停止距離から導かれる交通流の数学モデルとその数値解析

平成 11 年 2 月 5 日

情報電子工学科 竹野研究室
西田 匡佑

目 次

1 はじめに **1**

2 車の保存則 **1**
2.1 速度と速度場 1
2.2 交通量と交通密度 2
2.3 3 つの交通変数の関係 3
2.4 車の数の保存 3
2.5 速度と密度の関係 4
2.6 交通量と密度の関係 5

3 車の停止距離 **5**
3.1 停止距離の実データ 5
3.2 比例関係モデルと実データとの比較 6
3.3 実データを補間して式をたてる 8
3.4 1 次分数式モデル 9

4 摩擦による影響 **10**

5 坂道による影響 **12**

6 Lax–Friedrichs の差分法 **13**
6.1 導出 13
6.2 境界部分の差分 14
6.3 安定条件 15

7 実験と考察 **15**
7.1 平坦な道の場合 15
7.2 坂道の場合 16
7.3 密度が定数ではない場合 17

8 まとめ **20**

参考文献 **24**

概要

停止距離から導かれる交通流の数学モデルについて考察する。数学モデルとは、自然科学・工学・社会科学上の問題を数理的に解決しようとする場合に、現実問題のかわりに、それを表現しているモデルを数学的に組み立てて、理論的考察をするとき、用いられるモデルのことである。本稿では、まず、交通問題を考えるにあたり、停止距離から速度の関係式を導く。次に、実データからそのようなモデルを構成する方法について考察する。次に、考察されたモデルを用いて、交通パターンの予測をすべく、車の流れの保存則方程式を Lax– Friedrichs の差分法を用いて解き、平坦な道の場合と登り坂と下り坂の場合との比較を行う。その結果、このモデルにおいては、平坦な道と坂道との分岐点で、登り坂の場合は渋滞を解消し、下り坂の場合は、渋滞を引き起こすという現象が起きることが分かった。

1　はじめに

交通問題に関しては、例えば、信号をどこに配置し、時間間隔をどのくらいにしたらよいか、あるいは、高速道路を建設する際に、出入り口や高架をどこに設置すればよいか等の研究はさかんに行われている。しかし、通常のものでは、道路の場所 (形状)、例えば、坂になっている場所や、カーブになっている場所を視野にいれて考えられてはいないと思う。本稿では、道路の場所 (形状) によって、交通流はどのように変化するかを考察する。自然科学の問題を数値的に解決しようとする場合、現実問題のかわりに、それを表現しているモデルを組み立てる必要がある。そのモデルとして、車の停止距離から導かれるモデルを考える。

第 2 章では、簡単な語句の説明と保存則方程式について述べる。交通問題を考える際に大切な語句は、速度、密度、交通量である。それら 3 つの要素を時間や位置で偏微分したものが、車の流れの保存則方程式として表される。第 3 章では、停止距離から速度に関する式をたてて実データとの比較を行い、どのモデルが一番自然なモデルかを述べる。車を停止させようとする場合、ある程度の者間距離をおいていないと、前方の車と接触してしまう。実際に、車が $20[\mathrm{km/h}]$ で走っている場合には $9[\mathrm{m}]$ の停止距離が必要、というデータが、 $100[\mathrm{km/h}]$ の場合まで $10[\mathrm{km/h}]$ ごとに公表されている[3)]。本稿では、これらのデータを実データと呼ぶこととする。第 4 章では、車が停止する際に働く摩擦力の影響について述べる。第 5 章では、坂道と平坦な道路との相違点について述べ、そこから道路の場所を反映した交通流モデルを導く。第 6 章では、Lax–Friedrichs の差分法について述べる。第 7 章では、Lax–Friedrichs の差分法を使って数値計算を行い、平坦な道と坂道との分岐点では、このモデルではどのような現象が起きるのかを考察する。

2　車の保存則

2.1　速度と速度場

高速道路を走っている車の流れを考える。時刻 t のとき、車の位置 x が $x_0(t)$ で表されるなら、速度は $dx_0(t)/dt$ で、加速度は $d^2x_0(t)/dt^2$ である。多くの車が走っている場合、それぞれの位置を $x_i(t)(i = 1, 2, 3, \cdots)$ で表す。

速度を測るのに 2 つの方法がある。最も一般的なものは個々の車の速度 v_i 、すなわち $v_i = dx_i(t)/dt$ を測ることである。N 台の車の場合には、N 個の異なった速度 $v_i(t)(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ が存在するため、車の数が多すぎると、各車を追っていくことは困難である。それに対し、もう 1 つの方法として、空間の各点、各時刻に対して速度場と呼ばれるただ 1 つの速度 $v(x, t)$ を考える。

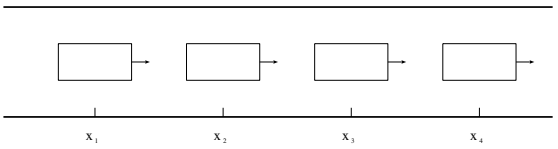


Fig. 2.1 車の位置

例えば、車の位置を車の中心で表す。位置 x_1 にいる観測者によって時刻 t_1 で測定された速度は、$v(x_1, t_1)$ で表される。同時刻で、位置 x_2 で測定された速度は、$v(x_2, t_1)$ で表される。また、位置 x_1 で時刻 t_2 で測定された速度は、$v(x_1, t_2)$ で表される。このように、位置 x_i 、時刻 t_j での速度は、その場所にいる車の速度のことを表す。つまり、車の位置 $x_i(t_j)$ における速度場 $v(x_i, t_j)$ は、その車の速度 $v_i(t_j)$ でなければならない。よって、

$$v(x_i(t_j), t_j) = v_i(t_j) \tag{2.1}$$

が成り立つ。速度場 $v(x, t)$ の存在は、各 x, t において 1 つだけ速度が存在していることを意味する。従って、このモデルは追い越しは考えない。なぜなら、追い越しの時点で車が横に 2 台並んでしまい、その場所に 2 つの異なった速度が存在してしまうからである。

2.2 交通量と交通密度

高速道路上のある位置に留まっている観測者は、そこをある時間内に通過する車の数を測定できる。この量を交通量といい、 q で表す。この交通量 q は、場所、時間に依存するため $q(x, t)$ で表せる。もう 1 つの測定方法は、交通量では固定された位置であったのに対して、固定された時間に与えられた領域内の車の数を測定する。入りきらなかった車は、分数にするなり、数えなかったり、ある決まった方法で処理する。これらの測定から、ある与えられた距離の道路上にいる車の数がわかる。この量を車の密度といい、 ρ で表す。車の長さを L 、車間距離を d とすると車の密度は、

$$\rho = \frac{1}{L + d} \tag{2.2}$$

である。

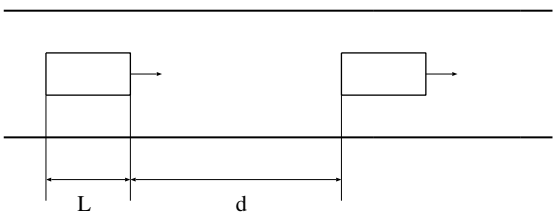


Fig. 2.2 密度

2.3　3 つの交通変数の関係

これまでの速度、密度、流量 (交通量) については密接な関係がある。ある道路で定速 v_0 、定密度 ρ_0 で車が動いていると仮定する。各々の車は、同じ速さで動いているから車間距離は一定を保っている。よって、交通密度は変化しない。交通量に関しては、観測者を基準に考えてみる。時間 τ の間に各車は距離 $v_0\tau$ だけ動くことより、観測者を通過する車の数は距離 $v_0\tau$ における車の数に等しい。ρ_0 は単位長さあたりの車の数なので、ここでは距離 $v_0\tau$ であるから τ 時間内に観測者を通過する車の数は$\rho_0 v_0\tau$ である。よって、単位時間あたりの交通量 q は、

$$q = \rho_0 v_0 \tag{2.3}$$

である。

これは極めて単純化された場合から引き出されたものであるが、基本は、

(交通量) = (交通密度) × (速度場)

である。交通変数は各々 x, t に依存しているから

$$q(x,t) = \rho(x,t)v(x,t) \tag{2.4}$$

で表せる。

2.4　車の数の保存

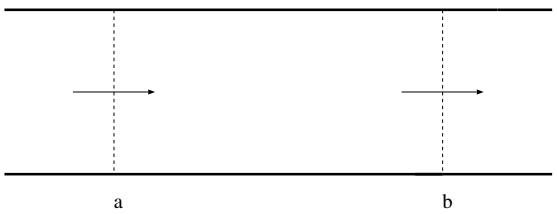


Fig. 2.3　道路の区間における車の出入

Fig.2.3 に示すような道路上 $x = a, x = b$ の間の区間における車の数 N は、交通密度の積分で

$$N = \int_a^b \rho(x,t)dx \tag{2.5}$$

と表せる。ただし、この区間内で入口や出口が無く、車が生成されたり消滅したりしないものとする。このとき、車の数の変化は $x = a, x = b$ を共に横切った車の数のみで決まる。各境界を横切る車の数 (交通量 $q(a,t)$, $q(b,t)$) が時間に関して一定ではないとするならば、車の数の変化率 dN/dt は、単位時間に $x = a$ を右に横切る車の数から $x = b$ を右に横切る車の数を引いたものに等しい。単位時間あたりの車の数は、交通量 $q(x,t)$ に等しいことより

$$\frac{dN}{dt} = q(a,t) - q(b,t) \tag{2.6}$$

である。式 (2.5) , 式 (2.6) より

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = q(a,t) - q(b,t) \tag{2.7}$$

という式を得る。この式は積分保存則と呼ばれる。

積分保存則は、また、道路の各点で成り立つ局所的保存則として表現される。この導出において、道路の端点 $x = a, x = b$ は任意の独立変数と考える。式 (2.7) は $x = a, x = b$ が時間において固定されていると仮定して得られたものだから、偏導関数に置き換えなければならない。x を y に、b は道路上の任意の位置を示すから、b を x でそれぞれ置き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^x \rho(y,t)dy = q(a,t) - q(x,t) \tag{2.8}$$

この式を x に関して偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}q(x,t) \tag{2.9}$$

が得られる。式 (2.4) より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{2.10}$$

と書ける。

2.5 速度と密度の関係

Lighthill と Whitham は、道路上の任意の点で車の速度は車の密度のみに依存する

$$v = v(\rho) \tag{2.11}$$

というモデルを提唱した[1)]。式 (2.11) を式 (2.10) に代入すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v(\rho)) = 0 \tag{2.12}$$

となる。式 (2.10) はまた、次のようなことを示す。もし、道路上に他の車がいないのならば、その車は最大速度 (制限速度) v_{max} で走ることができる。しかし、車の密度が増してくると、他の車の存在が車の速度を落とさせる。つまり、密度が増すにつれ、車の速度は減少し続ける。つまり

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = v'(\rho) \leq 0 \tag{2.13}$$

となる。ついには、車は最大密度 ρ_{max} で停止してしまうことになる。

$$v(\rho_{max}) = 0 \tag{2.14}$$

2.6　交通量と密度の関係

交通量は密度 $\times$ 速度であるから、2.5 節のモデルでは、交通量も密度にのみ依存している。

$$q = \rho v(\rho) \tag{2.15}$$

交通量は次の 2 つの場合に 0 となる。

1. 交通がない場合 $(\rho = 0)$
2. 交通が動かない場合 $(v = 0$ つまり $\rho = \rho_{max})$

密度のその他の値に対しては交通量は正でなければならない。よって、交通量の密度への依存は、例えば、Fig.2.4 のようになる。

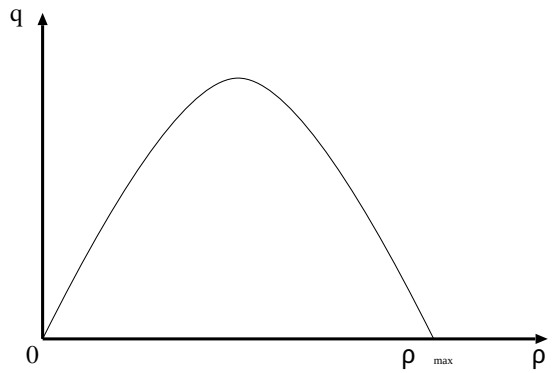


Fig. 2.4　交通量と密度の関係

3　車の停止距離

3.1　停止距離の実データ

保存則方程式 (2.10) を実際に解こうとすると、速度がどんな式で表されているかを知らなければ、解くことができない。2.5 節で、速度は密度に依存することを説明した。式 (2.2) より、密度は、車の長さ L は定数のため、車間距離 d によって変化する。車間距離は何によって変化するかと言えば、車の停止距離によって変化すると考えられる。ここでは、停止距離の実データを使用し、いくつかのモデルにあてはめ、速度と密度の関係式を導き出すことを検討する。

停止距離とは、空走距離と制動距離とを足し合わせたものである。空走距離と制動距離の説明を以下に示す[3)]。

- 空走距離 $\cdots$ 運転者がブレーキを踏み、ブレーキが実際にきき始めるまでの間に車が走る距離
- 制動距離 $\cdots$ ブレーキがきき始めてから車が停止するまでの距離
- (空走距離) + (制動距離) = (停止距離)

この停止距離が速度によってどの様に変化しているのか、普通乗用自動車のデータをTable 3.1にまとめておく[3)]。

速度 [km/h]	空走距離 [m]	制動距離 [m]	停止距離 [m]
20	6	3	9
30	8	6	14
40	11	11	22
50	14	18	32
60	17	27	44
70	19	39	58
80	22	54	76
90	25	68	93
100	28	84	112

Table 3.1 普通乗用自動車の停止距離

これらの停止距離を車間距離と考える。ただし、このデータは、

運転者が通常の状態で、乾いた舗装道路で急ブレーキをかけた場合

という条件がつくが、モデルを簡単にするために無視して考える。

3.2 比例関係モデルと実データとの比較

Fig.3.1のように速度と密度が比例関係のモデルを考える。この直線の方程式を

$$v = -A\rho + v_{\max} \tag{3.1}$$

とおく。傾きを求めると

$$A = \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \tag{3.2}$$

よって、式 (3.1) は式 (3.2) と式 (2.2) より

$$v = -\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \frac{1}{L+d} + v_{\max} \tag{3.3}$$

となる。$\rho = \rho_{\max}$ のとき $d = 0$ より式 (3.3) は

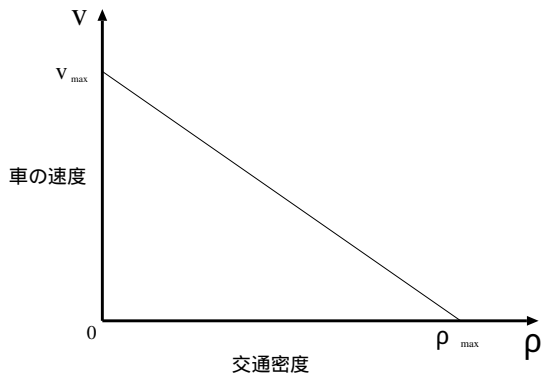


Fig. 3.1 速度と密度の関係

$$v = -\frac{v_{\max} L}{d + L} + v_{\max} \tag{3.4}$$

となる。

実際に、式 (3.4) が Table 3.1とどれくらい正しいのか検討してみると Fig. 3.2のようになった。

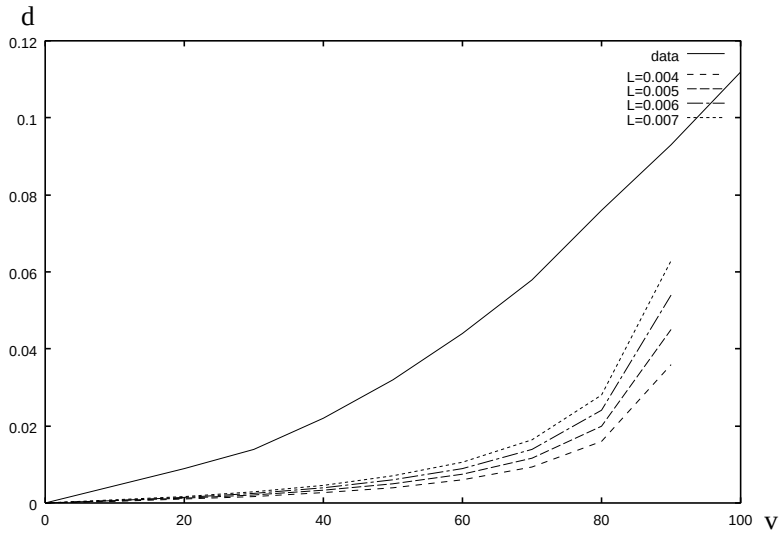


Fig. 3.2 式と実データとの比較

L は (車の長さ) + (安全に停止する距離) [km] 、$v_{\max} = 100$ [km/h] として考えた。グラフを見ると、実際のデータと大きく違うことがわかる。よって、このモデルは、不適当であると言える。

3.3 実データを補間して式をたてる

1 次補間公式

$$f(x) = f_0 + \frac{x_1 - x_0}{x - x_0}(f_1 - f_0) \tag{3.5}$$

を用いて実データを補間し、式をたてることを考える。区間を $(0 \leq v \leq 20)$、$(20 < v \leq 30)$、$(30 < v \leq 40) \cdots (90 < v \leq 100)$ とし、それぞれの区間で補間を行い、式 (3.6) が得られた。

$$\begin{cases} d = 0.00045v & (0 \leq v \leq 20) \\ d = 0.0005v - 0.001 & (20 < v \leq 30) \\ d = 0.0008v - 0.010 & (30 < v \leq 40) \\ d = 0.0010v - 0.018 & (40 < v \leq 50) \\ d = 0.0012v - 0.028 & (50 < v \leq 60) \\ d = 0.0014v - 0.040 & (60 < v \leq 70) \\ d = 0.0018v - 0.068 & (70 < v \leq 80) \\ d = 0.0017v - 0.060 & (80 < v \leq 90) \\ d = 0.0019v - 0.078 & (90 < v \leq 100) \end{cases} \tag{3.6}$$

次に、上式 (3.6) と式 (2.2) から密度を求め、速度と密度の関係を考えてみる。結果を Fig. 3.3に示す。このグラフを見ると 3.2 節のモデルが不適当であることが明らかである

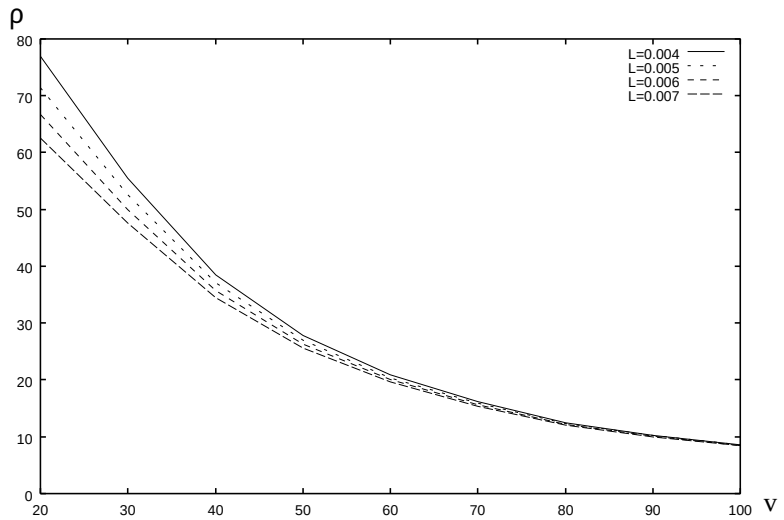


Fig. 3.3 速度と補間を用いて得られた密度の関係

が、速度と密度の関係は直線では表せない。

3.4　1 次分数式モデル

Table. 3.1のデータのみをグラフにしたものを Fig. 3.4に示す。このグラフから 1 次分数式で近似することを考えてみる。

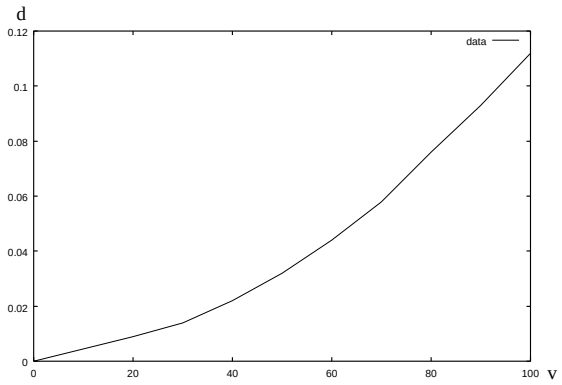


Fig. 3.4　実データのグラフ

1 次分数式を

$$v = \frac{k}{\rho - p} + q \tag{3.7}$$

とおく。補間によって求めた 100 点のうち、3 点を抜きだし連立方程式を解くと、$k = 3830, p = -30, q = -17$ が得られた。

この式と実データとの考察をする。まず、式 (3.7),(2.2) から d について解くと

$$d = \frac{v - q}{k + p(v - q)} - L \tag{3.8}$$

となる。いま、車の長さ $L = 0.005[\mathrm{km}]$ とし、k, p, q をそれぞれ代入すると

$$d = \frac{v + 17}{3830 - 30(v + 17)} - 0.005 \tag{3.9}$$

となる。実データは四捨五入したものだと考え、実データとの比較をしたものを Table 3.2 に示す。

結果を見ると速度が 30 [km/h] , 40[km/h] , 50[km/h] の値は範囲に含まれている。速度が 20[km/h] , 60[km/h] , 70[km/h] の値は範囲に含まれてはいないが、その誤差というものは小さい。速度が 80[km/h] 以上の値では範囲から大きく離れている。ある一定区間だけ実データに近付いているだけでは、適切だとは言いがたい。ある点を取り出して、式を求めるだけではなく、最小二乗法等を使って全体に対して、ある式を求められたのかもしれないが、計算式が面倒になることもあり、中途半端に終わってしまったことは、反省すべき点である。

速度 [km/h]	実際の車間距離 [km]	許容範囲 [km]	求めた車間距離 [km]
0	0		0.00012
20	0.009	0.0085-0.0094	0.01166
30	0.014	0.0135-0.0144	0.0144
40	0.022	0.0215-0.0224	0.0218
50	0.032	0.0315-0.0324	0.0318
60	0.044	0.0435-0.0444	0.0457
70	0.058	0.0575-0.0584	0.0663
80	0.076	0.0755-0.0764	0.1004
90	0.093	0.0925-0.0934	0.1676
100	0.112	0.1115-0.1124	0.3606

Table 3.2 反比例の式と実データとの比較

4 摩擦による影響

停止距離を考えるにあたり空走距離に要した反応時間と摩擦の影響を考えなければならないようだ[4]。反応時間に関しては、運転者が通常の注意を払っている場合を想定し、$t_0 = 1.0[s]$ とする。摩擦に関しては、乾いた舗装道路を走行する場合を想定し、かつ、 速度条件を加味した Table 4.1の 摩擦係数 μ によって変化する。。

速度 [km/h]	20	30	40	50	60	70	80	90	100
摩擦係数	0.60	0.59	0.58	0.55	0.53	0.50	0.47	0.47	0.47

Table 4.1 速度変化による摩擦係数

摩擦係数は速度によって変化するが、数値計算を行う際に面倒になってしまうので、平均をとって $\mu = 0.53$ とする。Table 3.1 から、空走距離は $t_0 v$ 、制動距離$\overline{d}$は

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a\overline{d} \qquad (v_0 : \text{初速度}、a : \text{加速度}) \tag{4.1}$$

から

$$\overline{d} = -\frac{v^2}{2a} \tag{4.2}$$

となる。よって、停止距離 (車間距離) は

$$d = t_0 v - \frac{v^2}{2a} \tag{4.3}$$

で表せる。

ニュートンの運動方程式より

$$ma = -\mu mg \tag{4.4}$$

これより、加速度 a は

$$a = -\mu g \tag{4.5}$$

となる。

式 (2.2),(4.3),(4.5) から、これを整理して

$$\frac{1}{2\mu g}v^2 + t_0 v - \frac{1}{\rho} + L = 0 \tag{4.6}$$

となる。 2 次方程式の解の公式を用いて

$$\begin{aligned} v &= \left(-t_0 + \sqrt{{t_0}^2 - \frac{2}{\mu g}(-\frac{1}{\rho} + L)} \right) / \frac{1}{\mu g} \qquad (v > 0) \\ &= \sqrt{\mu^2 g^2 {t_0}^2 + 2\mu g(\frac{1}{\rho} - L)} - \mu g t_0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる。$t_0 = 1.0(s)$, $\mu = 0.53$, $g = 9.8(m/s^2)$, $L = 5.0(m)$ を代入し、式 (3.6) から密度を求めたものと式 (4.7) とを比較し、実データとの Fig.4.1である。実線は実データを表し、破線は式 (4.7) をグラフにしたものである。実データのグラフが途中で切れてしまっているのは、実データが 100[km/h] までしかなく、それを [m/s] に変換すると 27.8[m/s] となるためである。2 本のグラフがほぼ同じに見えるので、この式 (4.7) を、数値計算を行う際に使用する。

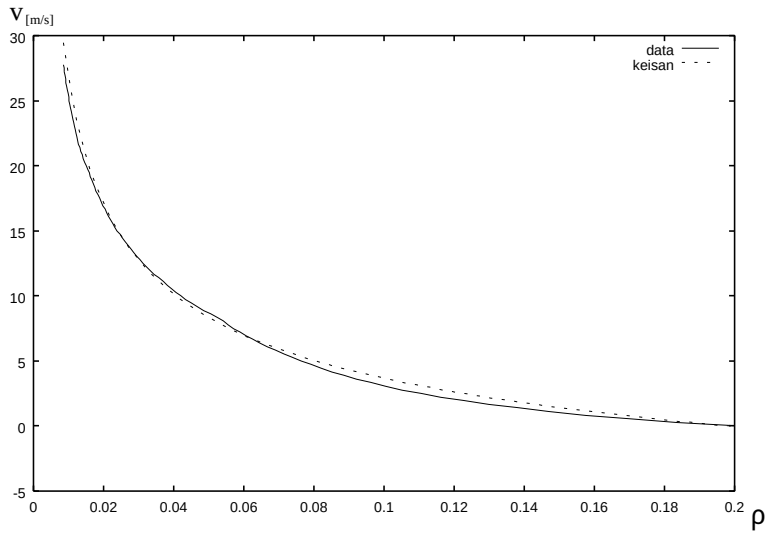


Fig. 4.1 補間公式から求めたものとの比較

5　坂道による影響

坂道では、どのような影響があるのか、登り坂の場合について考えてみる (Fig. 5.1)。

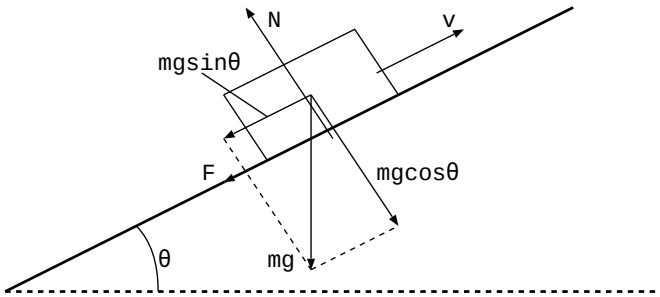


Fig. 5.1 登り坂

ニュートンの運動方程式より

$$ma = -F - mg\sin\theta \tag{5.1}$$

$$F = \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{5.2}$$

これより、加速度 a は

$$a = -g(\mu\cos\theta + \sin\theta) \tag{5.3}$$

となる。

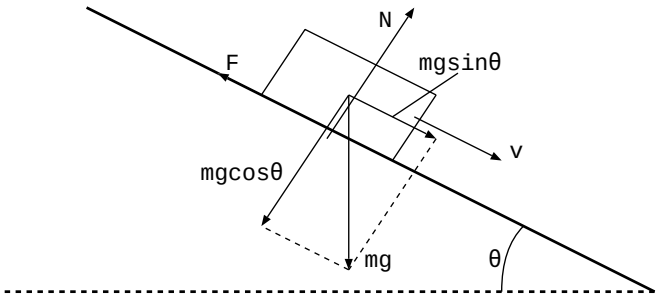


Fig. 5.2 下り坂

下り坂の場合 (Fig. 5.2)、同様に計算すると

$$\begin{aligned} ma &= -F + mg\sin\theta \\ F &= \mu N = \mu mg\cos\theta \\ a &= -g(\mu\cos\theta - \sin\theta) \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。だが、この式は式 (5.3) の角度 θ がマイナスなっているものと同じなので、下り坂の場合は、角度がマイナスになっているものと考える。

道路の位置 x での傾斜を $\theta(x)$ 度 (登り坂の場合 $\theta(x) > 0$ 、下り坂の場合 $\theta(x) < 0$) とすると、式 (4.5) において

$$a = -g(\mu \cos\theta(x) + \sin\theta(x)) \tag{5.5}$$

とすることになるので、式 (4.7) の μ のかわりに

$$\mu \cos\theta(x) + \sin\theta(x) \tag{5.6}$$

とおいた式

$$v(\rho, x) = \sqrt{(\mu \cos\theta(x) + \sin\theta(x))^2 g^2 {t_0}^2 + 2g(\mu \cos\theta(x) + \sin\theta(x))(\frac{1}{\rho} - L)} - (\mu \cos\theta(x) + \sin\theta(x))gt_0 \tag{5.7}$$

が得られる。これにより、車の保存則方程式 (2.10) は、

$$\rho_t + q(\rho, x)_x = 0 \tag{5.8}$$

$$q(\rho, x) = \rho v(\rho, x) \tag{5.9}$$

となり、通常の保存則方程式とは異なる、道の形状を反映した交通流モデルが得られる。

6 Lax–Friedrichs の差分法

6.1 導出

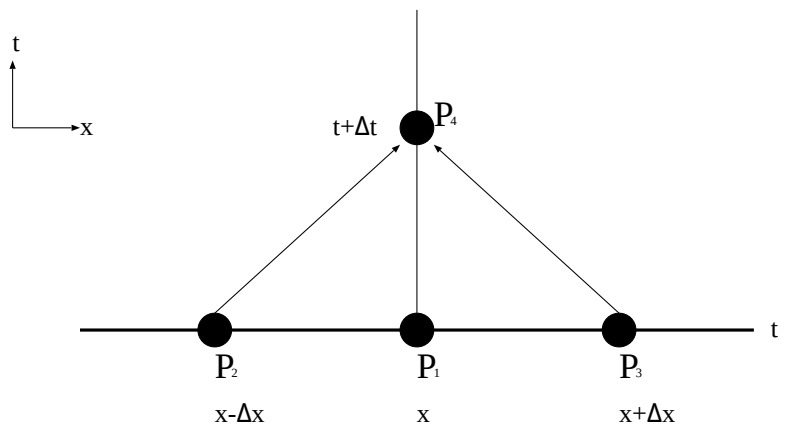


Fig. 6.1 Lax–Friedrichs の差分法

車の保存則方程式

$$\rho_t + q(\rho, x)_x = 0 \tag{6.1}$$

を初期値、境界値を

$$\begin{cases} \rho(x,0) = \rho_0(x) & (0 < x < M) \\ \rho_x(0,t) = \rho_x(M,t) = 0 & (t > 0) \end{cases} \tag{6.2}$$

として、Lax–Friedrichs の差分法で解いてみる。

式 (6.1) の 2 項目を合成関数の微分法を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q(\rho(x,t),x) &= \frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} \\ &= q_\rho \rho_x + q_x \end{aligned} \tag{6.3}$$

となることより式 (6.1) を書き直すと

$$\rho_t + q_\rho \rho_x + q_x = 0 \tag{6.4}$$

となる。

Lax–Friedrichs の差分法は、1 次精度の保存則差分法で、 ρ_t は前進差分を行う変わりに

$$\frac{\rho(P_4) - \overline{\rho(P_1)}}{\Delta t} \qquad \left(\overline{\rho(P_1)} = \frac{\rho(P_3) + \rho(P_2)}{2}\right) \tag{6.5}$$

と置き換える (Fig. 6.1)。$q(\rho)_x$ は中心差分を行う。以上のことより、式 (6.4) は、

$$\frac{\rho(P_4) - (\rho(P_2) + \rho(P_3))/2}{\Delta t} + \frac{q(\rho(P_3), x + \Delta x) - q(\rho(P_2), x - \Delta x)}{2\Delta x} = 0 \tag{6.6}$$

すなわち

$$\rho(P_4) = \frac{\rho(P_3) + \rho(P_2)}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{q(\rho(P_3), x + \Delta x) - q(\rho(P_2), x - \Delta x)\} \tag{6.7}$$

という差分式を得ることができる。

6.2 境界部分の差分

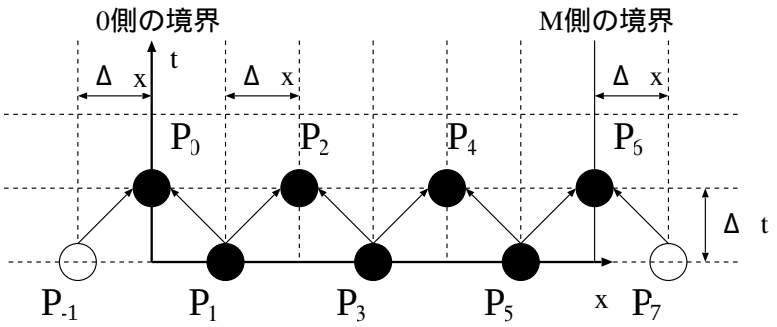


Fig. 6.2 境界値部分の求め方

2 点間から点を求める Lax–Friedrichs の差分法では、境界部分の点を求めようとすると、1 点しかないため、求めることができない。そこで、 0 側の境界値部分については、$x = 0$ から Δx だけ左のところに、ダミーとして P_{-1} を設けて P_1 と同じ点があると仮定して計算する。つまり、P_0 は、P_1 と P_1 から求めることになる。M 側の境界値部分については、 $x = M$ から Δx だけ右のところに、ダミーとして P_7 を設けて P_5 と同じ点があると仮定して計算する。つまり、P_6 は、P_5 と P_5 から求めることになる。

6.3 安定条件

数値解析を行うにあたって、解の安定性を考える必要がある。安定であるためには **Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)** 条件を満たさなければならない。その CFL 条件は、

$$|q_\rho(\rho, x)|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{6.8}$$

で与えられる。整理すると

$$\begin{aligned} q_\rho &= (\rho v(\rho, x))_\rho \\ &= v(\rho, x) + \rho v_\rho(\rho, x) \\ v_\rho(\rho, x) &= -\frac{\mu g}{\rho^2\sqrt{\mu^2 g^2 t_0^2 + 2\mu g(1/\rho - L)}} \end{aligned} \tag{6.9}$$

よって

$$q_\rho = \sqrt{\mu^2 g^2 {t_0}^2 + 2\mu g(\frac{1}{\rho} - L)} - \mu g t_0 - \frac{\mu g}{\rho\sqrt{\mu^2 g^2 t_0^2 + 2\mu g(1/\rho - L)}} \tag{6.10}$$

となる。

7 実験と考察

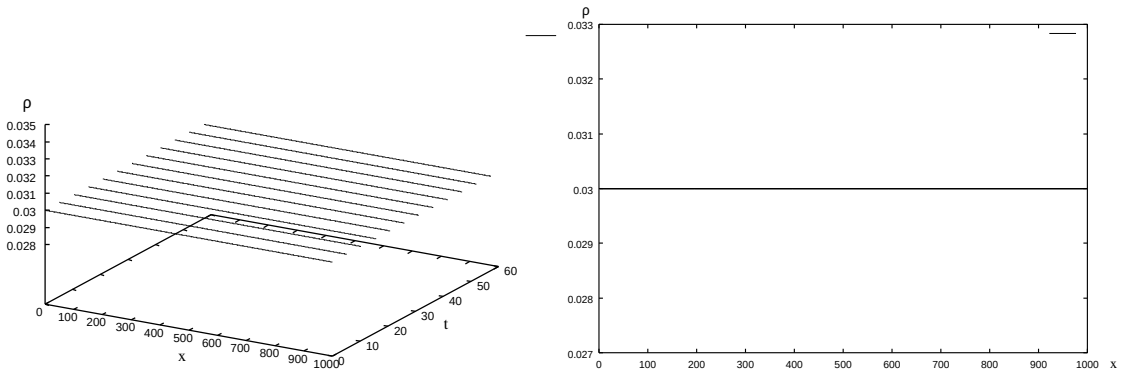
7.1 平坦な道の場合

初期設定を x の最大値 M を 1000[m] 、x 方向の分割数を 1000 $(\Delta x = 1)$ とし、初期密度 $\rho(x, 0)$ を

$$\rho(x, 0) = 0.03[\text{台数/m}] \tag{7.1}$$

で与える。これは、車の速度が約 50[km/h] のときである。時間が 60[s] になるまで計算を繰り返す。この初期設定については、以降の登り坂、下り坂についても同じ条件で計算した。

平坦な道の場合の計算結果を Fig. 7.1 に示す。このグラフは、何も変化がない。つまり、車が順調に流れていることを表している。



(a) 3 次元グラフ　　(b) 2 次元グラフ

Fig. 7.1　平坦な道の場合の計算結果

7.2　坂道の場合

道のモデルとして、道の半分 $(x = 500)$ までを平坦な道、半分以降を登り坂であるようなモデルを考える。坂の角度を $5°$ $(8\ \%$ の勾配$)$ とした (勾配が $10\ \%$ 以上が急な坂とみなされるようである[3) 4)]$)$。

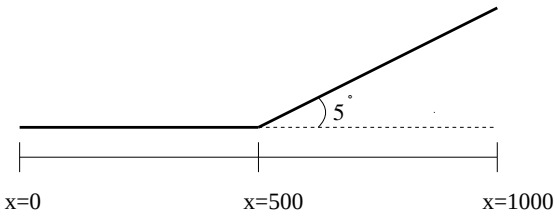
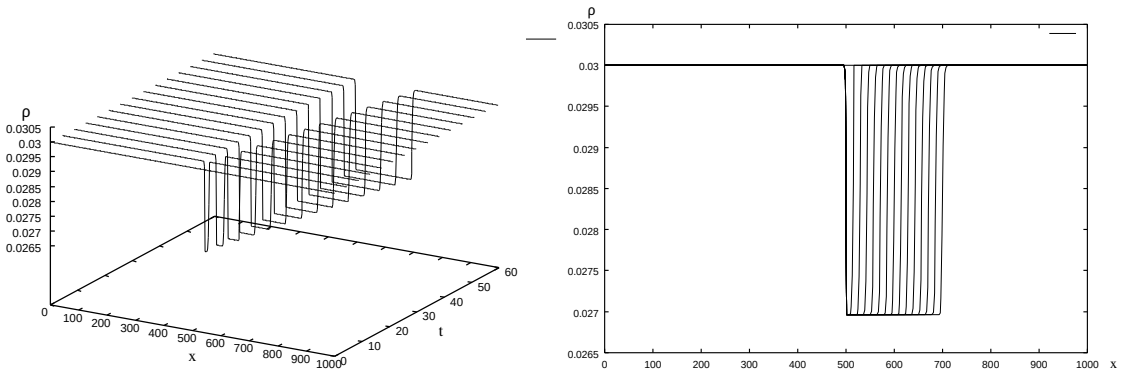


Fig. 7.2　道のモデル

計算結果を Fig. 7.3 に示す。これを見ると、登り坂に入ると密度が下がっている。密度が下がっているということは、車間距離が大きくなったことを示す。登り坂では、平坦な道よりも止まりやすいため、同じ速度での停止距離は短くなることになる。初期状態では、平坦な道と坂道での車間距離を同じだと与えているため、同じ車間距離の状態では、登り坂の方が速度を上げることができることになる。つまり、この交通流モデルでは、平坦な道より速度が上げることのできる坂道は、渋滞を解消するものと考えられるのではないだろうか。

登り坂と同じように、道のモデルとして、道の半分 $(x = 500)$ までを平坦な道、半分以降を下り坂であるようなモデルを考える。坂の角度を登り坂と同じく、$5°$ $(8\ \%$ の勾配$)$ とした。



(a) 3 次元グラフ　　(b) 2 次元グラフ

Fig. 7.3 登り坂の場合の計算結果

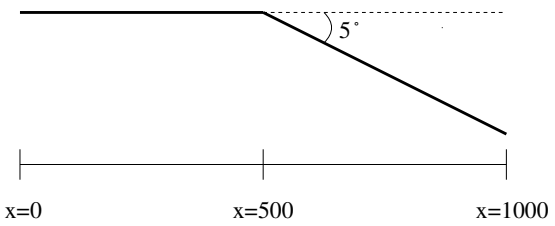


Fig. 7.4 道のモデル

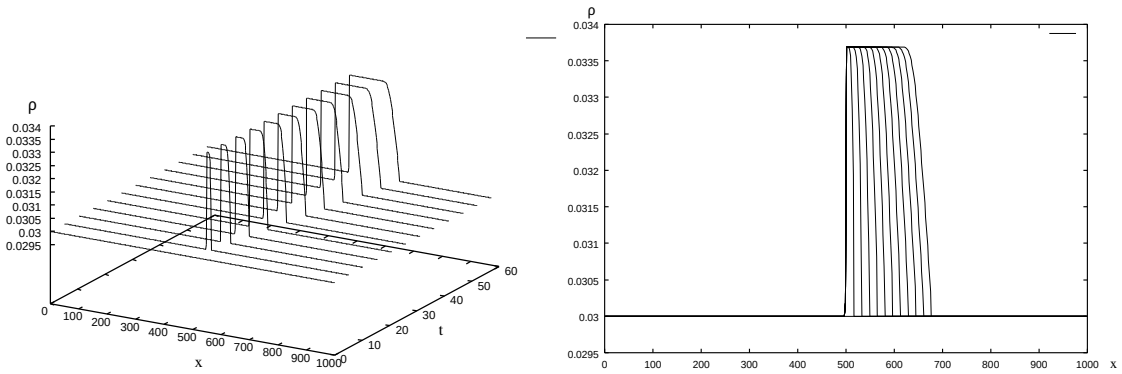
計算結果を Fig. 7.5 に示す。下り坂に入ると密度が上がっている。密度が上がっていることは、車間距離が短くなったことを示す。下り坂では、平坦な道よりも止まりにくいため、同じ速度での停止距離は長くなってしまう。つまり、この交通流モデルでは、平坦な道より速度を下げなければならない下り坂は、渋滞を引き起こすものだと考えられるのではないだろうか。

7.3 密度が定数ではない場合

前節までは初期密度は定数であったが、この節では、初期密度が定数ではない場合について考察する。尚、その他の初期設定及び、道のモデルに関しては、前節と同じ設定で数値計算を行う。初期密度 $\rho(x,0)$ を

$$\rho(x,0) = 0.01\sin\theta + 0.03[\text{台数}/m] \tag{7.2}$$

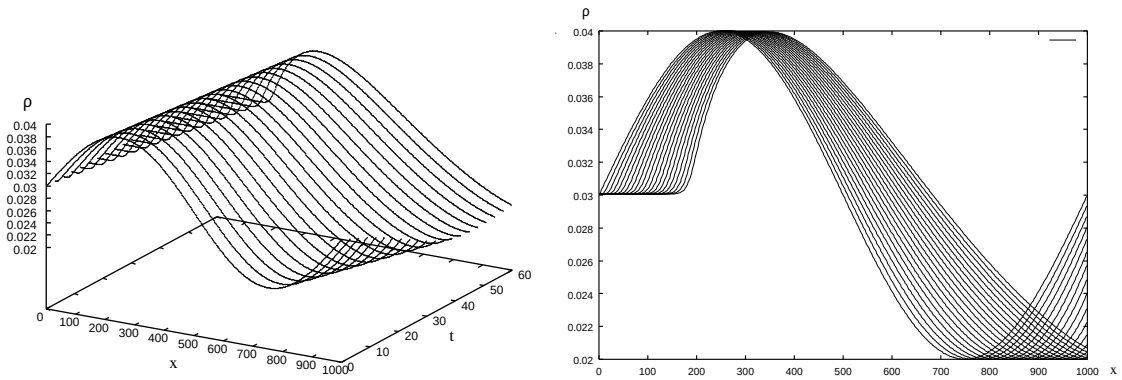
で与える。式 (2.2)、Table 3.1 より、40 [km/h] で車が走っている場合その密度は、$\rho \simeq 0.04$ 、60 [km/h] で走っている場合その密度は、$\rho \simeq 0.02$ となることから、車が 40–60 [km/h] の間で走っているように設定した。



(a) 3 次元グラフ　　(b) 2 次元グラフ

Fig. 7.5　下り坂の場合の計算結果

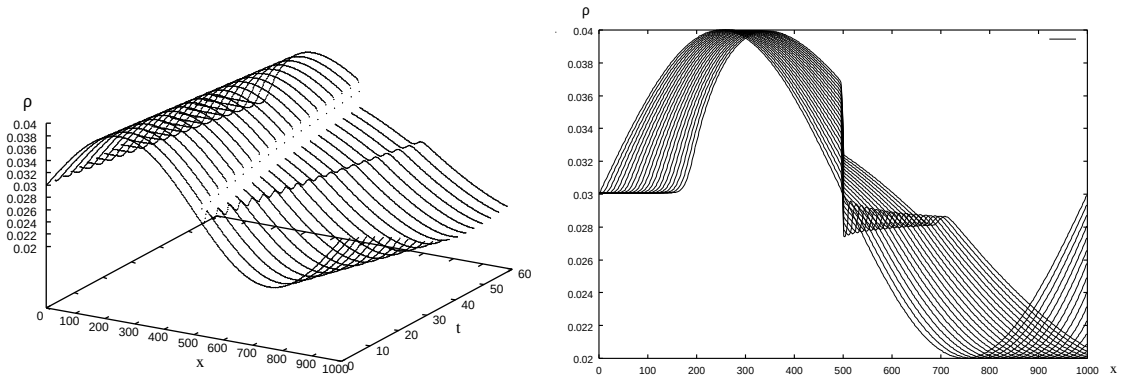
まず、平坦な道の場合の計算結果を Fig. 7.6 に示す。時間の経過につれて波形は右へとずれている。波形がほとんど変わっていないので、車が順調に流れていることを示している。



(a) 3 次元グラフ　　(b) 2 次元グラフ

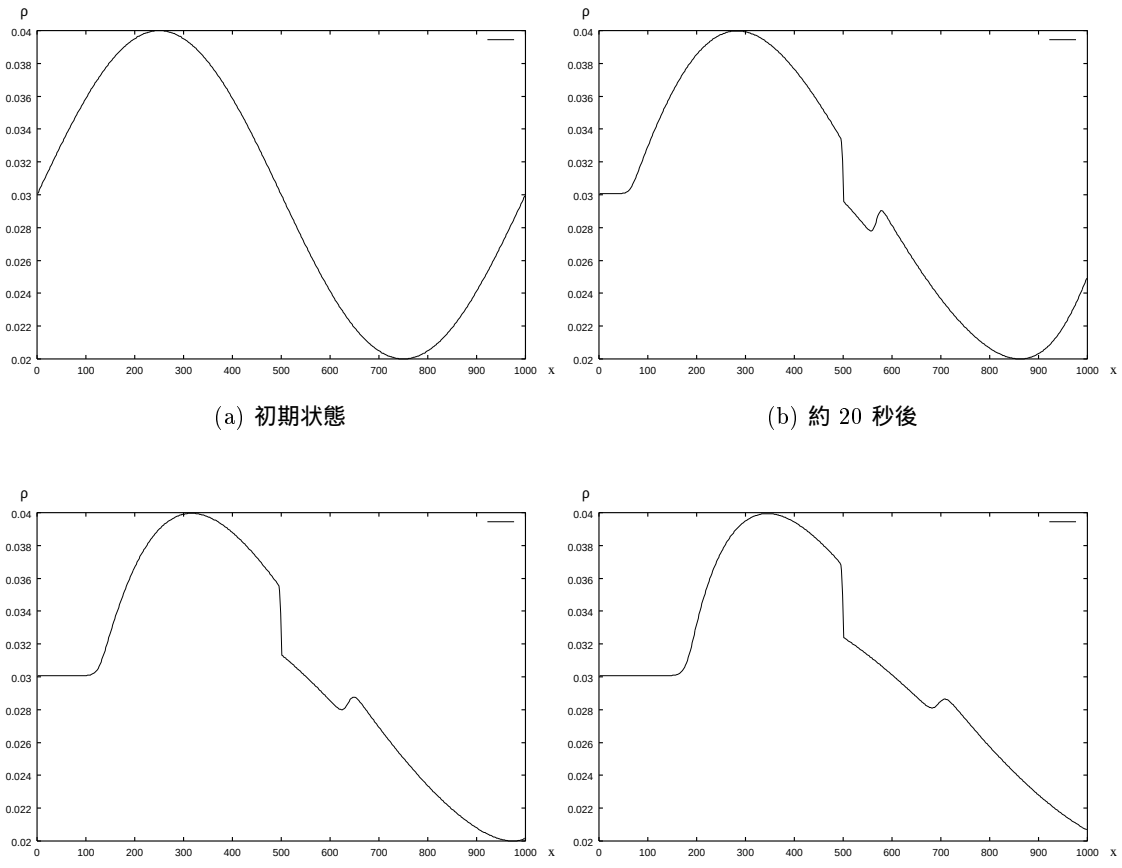
Fig. 7.6　平坦な道の場合の計算結果

次に、登り坂の場合の計算結果を Fig. 7.7 , 7.8 に示す。密度が定数のときと同じように、登り坂に入ると密度が下がっている。同様に考えると、登り坂では、車間距離が開いた分だけ速度を上げられると考えられる。ただ、気になる所は、一度下がった密度が何らかの影響により、上がる所である。そして、その所が時間が進むにつれて、右へと移動していることである。平坦な道の場合と比較したものを Fig. 7.9 に示す。このグラフは、時間が約 60 秒のときのものである。実線が平坦な道の場合、破線が登り坂の場合のグラフである。破線部分が下に下がっている部分が、登り坂の入り口による影響を示している。



(a) 3 次元グラフ　　(b) 2 次元グラフ

Fig. 7.7 登り坂の場合の計算結果



(a) 初期状態　　(b) 約 20 秒後

(c) 約 40 秒後　　(d) 約 60 秒後

Fig. 7.8 登り坂の場合のそれぞれの時間の様子

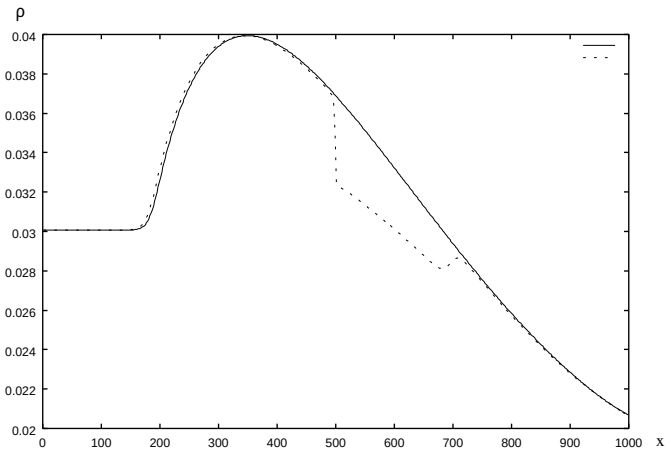
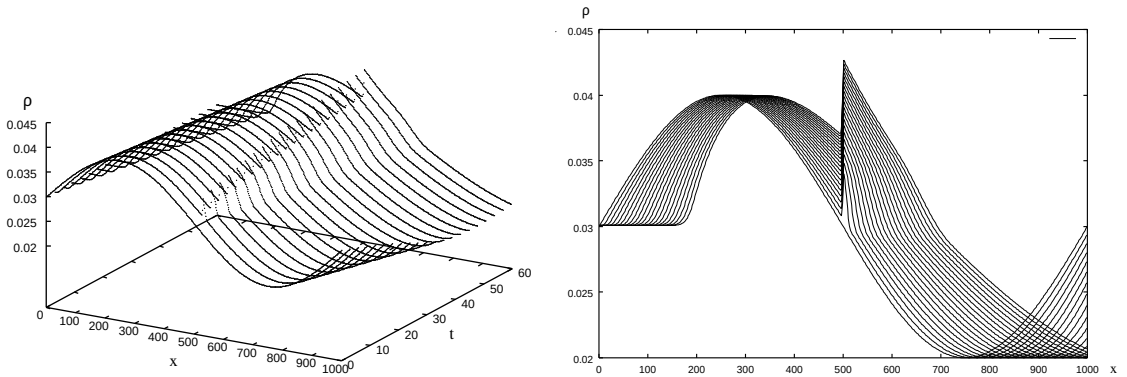


Fig. 7.9 約 60 秒後の平坦な道と登り坂の様子の比較

次に、下り坂の場合の計算結果を Fig. 7.10 , 7.11 に示す。密度が定数の場合と同じように、下り坂に入ると密度が上がっている。同様に考えると、下り坂では、車間距離が短くなった分だけ速度を下げなければならないと考えられる。登り坂のときと同じように約 60 秒後の様子を Fig. 7.12 に示す。実線が平坦な道の場合、破線が下り坂の場合のグラフである。破線が上に上がっている部分が下り坂の入り口による影響を示している。

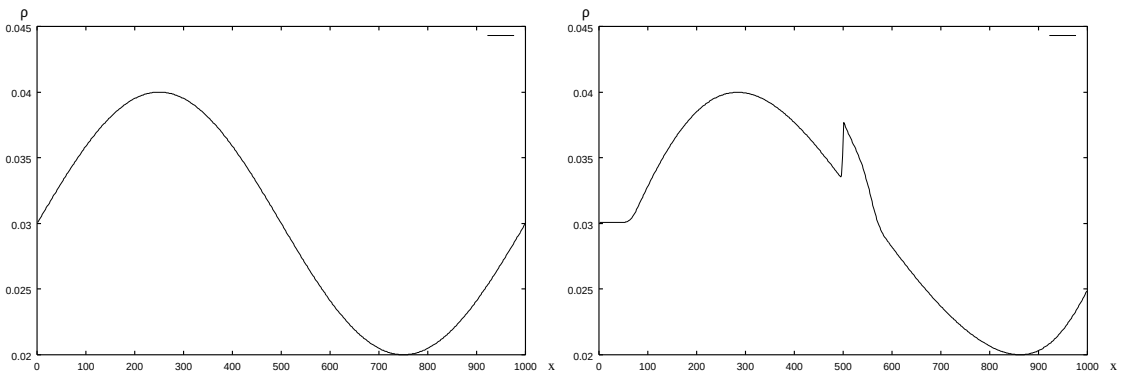


(a) 3 次元グラフ　　(b) 2 次元グラフ

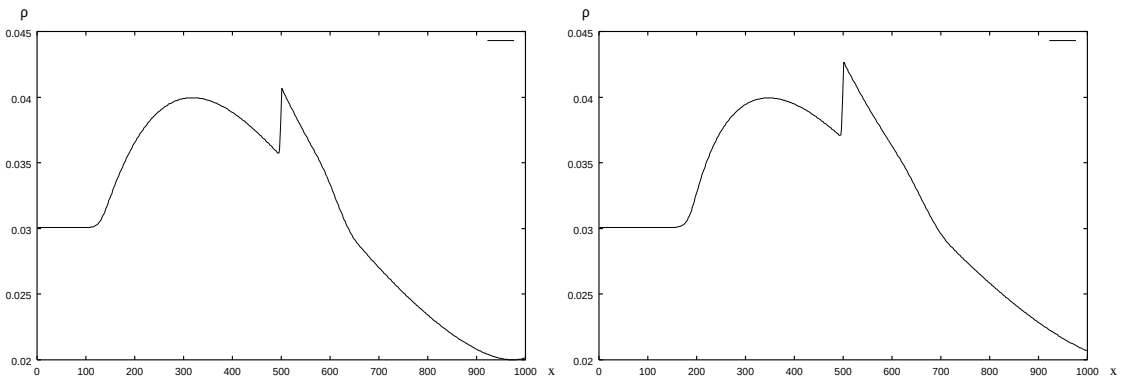
Fig. 7.10 下り坂の場合の計算結果

8 まとめ

停止距離から導かれる交通流の数学モデルについて考察した。通常、交通流モデルとして使われる、道路の場所に反映されないモデルの代わりに、停止距離を車間距離と考え



(a) 初期状態　(b) 約 20 秒後



(c) 約 40 秒後　(d) 約 60 秒後

Fig. 7.11　下り坂の場合のそれぞれの時間の様子

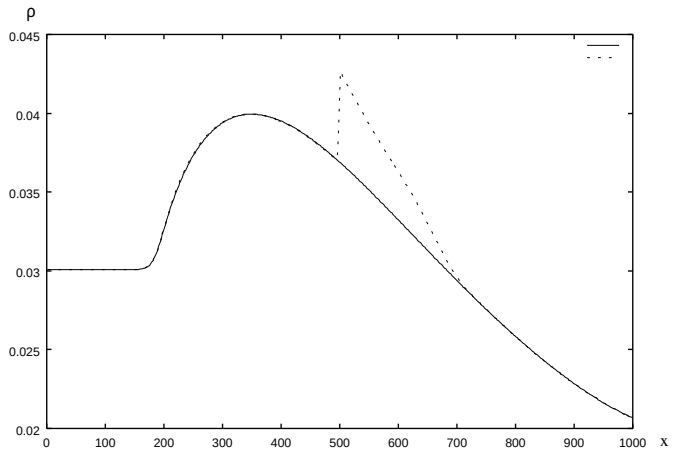


Fig. 7.12 約 60 秒後の平坦な道と下り坂の様子の比較

ることにより、道路の場所を反映されたモデルを作ることができた。

そして、そのモデルを用いる場合に、停止距離と速度の関係を実データを用いて、モデルを作成する方法について考察を行った。その結果、車を停止させる際に働く摩擦力の影響を考慮したものが、一番良い結果を得ることができた。いろいろな方法を考えたが、その中で中途半端に終わったものもあり、その点は反省すべき点である。

また、そのモデルを使用し、平坦な道と坂道では、どのような現象が起きるか、Lax–Friedrichs の差分法を用いて、数値計算を行った。登り坂に関しては、密度が下がり、車間距離が開く分、速度が上げられ、渋滞を解消する様子が見れた。一方、下り坂に関しては、密度が上がり、車間距離が短くなる分、速度を落さなければならなくなり、渋滞を引き起こす様子が見れた。一見、不自然とも思われるが、停止距離によって速度が変わることに原因がある。このモデルでは、停止距離 (車間距離) が速度の関係式を導いているため、停止距離が速度を決定している。止まりやすい坂道では、平坦な道より停止距離が短く済むため、速度を上げられる。逆に、止まりにくい下り坂では、平坦な道より停止距離が長く必要であるため、速度を下げなければならなくなる。つまり、数値計算の結果は、このモデル上では、正しいと判断できるだろう。

課題として、坂道のほかに、カーブでの様子も考察したかったが、実データから式をたてるのに時間をとってしまい、できなかった。また、同じ坂道でもいろいろな道のモデルで考察したかった。例えば、Fig. 8.1 のような道の場合、A で発生した影響が B ではどのような影響となるのかも見てみたかった。

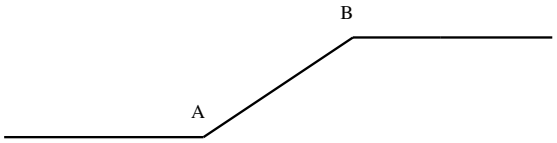


Fig. 8.1 道のモデル

参考文献

[1] R.Harberman : “*MATHMATICAL MODEL : TRAFFIC FLOW*”(中井暉久 訳 , 現代数学社 , 1981)

[2] 山口昌哉 , 野木達夫 : “数値解析の基礎” , (共立出版 , 1969) , pp63-65

[3] 中部日本自動車学校 編 : “自動車学校学科教本” , pp98-99

[4] 中部日本自動車学校 編 : “安全運転の知識”, pp14-15