ を満たさないもの、すなわち 0 に近くないものが周期的に並んでいるかを調べる

を満たしている。ただし、式 (4.11) では $\overline{a_k} = \epsilon$、式 (4.12) では $\overline{a_k} = \overline{b_k}$ とする。ここで、閾値 δ のとれる範囲を Table 4.9 に示す。

判別法	δ
式 (4.9)	0.130 ~ 0.648
式 (4.10)	0.134 ~ 0.807
式 (4.11)	0.045 ~ 0.221
式 (4.12)	0.028 ~ 0.162

Table 4.9　Fig.4.2 での閾値 δ のとれる範囲

式 (4.9)、(4.10) は正規化を行ったため、他の 2 つよりも大きな数となってしまう。これは仕方のないことである。むしろ、正規化を行うことで δ の範囲を大きくとれること

になる。式 (4.11)、(4.12) では正規化を行わない方法なので、前者よりも δ の範囲は小さい。しかし、より小さな値 (小数第 2 位) からとれるし、範囲も小数第 1 位から 2 位までおける。

Fig. 4.3(長さ 1) の場合は、式 (4.9)、(4.10) の方法は正規化を行うため、不適当であるといえる。

以上のことから、正規化を行う方法では、δ の範囲は大きくとれるが、長さが 1 では適さないことがわかる。正規化を行わない方法では、δ の範囲は小さいが、より小さい値をとれるし、長さが 1 でも適用できる。

式 (4.11)、(4.12) の閾値 δ のとれる範囲を Table 4.10 に示す。

判別法	δ
式 (4.11)	0.024 ~
式 (4.12)	0.014 ~

Table 4.10 Fig.4.3 での閾値 δ のとれる範囲

Table 4.10 より、δ をより小さい値でとれるのは式 (4.12) の方法である。また、式 (4.12) は 式 (4.11) よりも計算時間が速い。ただ、L^∞ は誤差による影響で計算結果の波形がきれいにまとまらない可能性がある。しかし、このことは長さを求める点についてはあまり影響はないであろう。

以上のことから、長所短所をまとめると、

1. 正規化について
   - 正規化を行う方法
     長所 δ の範囲を大きくとれる
     短所 長さが 1、すなわち T 周期解には適さない
   - 正規化を行わない方法
     長所 長さが 1 でも判別でき、δ の値をより小さくとれる
     短所 δ の範囲はあまり大きくとれない
2. L^2 ノルム、 L^∞ ノルムについて
   - L^2 の場合
     長所 計算結果の波形がきれいにまとまる
     短所 計算方法に手間がかかる
   - L^∞ の場合
     長所 計算方法が簡単であり、計算時間も早い
     短所 誤差による影響で 計算結果の波形がきれいにまとまらない可能性がある

となる。

5　まとめ

非粘性バーガース方程式の倍周期解の自動判別法について考察した。方程式をラックス–フリードリクス法で数値解析を行い、出力した倍周期解を調べた。

Fig. 4.2、4.3 を L^2、 L^∞ での自動判別法を用い、正規化と閾値による判別法と正規化を行わない判別法を行った。正規化については、倍周期解では行っても行わなくても閾値による判別は可能であった。ただし、T 周期解については正規化を行わないべきである。このことから、正規化を行わないで相対誤差で計算し、判別した方がよいと考えられる。

L^2 と L^∞ については、長さを求めることについてはどちらも使えることが可能である。計算方法においては L^∞ が簡単であり、計算時間も速い。ただ、L^∞ は誤差による影響で計算結果の波形がきれいにまとまらない可能性がある。

本当は違う倍周期解も出して様々な自動判別法を行い、その結果について長所短所を考察することが一番の目的であると思うが、倍周期解を 1 つしか出すことができなかったので、様々な倍周期解で自動判別を行えば、長所短所も変わるかもしれない。この点についてはより調べてみる必要がある。

今後の課題として、Fig. 4.1(c) など違う倍周期解を自動判別するとどのような結果になるか、それに伴い自動判別法の長所短所はどう変わるか、また、今回行わなかった面積での自動判別法、どのような初期条件を与えた場合に倍周期解が得られるかなどがあげられる。

参考文献

[1] 竹野 茂治 :“ 単独保存則方程式の周期解の数値解析”, 新潟工科大学紀要 **2**, pp19-26 (1997)

[2] 水澤 智裕 :“ 理想気体のピストン問題における周期解分岐”, 新潟大学工学部卒業論文, pp4-6 (1995)

[3] 山口 昌哉, 野木 達夫 :“ 数値解析の基礎”, (共立出版, 1969), 第 3 章

[4] 日本機械学会 編 :“ 流れの数値シミュレーション”, (コロナ社, 1988), 第 2 章

[5] 高見 穎郎, 河村 哲也 :“ 偏微分方程式の差分解法”, (東京大学出版会, 1997), 第 1 章, 第 3 章

[6] 増田 久弥 :“ 関数解析”,(裳華房, 1994)